



UMA COMPARAÇÃO NUMÉRICA ENTRE OS MODELOS DE VIGA DE TIMOSHENKO E EULER-BERNOULLI

A NUMERICAL COMPARISON BETWEEN TIMOSHENKO AND EULER-BERNOULLI BEAM MODELS

Carlos Friedrich Loeffler Neto (1); Daniel Carvalho de Moura Candido (2); Natan Sian das Neves (3) Rodrigo Silveira Camargo (4) Vitor Pancieri Pinheiro (5)

(1) Dr. Prof.-PPGEM, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

(2) Eng. Civil, PPGEC, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil.

(3) Eng. Civil, PPGEC, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil.

(4) Dr. Prof.-PPGEC, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

(5) Me. Eng. Mecânica-PPGEM- Universidade Federal Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil.

Email para correspondência: danielcandido89@gmail.com; (P) Daniel Carvalho de Moura Candido

Resumo: No contexto da engenharia estrutural as vigas figuram como elementos essenciais nas mais diversas aplicações práticas. Desta forma, há uma grande demanda de pesquisa acerca dos modelos matemáticos disponíveis para análise comportamental destes elementos, que pode ser abordada nas vertentes analítica e numérica. No que tange a origem de tais modelos, alguns provêm da mecânica dos sólidos, enquanto outros modelos mais robustos são advindos da teoria da elasticidade. Neste artigo propõe-se uma comparação numérica via Método de Diferenças Finitas (MDF) entre os modelos estáticos de Euler-Bernoulli e Timoshenko, da mecânica dos sólidos clássica. São avaliados os resultados numéricos de tensões e deslocamentos através de uma análise paramétrica em relação a razão comprimento/altura (L/h), fixada a seção transversal e o perfil de carregamento sobre o elemento. Os resultados gerados pelos algoritmos do MDF são validados com soluções analíticas e apresentam boa precisão em todos os casos testados. Há uma divergência entre as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko para baixas razões L/h , devido aos efeitos de cisalhamento. Em relação às tensões normais, as duas teorias implementadas numericamente apresentam concordância satisfatória em relação à referência analítica.

Palavras chaves: Mecânica dos Sólidos; Teoria da Elasticidade; Modelo de Euler-Bernoulli; Modelo de Timoshenko; Método de Diferenças Finita.

Abstract: In the context of structural engineering, beams are essential elements in numerous practical applications. Thus, there is great demand for research about the mathematical models developed for behavioral analysis of these elements, which can be solved via analytical and numerical approaches. Regarding the origin of such models, some originate from classical mechanics of solids theories, while other more robust models are derived from the theory of elasticity. In this paper, we propose a numerical comparison using the Finite Differences Method (FDM) between the static models of Euler-Bernoulli and Timoshenko, of the classical solid mechanics. The numerical results of stresses and displacements are evaluated through a parametric analysis for length / height



ratio (L / h), with fixed cross section and loading profile on the element. The results generated by the FDM algorithms are validated by analytical solutions and present good accuracy in all cases tested. There is a divergence between the theories of Euler-Bernoulli and Timoshenko for low L / h ratios due to shear effects. In regards to normal stresses, the two theories implemented numerically show acceptable agreement with the analytical reference.

Keywords: Solid Mechanics; Theory of Elasticity; Euler-Bernoulli Model; Timoshenko Model; Finite Difference Method.



1 INTRODUÇÃO

A demanda por estudos conceituais focados na modelagem matemática de vigas apresenta-se ainda como latente na literatura, devido a ampla aplicabilidade deste tipo de elemento estrutural em áreas como construção civil, projetos mecânicos de máquinas, turbinas a gás e aeronáutica (Hutchinson, 1981; Faccio, 2017).

Tais elementos de viga, por sua vez, com natureza real tridimensional são comumente representados através de modelos unidimensionais, como é o caso dos modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, difundidos na seara da mecânica dos sólidos, ou mesmo abordados de maneira bidimensional como é o caso de alternativas tipicamente presentes na teoria da elasticidade como na estratégia via tensor de Airy ou pela equação de Navier. É importante destacar que todos estes modelos têm como objetivo conceitual unificado a representação do comportamento deformacional dos elementos de viga, com suas inerentes limitações e vantagens descritivas. Neste contexto é importante ao engenheiro projetista ou pesquisador de física-matemática a compreensão da potencialidade e aderência de cada modelo a realidades físicas distintas (Timoshenko; Goodier, 1980).

