



**ANÁLISE TERMOELÁSTICA DE PLACAS DE REISSNER VIA MÉTODO
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**THERMOELASTIC ANALYSIS OF REISSNER'S PLATES BY THE
BOUNDARY ELEMENT METHOD**

Arthur Leandro de Azevedo Silva (1), (P);
José Claudio de Faria Telles (2);
José Antonio Fontes Santiago(3);

- (1) Engenheiro Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, Brasil.
(2) Dr. Prof., Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, Brasil.
(3) Dr. Prof., Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, Brasil.
Email para Correspondência: arthur.silva@coc.ufrj.br;
(P) Apresentador.

Resumo: Apresenta-se neste trabalho uma formulação do método dos elementos de contorno (MEC) para placas espessas solicitadas ao carregamento térmico. O comportamento termoelástico foi modelado de maneira semi-acoplada, assim, a variação térmica tem influência no comportamento mecânico do sólido, mas suas deformações não influenciam no campo de temperaturas. A variação de temperatura na seção média do elemento de placa resultará em esforços e deformações axiais estimados através da teoria da elasticidade para chapas em estado plano de tensões (EPT). O gradiente térmico entre as faces superior e inferior do elemento de placa resultará em esforços e deformações estimados através da teoria de Reissner (1945) para placas espessas. Na implementação numérica utilizada, o sistema de integrais é formado por integrais de contorno de elementos quadráticos e integrais de domínio de células triangulares lineares para o acoplamento do campo de temperaturas com base na formulação de deformações iniciais. Dois estudos de caso são apresentados como forma de validar analiticamente os resultados obtidos e demonstrar a aplicabilidade desta formulação em problemas presentes no âmbito da engenharia civil.

Palavras chaves: Termoelasticidade; Método dos elementos de contorno; Teoria de Reissner;

Abstract: This paper presents a boundary element formulation (BEM) for the thermoelastic analysis of shear deformable plates. The elastic and thermal behaviour were considered uncoupled in the analysis, this way, the thermal variation acts in the mechanical behaviour, while the stress and strains distribution have no influence in the temperature field. Temperature change at the plate's middle surface results in axial stresses and strains that are estimated through the theory of elasticity applied to membrane elements in plane stress distribution. Thermal gradient through the plate's section (from top to bottom surface) results in stresses and strains that are estimated through Reissner's (1945) theory for shear deformable



plates. In the numerical implementation used, the integration system is composed by the integration of boundary quadratic elements and triangular linear cells in the domain for the coupling of the temperature fields using the initial strain formulation. Results are presented through three examples for analytical validation and to demonstrate the program's applicability in the scope of civil engineering.

Keywords: Thermoelasticity; Boundary element method; Reissner;

1 INTRODUÇÃO

A primeira formulação direta do MEC para análises com base na teoria de Reissner foi proposta por Van der Weeën (1982). Karam (1986) avançou na formulação para a consideração de domínios infinitos e ao apontar a adequação do método tanto para placas finas como espessas. Após esses trabalhos, diversos autores deram continuidade ao estudo de placas espessas via MEC: A consideração da não-linearidade geométrica por Xiao-Yan (1990), a análise da não-linearidade física por Karam e Telles (1992), a análise de placas apoiadas em fundação elástica por Fadhil e Zafrany (1994) e o acoplamento da curvatura inicial com o comportamento de chapa em EPT por Wen e Aliabadi (2000) .

Deformações e tensões oriundas de variações térmicas podem ser estimadas de maneira análoga à consideração da não-linearidade física via MEC para elementos de chapa em EPT e elementos de placas espessas, ou seja, através da formulação de deformações iniciais e células internas para integrais de domínio. Assim, apresenta-se neste trabalho uma revisão bibliográfica da aplicação do MEC em equações diferenciais referentes à teoria de potencial em estado estacionário, a teoria da elasticidade para elementos tipo chapa e a teoria de Reissner para elementos de placas espessas. Em sequência, é feito o acoplamento do comportamento elástico e térmico de um sólido com base na formulação de deformações iniciais através da discretização e integração do domínio em células triangulares de ordem linear.

Foram adotados procedimentos alternativos para as situações de singularidade que existem ao longo da formulação do MEC. Para isso, foi utilizado o princípio do deslocamento de corpo rígido (translação e rotação), a transformação de base polinomial de terceira ordem apresentada por Telles e Oliveira (1993) e a integração numérica em partes finitas pela quadratura de Kutt (1975).

Para validar a formulação utilizada, são apresentados 3 estudos de caso: 2 comparando a formulação com modelos analíticos e 1 comparando-a com um modelo via método dos elementos finitos (Abaqus/CAE).

A notação indicial será utilizada ao longo dos próximos tópicos, onde os coeficientes em letras gregas variarão de 1 até 2 e os em letras romanas de 1 até 3.

2 EQUAÇÕES RELEVANTES

2.1 Teoria de potencial térmico

A teoria de potencial térmico é utilizada neste trabalho para traçar campos de temperaturas que serão inseridos como variáveis de entrada na análise termoelástica. A Equação (1) rege a teoria de potencial térmico em estado estacionário. Através do teorema do divergente, essa equação forma um sistema linear de integrais, conforme apresentado na Eq. (2), a qual é composta pelas soluções fundamentais da Eq. (3) para uma variação de temperatura pontual e da Eq. (4) para um fluxo de calor pontual.

$$\theta_{,ii} = 0 \quad (1)$$

$$C(\xi)\theta(\xi) + \int_{\Gamma} q^*(\xi, x)\theta(x)d\Gamma = \int_{\Gamma} \theta^*(\xi, x)q(x)d\Gamma \quad (2)$$

$$\theta^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi k} \ln \frac{1}{r} \quad (3)$$

$$q^*(\xi, x) = \frac{r_{,i}n_{,i}}{2\pi r} \quad (4)$$

2.2 Teoria da elasticidade

A teoria da elasticidade representa o comportamento de um sólido quando solicitado por forças de superfície e de volume. Embora sua dedução seja voltada para sólidos tridimensionais, a eliminação de graus de liberdade que apresentam variação desprezível permite sua simplificação para modelos bidimensionais e unidimensionais. A equação diferencial que rege a teoria da elasticidade é a equação de Navier, Eq. (5), a qual é deduzida pela combinação de equações de equilíbrio, relações constitutivas, equações de compatibilidade e do tensor de Cauchy.

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (5)$$

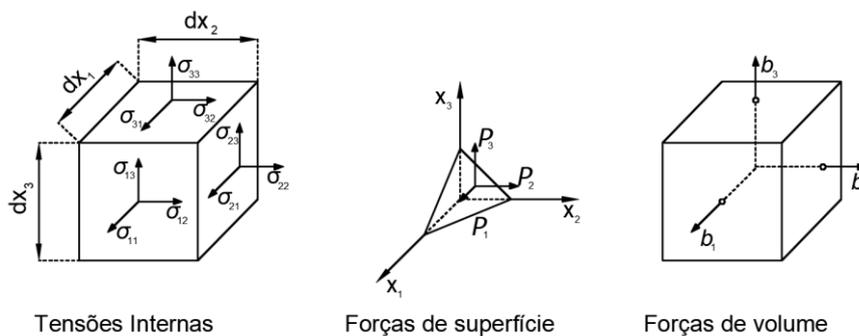


Figura 1. Tensões internas, forças de superfície e forças de volume.

2.2.1 Estado plano de tensões

No estado plano de tensões as componentes normais e cisalhantes σ_{13} , σ_{23} e σ_{33} (Figura 1) são consideradas nulas. Com isso, o número de graus de liberdade reduzido à duas componentes de deslocamentos e forças (u_α e p_α). Através da manipulação da identidade de Somigliana, Eq. (6), e aplicação do teorema do divergente, obtém-se para o elemento de chapa o sistema linear apresentado na Eq. (7).