Uma exploração mais sistêmica das peculiaridades de cada modelo pode ser melhor conduzida com o uso de métodos numéricos computacionais, que permitem versatilidade nos testes e geração de resultados em tempo reduzido, no caso dos modelos aqui tratados. Aqui seleciona-se o método das diferenças finitas por sua simplicidade conceitual e de implementação, em adição a seu bom desempenho esperado frente aos problemas abordados, uma vez que, as equações diferenciais tratadas são lineares. Desta forma visa-se com o uso da ferramenta numérica a exploração das hipóteses e premissas simplificadoras adotadas em cada modelo e sua consequência direta da capacidade de descrição do comportamento das vigas (Orlande et al., 2017).

2 MODELOS DIFERENCIAIS DE VIGAS

Os principais modelos matemáticos que se propõe a descrever o comportamento deformacional dos elementos de vigas, tanto da mecânica dos sólidos quanto na teoria da elasticidade baseiam-se em princípios mecânicos básicos de equilíbrio estático de forças e momentos e também em leis conservativas de quantidade de movimento, provindas da mecânica do contínuo (Fung, 1977; Popov, 1978).

Nos modelos unidimensionais provenientes da Mecânica dos Sólidos, são adotadas premissas de prevalência de uma dimensão sobre as outras, desprezando-se, portanto, o efeito Poisson, distintamente do que ocorre com os modelos fundados na elasticidade. A consequência teórica intuitiva é de um modelo menos preciso. Outras duas características importantes são a influência dos esforços cisalhantes e da inércia de rotação da seção do elemento. A análise da adoção de hipóteses tal como as citadas acima e seu impacto na capacidade preditiva dos modelos constitui lógica central que permeia a proposta do artigo. Na sequência uma breve colocação teórica sobre cada um dos três modelos em abordagem é exposta.



Inicia-se aqui pelo mais simples dentre estes modelos, conhecido largamente na literatura como teoria clássica de vigas, dada sua difusão e resultados razoáveis para diversas aplicações de engenharia, denominado modelo de Euler-Bernoulli, cuja álgebra é contextualizada abaixo (Feodosiev, 1980).

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) \quad (1)$$

Os carregamentos internos, como consequência direta da definição diferencial representada pela Eq. (1), podem ser determinados pelas Eq. (2) e (3).

$$M = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (2)$$

$$V = EI \frac{d^3 v}{dx^3} \quad (3)$$

Neste primeiro modelo são considerados os efeitos do momento fletor sobre o deslocamento lateral da viga, entretanto desprezados os efeitos de inércia de rotação e cisalhamento. A tendência deste modelo é prever muito bem o comportamento do campo de deslocamento de elementos de viga esbeltos, onde a seção transversal não é muito significativa perto da dimensão do vão (Timoshenko, 1966).

Um segundo modelo unidimensional, proposto por Timoshenko, denominada modelo da viga grossa ou teoria da viga de Timoshenko, preconiza a consideração dos efeitos de solicitações cisalhantes e inércia de rotação (Timoshenko, 1921). Este modelo possui a particularidade de ratear a rotação total de cada ponto da viga em uma influência rotacional do momento fletor adicionada à contribuição da deformação angular oriunda do cisalhamento, tal como posto matematicamente pela Eq. (4) (Rao, 2017).

$$\frac{dv}{dx} = \phi + \gamma \quad (4)$$

Este efeito conjunto para geração da rotação, juntamente com os efeitos da inércia de rotação em conjunto com a inércia de translação no balanço de força sobre um elemento infinitesimal dão origem ao modelo diferencial com dois graus de liberdade mostrado na sequência, cujas variáveis de interesse são o campo de deslocamento v e a rotação devido ao momento fletor, ϕ (Weaver; Timoshenko; Young, 1990), conforme mostra-se na Eq. (5) e (6).

$$kGA \left(\frac{d\phi}{dx} - \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = q(x) \quad (5)$$

$$EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} = kGA \left(\phi - \frac{dv}{dx} \right) \quad (6)$$

Onde A representa a seção transversal da viga, $q(x)$ a carga transversalmente aplicada ao elemento. A característica de rigidez do material é representada pelos módulos de elasticidade transversal e longitudinal, respectivamente, E e G , e um fator geométrico k específico deste modelo, cujo valor para seções retangulares é de 5/6 (Cowper, 1966).