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{jk} \sigma_{jk}^* d\Omega \quad (6)$$

$$C_i(\xi)u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x)b_j(x)d\Omega \quad (7)$$

Como forma de tornar a leitura deste artigo menos exaustiva, as soluções fundamentais utilizadas na formulação do MEC para chapas em EPT não serão apresentadas neste texto, podendo ser consultadas em Telles (1983).

2.2.2 Teoria de Reissner para placas espessas

O modelo de placa utilizado na teoria de Reissner trata um sólido tridimensional como um elemento planar na altura média de sua espessura, conforme ilustra a Figura 2.

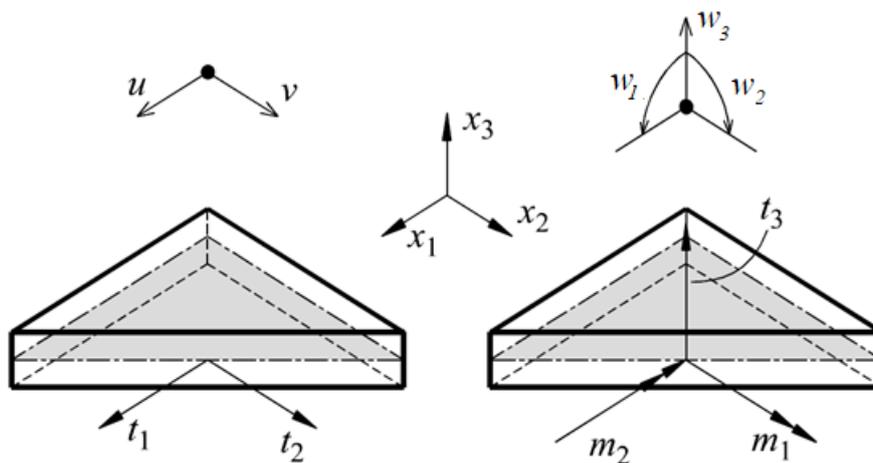


Figura 2. Graus de liberdade elemento de placa.

Fonte: (Aliabadi, 2002).

Dessa forma, as tensões que atuam nas faces deste sólido são condensadas em esforços de momento fletor e esforço cortante, conforme as integrais da Eq. (8) e Eq. (9):

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (8)$$

$$Q_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (9)$$

Assim, as equações de equilíbrio serão expressas em função desses esforços, conforme a Eq. (10) e a Eq. (11):

$$Q_{\alpha, \alpha} + q = 0 \quad (10)$$

$$M_{\alpha \beta, \beta} + Q_{\alpha} = 0 \quad (11)$$

As deformações específicas cisalhantes e de flexão podem ser expressas conforme a Eq. (12) e a Eq. (13), respectivamente:

$$\psi_{\alpha} = w_{\alpha} + w_{3, \alpha} \quad (12)$$

$$\chi_{\alpha \beta} = \frac{(w_{\alpha, \beta} + w_{\beta, \alpha})}{2} \quad (13)$$

A relação esforço-deformação é definida conforme a Eq. (14) para esforços cisalhantes e conforme a Eq. (15) para esforços de momento fletor:

$$Q_{\alpha} = C \psi_{\alpha} \quad (14)$$

$$M_{\alpha \beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(2\chi_{\alpha \beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} 2\chi_{\gamma \gamma} \delta_{\alpha \beta} \right) \quad (15)$$

Onde

“D” é a rigidez a flexão: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

“C” é a rigidez ao cisalhamento: $C = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}$

“λ” é o fator de cisalhamento: $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$

Através da combinação e diferenciação das equações citadas anteriormente, obtém-se o sistema de equações de Reissner:

$$Q_{\alpha} - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_{\alpha} + \frac{1}{\lambda^2(1-\nu)} q_{, \alpha} = -D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial x_{\alpha}} \quad (16)$$

$$D \nabla^4 w + \frac{(2-\nu)}{\lambda^2(1-\nu)} \nabla^2 q = q \quad (17)$$

Para que a formulação do método dos elementos de contorno seja obtida, o Segundo Teorema de Betti, Eq. (18), deve ser manipulado com base no teorema da divergência e nas equações apresentadas anteriormente.

$$\int_{\Omega} F_j^*(\xi, x) u_j(x) d\Omega + \int_{\Gamma} p_j^*(\xi, x) w_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} w_j^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma + \int_{\Omega} \left[w_3^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} w_{\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega \quad (18)$$

Após a manipulação do segundo teorema de Betti com o uso de cargas de campo pontuais, obtêm-se três equações, as quais compõe o sistema linear da formulação de placa de Reissner via método dos elementos de contorno.

$$C_i(\xi) w_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) w_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} w_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma + \int_{\Omega} \left[w_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} w_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega \quad (19)$$

Como forma de tornar a leitura deste artigo menos exaustiva, as soluções fundamentais utilizadas na formulação do MEC de placas espessas não serão apresentadas neste texto, podendo ser consultadas em Karam (1992).

2.3 Termoelasticidade

A variação de temperatura ao longo de um sólido tem como consequência a sua variação de volume. Em situações onde existe elevado gradiente térmico ou condições de contorno que restringem essa variação volumétrica, surgem tensões de natureza termoelástica. A quantificação dessas tensões tem relevância para a análise de estruturas como turbinas aeronáuticas, motores de combustão interna, discos de freio, usinas nucleares, estruturas metálicas em situações de incêndio, fadiga em sólidos submetidos a grandes variações climáticas, etc.

A teoria da elasticidade expressa os efeitos da variação de temperatura nos campos de deformações e tensões ao longo de um sólido tridimensional através da Eq. (20) e Eq. (21):

$$\varepsilon_{ij}^T = \frac{\alpha}{1 + \bar{\nu}} \theta \delta_{ij} \quad (20)$$

$$\sigma_{ij}^T = -\frac{2G(1 + \bar{\nu})}{1 - 2\bar{\nu}} \varepsilon_{ij}^T \quad (21)$$

Onde

α é o coeficiente linear de dilatação térmica;

$\bar{\nu}$ é o coeficiente de Poisson modificado para a teoria de ETP ($\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$);

δ_{ij} é o delta de Kronecker;

θ é a variação de temperatura e

G é o módulo de elasticidade transversal.

2.3.1 Formulação de tensões e deformações iniciais

A variação de temperatura será inserida na implementação numérica do MEC através da formulação de deformações iniciais, conforme as equações:

$$\sigma_{ij}^{Total} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^T \quad (22)$$

$$\varepsilon_{ij}^{Total} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T \quad (23)$$

Nestas equações, os campos totais de tensão e deformação ao longo de um sólido são estimados através da superposição do comportamento elástico do material (σ^e e ε^e) com o comportamento térmico (σ^T e ε^T).

2.3.2 Esforços gerados por cargas térmicas

Conforme apresentado nas Eq. (20) e Eq. (21), a variação de temperatura resultará em incrementos de tensão e deformação nas direções normais às faces de um sólido. Quando a distribuição de temperatura varia ao longo da espessura em placas, é acrescida uma curvatura de origem térmica, o que resultará em esforços de flexão e torção. Como forma de facilitar a implementação das rotinas do efeito de chapa e placa, o carregamento térmico foi dividido em duas parcelas, conforme Figura 3. A primeira parcela representa uma variação de temperatura ao longo da espessura média do elemento de placa, tendo efeitos estimados pela rotina de chapa em ETP. A segunda parcela representa uma variação de temperatura ao longo dos bordos inferior e superior, tendo efeitos estimados pela rotina de placa espessa de Reissner.