Os carregamentos internos de momentos fletor e esforço cortante são calculados de maneira específica pela teoria de Timoshenko, no formato a seguir. Um sequenciamento mais aprofundado destes conceitos e de diversas soluções analíticas de referência é dado no trabalho de Fleischfresser (2012).

$$M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7)$$

$$V = kGA \left(\frac{dv}{dx} - \phi \right) \quad (8)$$

Na seara da teoria da elasticidade, uma forma de abordar o problema da deflexão de uma viga consiste no uso da função tensão da Airy, que corresponde matematicamente a um campo escalar arbitrário $\varphi(x, y)$, que se correlaciona com as entidades da tensão atuantes num estado plano da maneira que segue (Love, 2013).

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (9)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (10)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

Desta forma é possível utilizar os artifícios das Eq. (7), (8) e (9) nas equações gerais de equilíbrio estático, presentes na teoria da elasticidade, dando origem então a uma equação diferencial representada por operador bi harmônico (Sokolnikoff, 1956).

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (12)$$

É possível propor diversos polinômios em termos de constantes desconhecidas, e através da inserção dos mesmos na Eq. (12), determina-los. Cada proposta com um polinômio distinto é capaz de descrever uma situação física diferente, e como a equação aqui trabalhada tem natureza linear, também é possível uma superposição de soluções para descrever o quadro

físico desejado. Uma boa variedade de soluções analíticas, inclusive para vigas sobre diversas condições de estado plano de tensão podem ser apreciadas em Timoshenko & Goodier (1980).

3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

O uso de métodos numéricos computacionais no contexto da engenharia contemporânea é completamente difundido, representando uma ferramenta essencial para a solução problemas práticos e ensino acadêmico, onde as complexidades vão além da capacidade de predição das soluções fechadas mais simples, disponíveis na literatura (Maliska, 2017; Pinheiro et al. 2016).

Dentre os métodos numéricos mais clássicos, o método de diferenças finitas é o precursor, constituído por uma lógica simples de implementar que propõe aproximações diretas nos operadores diferenciais das equações de governo de interesse. Os procedimentos envolvidos nas aproximações envolvem truncamentos de séries de Taylor e podem ser apreciados em riqueza de detalhes em Fortuna (2000) e ainda em Anderson, Tannehill & Pletcher (2016).

A equação de governo que representa o modelo de Euler-Bernoulli, primeiro a ser abordado, pode ser discretizada por meio de aproximações com diferenças centrais, dando origem a seguinte equação de diferenças finitas, conforme pode ser visto em Neves, Souza & Pinheiro (2018).

$$w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{q_i h^4}{EI} \quad (13)$$

A aplicação da Eq. (13) nos pontos nodais da malha, com o devido tratamento dos nós de contorno de acordo a vinculação escolhida para a viga em cada uma de suas extremidades resulta em um sistema linear, cujo o vetor de incógnitas são os deslocamentos em cada ponto nodal do domínio discreto.

Em sequência para o modelo de Viga de Timoshenko tem-se um sistema governante formado por duas equações diferenciais em função de ϕ e v , que são respectivamente a inclinação devido ao momento fletor e o deslocamento vertical de cada nó.

$$h(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - 2(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) = \frac{2h^2 q_i}{kGA} \quad (14)$$

$$2EI(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) - kGA[2h^2 \phi_i - h(v_{i+1} - v_{i-1})] = 0 \quad (15)$$

Aqui há uma relativa dificuldade extra, pois, o sistema formado pelas Eq. (14) e (15) forma um problema de dois graus de liberdade, fazendo com que o sistema linear final seja formado com linhas alternadas entre as duas variáveis, o que por sua vez, exige um pouco de atenção. O tratamento das condições de contorno também se diferencia ligeiramente do

tradicional, uma vez que há a necessidade de impor as duas variáveis em cada extremidade do domínio, para efetuar a escrita das equações inerentes aos nós de contorno. O tratamento das condições de contorno aqui segue os procedimentos padronizados do método, conforme pode ser visto em Orlande et al. (2017).

4 EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

Os testes numéricos propostos no vigente artigo são focados em na análise estática de uma viga simples, bi apoiada e sujeita a um carregamento uniforme ao longo de toda sua extensão como ilustrado na Figura 1, a seguir.