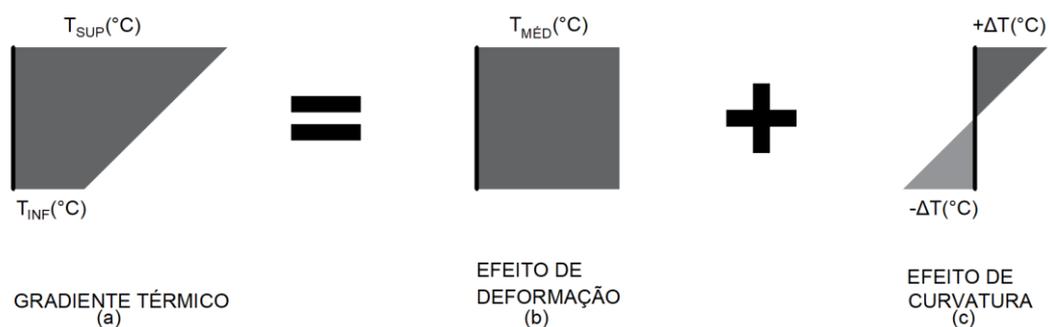


Figura 3. Esforços gerados por gradientes térmicos ao longo da espessura.

3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

3.1 MEC para o elemento de chapa em estado plano de tensões

A Figura 4 apresenta um fluxograma para a rotina de processamento do MEC aplicado a teoria de elementos de chapa em ETP. Na formação do sistema linear “[H]{U} = [G]{P}” utiliza-se nas situações de singularidade o princípio do deslocamento do corpo rígido para a formação da matriz “H” e a transformação de base polinomial para a formação da matriz “G”. No cálculo das tensões no contorno é adotado um procedimento análogo ao utilizado no método dos elementos finitos, em que a função de forma do elemento de contorno quadrático é derivada e suas tensões são calculadas com base na relação deslocamento-deformação.

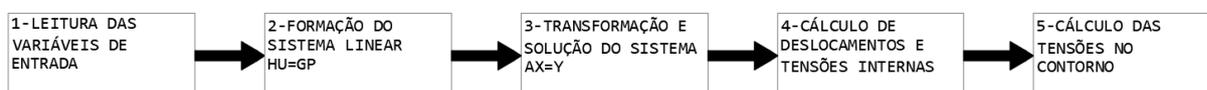


Figura 4. Fluxograma para rotina do elemento de chapa em ETP.

3.2 MEC para o elemento de placa espessa, conforme teoria de Reissner

De maneira análoga ao tópico anterior, a Figura 5 apresenta um fluxograma para a rotina de processamento do MEC aplicado a teoria de placas espessas. Assim como na rotina para ETP, as situações de singularidade são estimadas através do princípio do deslocamento de corpo rígido (translação e rotação) para a diagonal da matriz “H” e através da transformação de base polinomial para a diagonal da matriz “G”.

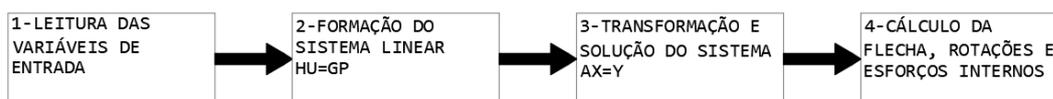


Figura 5. Fluxograma para rotina do elemento de placa espessa.

3.3 MEC para o acoplamento da carga térmica ao modelo elástico

O carregamento térmico é inserido na formulação do MEC na forma de um vetor “B” composto por integrais de domínio. Em situações de estado estacionário de temperaturas, essas integrais de domínio podem ser transformadas em integrais de contorno através do uso do vetor de Galerkin, como apresentado em Brebbia, Telles (1983). Em situações de variação de temperatura em estado transiente, podem ser utilizadas células internas para discretização e integração dos carregamentos ao longo do domínio. As Equações (24) e (25) apresentam os vetores a serem acoplados na etapa de formação do sistema linear “[H]{U} = [G]{P}” e de cálculo de deslocamentos, reações e tensões na rotina do elemento de chapa.

$$B_{\alpha} = 2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha \int_{\Omega} u_{\alpha\beta,\beta}^* T(x, y) d\Omega \quad (24)$$

$$B'_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^* \varepsilon_{\gamma\theta}^T d\Omega + f_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\gamma\theta}^T) \quad (25)$$

Para evitar singularidades nas situações em que o ponto fonte coincide com pontos das células internas, utilizou-se a transformação de coordenada polar, conforme apresentado em Karam (1992). Assim, as integrais de domínio são calculadas de forma analítica em função do raio e de forma numérica, pela quadratura de Gauss, em função do ângulo.