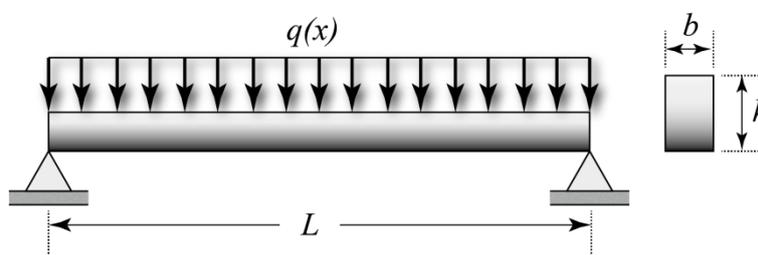


Figura 1. Esquema da viga
Fonte: Acervo Pessoal

Como comentado a priori, há diversas opções de modelos matemáticos que tentam descrever o comportamento destes elementos, opções estas que variam desde uma abordagem tridimensional complexa, até modelos reticulares unidimensionais. Aqui pretende-se uma abordagem numérica, via diferenças finitas, da viga mostrada acima com os modelos de Euler-Bernoulli, modelo de viga de Timoshenko, comparando o desempenho dos mesmos ao de um modelo elástico baseado na função tensão de Airy e seus polinômios. Para tanto, inicia-se a exposição com um teste de malha padronizado, mostrando a convergência dos algoritmos autorais na predição de resultados, frente a soluções analíticas de referência, encontradas facilmente no trabalho de Carrer et al. (2012).

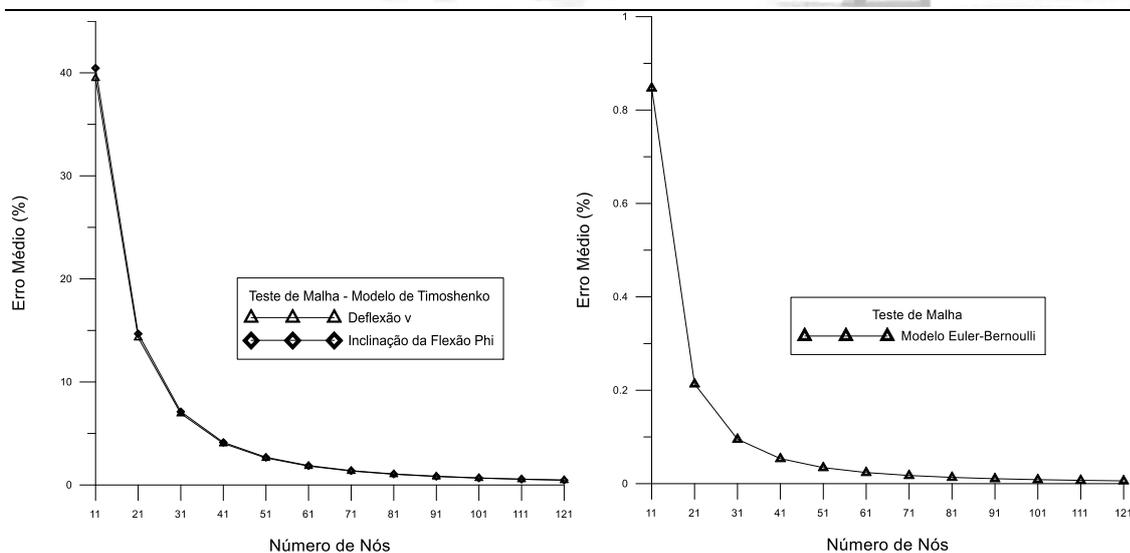


Figura 2. Teste de Malha dos Modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko
Fonte: Acervo Pessoal

É possível observar no gráfico da direita na Figura 2, que a convergência do modelo de Euler-Bernoulli é muito simples frente ao método numérico, já apresentando erros abaixo de 1% mesmo para a malha mais pobre de teste. Em contraponto ao exposto, já para o gráfico ao lado, inerente ao modelo de Timoshenko, ambas as curvas partem de patamares de erros bem mais elevados para malhas pobres, alcançando patamares abaixo de 1% apenas com malhas mais ricas, a partir de 91 nós. Tal comportamento é bem fundamentado com a estrutura matemática de cada modelo, já sendo esperada um maior esforço numérico para um modelo de duas equações diferenciais, como é o caso da viga de Timoshenko. De forma geral, as soluções numéricas apresentam aderência exemplar com as soluções analíticas de referência, o que torna consolidada a validação dos algoritmos implementados.

Na sequência apresentam-se os resultados para a análise da distribuição de tensão normal na direção x para os dois modelos em análise, comparados à referência analítica do modelo de Airy. Nesta simulação utiliza-se uma viga com vão de 4.375 m, altura de 0.35m, base de 0.25m. A razão (L/h) da viga resulta em valor de 12,5, o que aponta para uma viga esbelta.

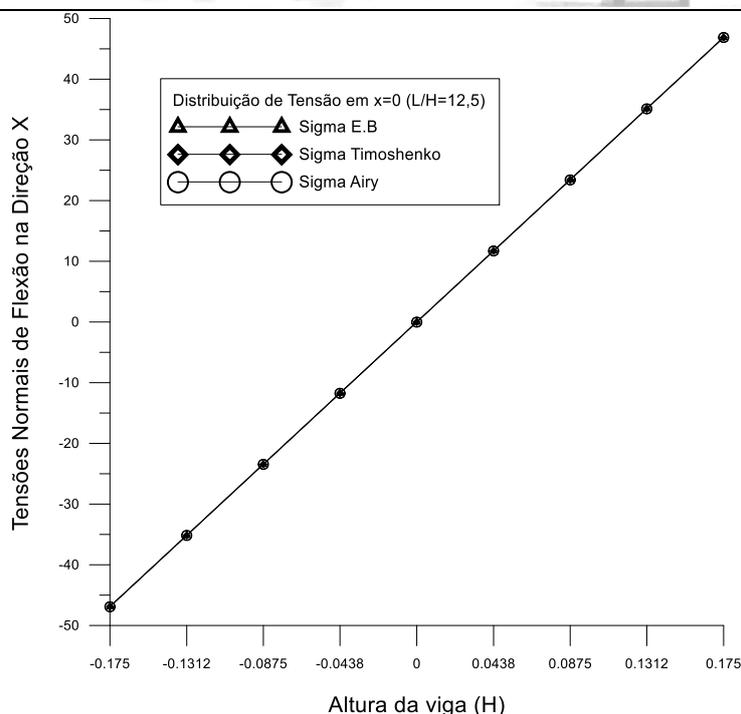


Figura 3. Análise Comparativa da Distribuição de Tensão na Direção X
Fonte: Acervo Pessoal

Uma observação da Figura 3 permite inferir sobre uma concordância entre os três modelos analisados. Este resultado já era esperado, principalmente no meio vão onde foi realizada a simulação. Neste ponto os efeitos de cisalhamento são nulos e as teorias tendem a apresentarem um grande alinhamento entre si. Este resultado pode ser melhor ilustrado com uma análise algébrica da expressão analítica da tensão, via solução por polinômios de Airy, posta a seguir (Timoshenko; Goodier, 1980).

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} (l^2 - x^2)y + \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y \right) \quad (16)$$

A Eq. 16 mostra que o modelo bidimensional prevê uma tensão normal de flexão em x formada por dois termos. O primeiro deles é exatamente coincidente com a Teoria Elementar de Flexão, e o segundo pretende efetuar uma correção em regiões próximas aos apoios. Em geral, essa correção é pequena, e só se pronuncia em viga com valores menores de razão (L/h). Com isso, para vigas esbeltas, que são as mais comuns em aplicações de engenharia civil, a teoria mais simples é também suficientemente adequada para gerar resultados de qualidade a nível de projeto.

Ainda dentro do contexto de esbeltez, é importante notar que, os efeitos do cisalhamento são pouco pronunciados em viga cuja razão (L/h) é elevada. A própria Teoria Elementar da Flexão consegue fornecer resultados bem razoáveis para predições de tensões e deslocamentos contanto que a esbeltez da viga seja mantida (Popov, 1978).

Entretanto, no caso de vigas espessas, cuja razão (L/h) apresenta-se em menores valores, os efeitos do cisalhamento tornam-se mais significativos. No ensejo de confirmar tais expectativas, faz-se abaixo uma análise paramétrica avaliando os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko em relação a uma redução de esbelteza do elemento e viga. Por conveniência escolhe-se o deslocamento transversal como variável foco, para que então, tenha-se aqui também algo ligado à rigidez, em contraponto com a análise de tensão que está intrinsecamente ligada a critérios de resistência.