As Equações (26) e (27) apresentam os vetores a serem acoplados, de maneira análoga ao procedimento anterior, na etapa de formação do sistema linear “[H]{U} = [G]{P}” e de cálculo de deslocamentos, rotações e esforços internos da rotina do elemento de placa espessa.

$$B_i = \int_{\Omega} \chi_{\alpha\beta i}^* \cdot M_{\alpha\beta}^T d\Omega \quad (26)$$

$$B_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^* \cdot M_{\gamma\theta}^T d\Omega + f(M_{\alpha\beta}^T) \quad (27)$$

Além do uso da transformação de coordenada polar, conforme adotada no procedimento anterior, a solução fundamental “ $\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^*$ ” possui singularidade na forma $\frac{1}{r} \varphi(r, \phi)$. Isso tornou necessário a integração numérica da parte real através da quadratura de Kutt na integração em função do raio e através da quadratura de Gauss quando em função do ângulo. A Figura 6 apresenta o fluxograma da sub-rotina utilizada para o cálculo dos vetores B e B' .

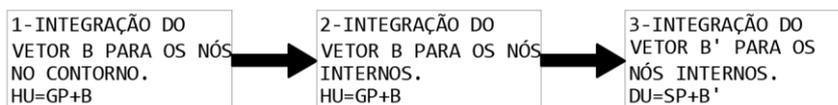


Figura 6. Fluxograma para a sub-rotina de carregamentos térmicos.

4 ESTUDOS DE CASO

Como forma de validar e demonstrar a aplicabilidade da formulação apresentada, são analisados 3 estudos de caso em que o carregamento térmico tem influência no campo de deformações e esforços de um elemento de placa espessa. Em todos os casos, foram adotadas as propriedades físicas e geométricas expressas na tabela 01.

Tabela 1. Propriedades físicas e geométricas dos modelos analisados.

Variáveis	Módulo	Unidade
Mód. de elasticidade	200	GPa
Coef. de Poisson	0,3	u
Coef. de dilatação linear	1,00E-05	°C ⁻¹
Comprimento Lx	1,0	m
Comprimento Ly	1,0	m

4.1 Comparação ao modelo analítico de chapa confinada sob variação constante de temperatura.

O modelo apresentado na Figura 7 pode ser validado analiticamente devido a sua simetria e variação de temperatura constante. Nessa situação de condições de contorno e carregamento térmico, as tensões de cisalhamento e deslocamentos na direção vertical serão nulos, possuindo como valores a serem determinados as tensões na direção do confinamento e deslocamento na direção do bordo livre, ou seja, σ_{22} e U_1 .

$$\sigma_{22}^{analítico} = \alpha \cdot T_{const} \cdot E \quad (28)$$

$$U_1^{analítico} = \alpha \cdot T_{const} \cdot L_x \cdot (1 + \nu) \quad (29)$$

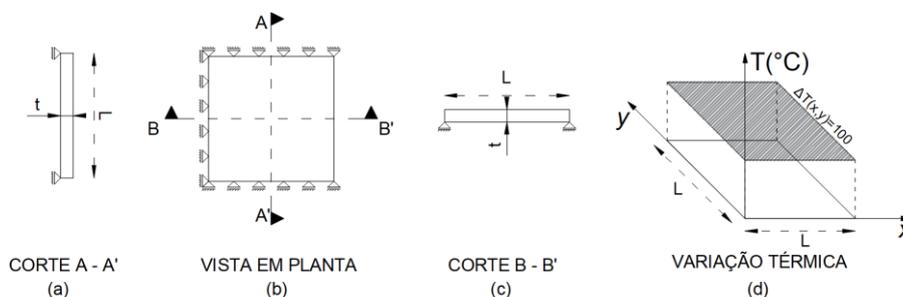


Figura 7. Chapa confinada sob variação constante de temperatura.