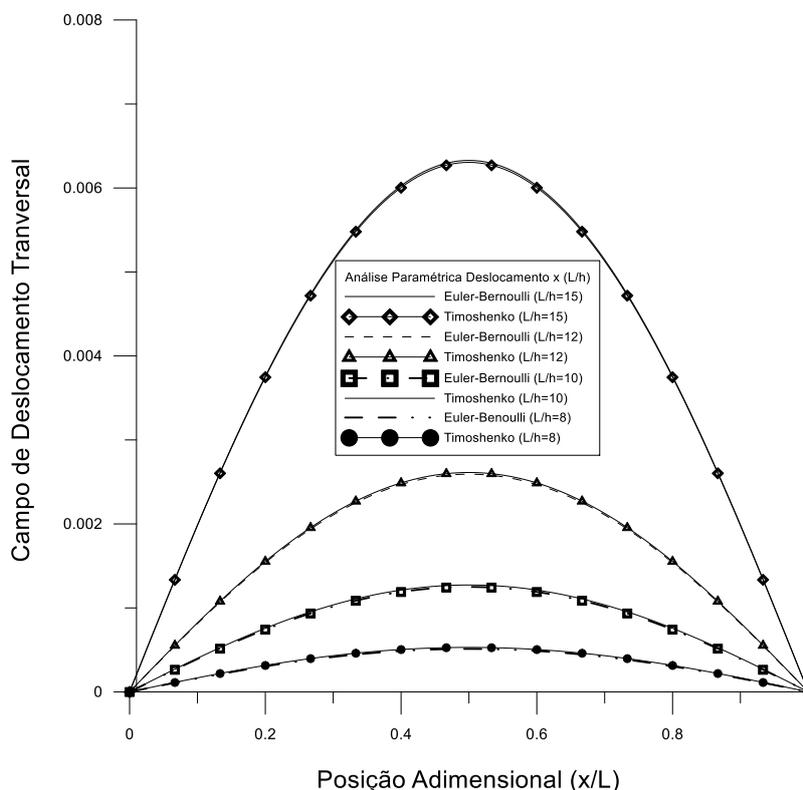


Figura 4. Análise Paramétrica – Campo de Deslocamento x (L/h)
 Fonte: Acervo Pessoal

Os resultados sintetizados pela Figura 4 mostram um teste paramétrico, onde gradualmente a razão (L/h) da viga é reduzida e os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko comparados em função dos resultados do campo e deslocamento transversal. Este gráfico, por questões de escala, qualitativamente mostra uma boa aderência visual entre os modelos qualquer que seja a relação (L/h), o que não traduz a realidade completa da análise. Para tanto, faz-se necessário o uso de outras formas de visualização, como por exemplo o erro médio em cada simulação com (L/h), distinto, para conseguir vislumbrar se realmente os modelos estão em concordância ou se afastamento no que tange ao comportamento frente aos crescentes efeitos de cisalhamento. Define-se, portanto na Figura 5, um conceito de erro médio que tem como referência o modelo de Timoshenko, como balizador. Desta forma, o crescimento deste erro, indica uma tendência de afastamento entre as predições dos dois modelos.

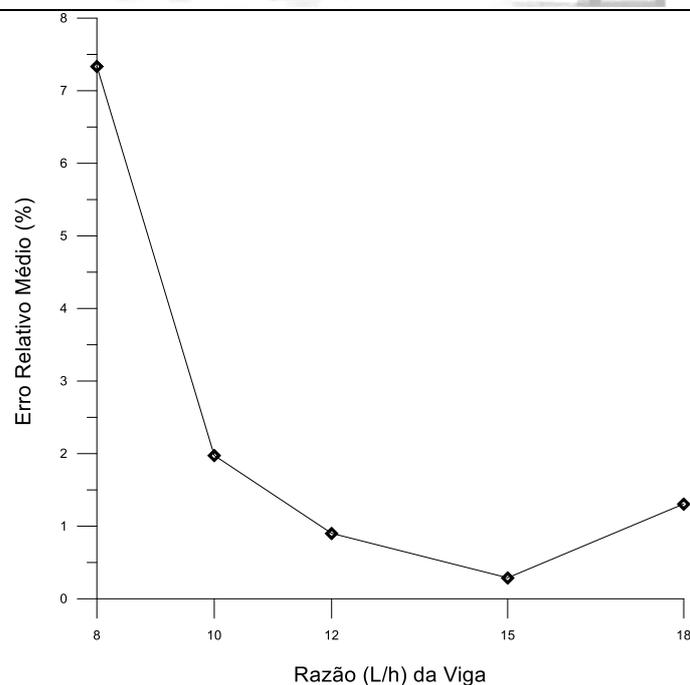


Figura 5. Erro Médio do Campo de Deslocamento - Análise Paramétrica
Fonte: Acervo Pessoal

Agora, em uma outra perspectiva, mais quantitativa da análise é possível perceber que para razões (L/h) a partir de 15, o erro é cada vez mais, à medida que a esbelteza é reduzida. Esta observação está de acordo com as previsões teóricas, uma vez que os resultados dos dois modelos divergem pelas previsões dos efeitos de cisalhamento. Portanto, a concordância entre as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko dá-se uma faixa de razões (L/h). Intrigante o fato de que, a simulação para (L/h) com valor de 18 tenha gerado erro médio maior que para 15. Este comportamento inspira uma hipótese de que as estruturas matemáticas dos modelos testados também são sensíveis a este parâmetro também na direção de seu aumento, por outros motivos físicos ou matemáticos, entretanto, este comportamento não é o foco do artigo e não aqui explorado com mais profundidade.

Por fim, a completude da análise paramétrica pode ser dada pela apresentação de mais um formato de resultado. Apesar do comportamento médio do erro ser conhecido, na Figura 5, não se sabe ainda exatamente como este está distribuído ao longo da viga. Esta demanda é importante, pois, espera-se que os efeitos cisalhantes comecem a se pronunciar no sentido dos apoios para o centro da viga, com embasamento direto nos diagramas de esforços internos da viga da Figura 1. Neste intuito, apresenta-se na figura 6, as distribuições de erros para as mesmas razões (L/h) da Figura 4.

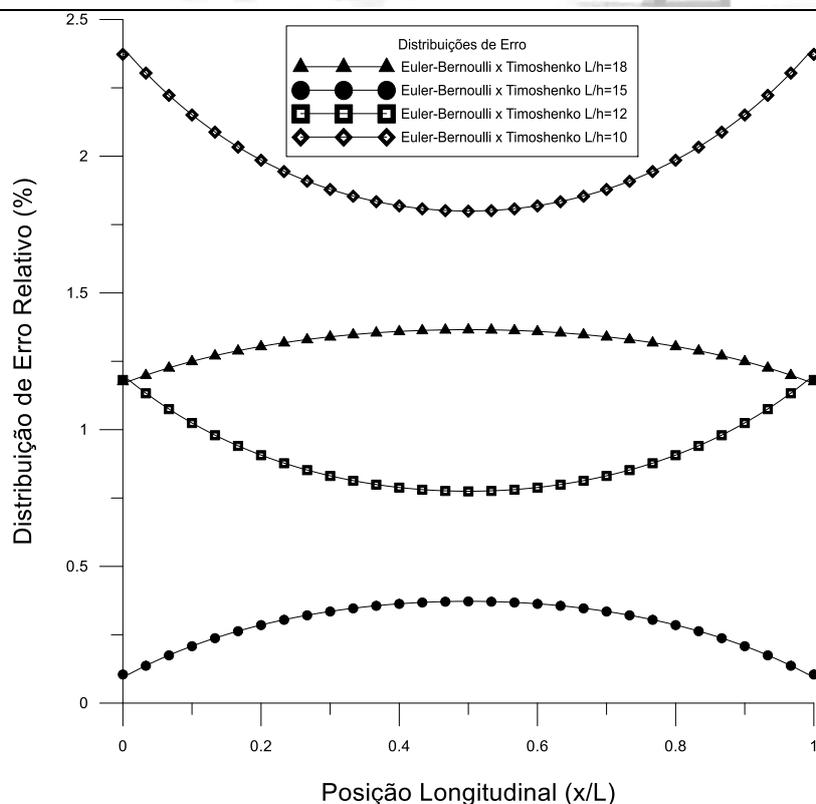


Figura 6. Distribuição Longitudinal de Erro- Análise Paramétrica
 Fonte: Acervo Pessoal

Uma análise cuidadosa dos resultados da Figura 6, pode ser feita dividindo a mesma em duas etapas. Na primeira, observa-se apenas as vigas mais esbeltas com L/h de 18 e 15. Para estas duas simulações as distribuições de erro são tais que, as maiores discrepâncias entre as duas teorias se pronuncia na região central da viga. Uma hipótese para este comportamento é a diferença no conceito de rotação total das duas teorias, o que pode gerar uma maior diferença entre as mesmas quando a tentativa é descrever pontos que orbitam próximos da inclinação nula, como é o caso do meio vão nessa análise. Numa segunda etapa, é possível olhar para as vigas menos esbeltas com L/h de 10 e 12 e perceber uma inversão na concavidade da curva de distribuição de erro.

Atribui-se esta inversão ao crescimento dos efeitos de cisalhamento, cujo valor do esforço interno é mais pronunciado próximo as extremidades. Assim, a medida que a viga é encurtada os erros passam a serem maiores nas extremidades e menores no centro, devido à importância crescente das tensões cisalhantes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No tocante a comparação numérica efetuada entre os modelos, o método de diferenças finitas apresenta, baixos níveis de erros médios e apresentando-se como boa ferramenta para geração de resultados. A percepção do efeito da complexidade do modelo no tocante a convergência,



fica muito clara no teste de malha, onde tem-se o modelo de Euler-Bernoulli com convergência mais dinâmica em detrimento ao modelo de Timoshenko, cuja natureza é de dois graus de liberdade.

Os resultados gerados para tensões flexurais foram praticamente análogos em todas as teorias na seção transversal crítica testada. Tal resultado indica que o modelo elástico proveniente do tensor de Airy diverge apenas por prever tensões residuais pequenas perto dos apoios, em comparativo as teorias unidimensionais. Em termos de aplicação em engenharia, estes valores podem ser desprezados, exceto em casos muito específicos.

Por fim, em relação aos deslocamentos as teorias unidimensionais de Euler-Bernoulli e Timoshenko apresentam grande concordância para vigas longas. Ao diminuir gradativamente o vão, percebe-se a pronúncia dos efeitos cisalhantes, e os modelos conseqüentemente perdem aderência. Num contexto prático, pode-se inferir sobre o uso preferencial da teoria de Euler-Bernoulli, uma vez que, para casos de vigas esbeltas apresenta resultados suficientemente precisos e com baixo nível de complexidade correlato a seu modelo matemático.



REFERÊNCIAS

- Anderson, D., Tannehill, J. C., & Pletcher, R. H. 2016. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. CRC Press.
- Carrer, J. A. M., Mansur, W. J., Scuciato, R. F., & Fleischfresser, S. A. 2012. Analysis os Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams by Boundary Element Method. *Blucher Mechanical Engineering Proceedings*, 1(1), 2333-2349.
- Cowper, G. R. 1966. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of applied mechanics*, 33(2), 335-340.
- Faccio Júnior, C. J. 2017. Modeling wind turbine blades by geometrically-exact beam and shell elements: a comparative approach. Master's Dissertation, Universidade de São Paulo.
- Feodosiev, V. I. 1980. Resistência dos Materiais, Ed. MIR, Moscou.
- Fleischfresser, S. A. 2012. Uma formulação do Método dos Elementos de contorno para a análise de vigas de Timoshenko. Tese de Doutorado, UFTPR.
- Fortuna, A.D.O 2000. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Edusp.
- Han, S. M., Benaroya, H., & Wei, T. 1999. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5), 935-988.
- Hutchinson, J. R. 1981. Transverse vibrations of beams, exact versus approximate solutions. *Journal of Applied Mechanics*, 48(4), 923-928.
- Love, A. E. H. 2013. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge university press.
- Maliska, C. R. 2017. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Grupo Gen-LTC.
- Neves, N. S., Souza, R. M., & Pinheiro, V. P. 2018. A importância dos modelos teóricos e técnicas numéricas na construção de um elo com a prática da engenharia estrutural. *Revista Eixo*, 7(1), 26-35.
- Orlande, H. R., Özişik, M. N., Colaço, M. J., & Cotta, R. M. 2017. Finite difference methods in heat transfer. CRC Press.
- Pinheiro, V. P., Loeffler, C. F., Neves, N. S., & Rodrigues, R. S. 2016. Impacto do uso da dinâmica de fluidos computacional no processo ensino-aprendizagem aplicado à fenômenos de transporte. *Blucher Physics Proceedings*, 3(1), 99-104.
- Popov, E. P. 1978. *Introdução à mecânica dos sólidos*. Edgard Blucher.
- Rao, S. S. 2017. *Mechanical Vibrations*. Pearson Higher Ed.
- Sokolnikoff, I.S. 1956. *Mathematical theory of elasticity*. McGraw-Hill Book Company.
- Timoshenko, S. P., Goodier, J. N. 1980. Teoria da elasticidade, 3ª Edição.
- Timoshenko, S. 1966. *Resistência dos materiais*. Ao livro técnico.



Timoshenko, S. P. 1921. LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245), 744-746.

Weaver, W., Timoshenko, S.P., & Young, D.H. (1990). *Vibration problems in engineering*. John Wiley & Sons.