4.2 Comparação ao modelo analítico de chapa confinada sob fluxo de calor constante.

O modelo apresentado na Figura 8 também pode ser validado analiticamente. Novamente, serão nulos os valores das tensões de cisalhamento e dos deslocamentos na direção vertical, possuindo como valores a serem determinados as tensões na direção do confinamento e deslocamento na direção do bordo livre, ou seja, σ_{22} e U_1 .

$$\sigma_{22}^{analítico} = \alpha \cdot T(x, y) \cdot E \quad (30)$$

$$U_1^{analítico} = \alpha \cdot (1 + \nu) \cdot \int_0^{L_x} T(x, y) \cdot dx \quad (31)$$

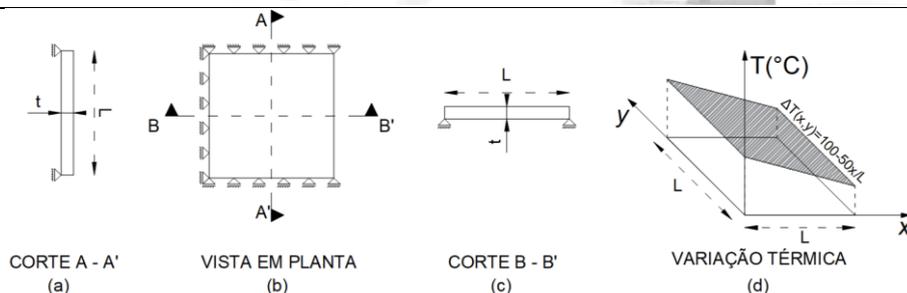


Figura 8. Chapa confinada sob fluxo de calor constante.

4.3 Comparação ao modelo termoelástico de placa via MEF

O último modelo (Figura 9) estima o comportamento de placa solicitada à uma carga térmica que alterará sua curvatura, não sendo de fácil modelagem analítica. Assim, os resultados da formulação via método dos elementos de contorno serão comparados com um modelo de placa via método dos elementos finitos (Abaqus/CAE). Adotou-se um gradiente térmico no valor de 100°C ao longo da espessura ($t = 0,20\text{m}$) em todo o domínio da placa.

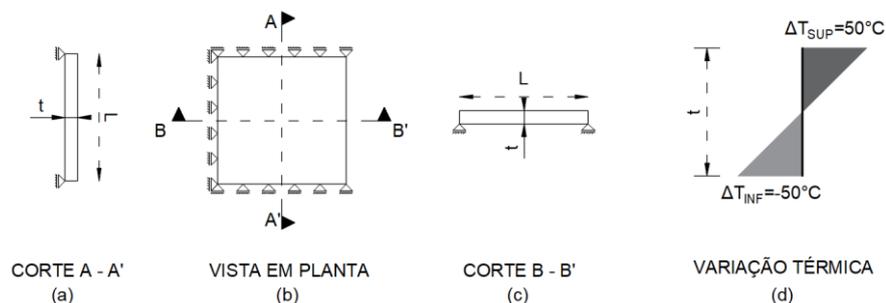


Figura 9. Placa engastada em duas faces opostas sob variação de temperatura ao longo da espessura.

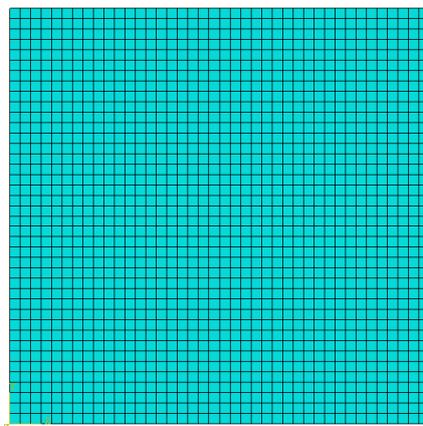


Figura 10. Malha discretizada para elemento de placa via MEF (1600 elementos quadráticos).

5 RESULTADOS E CONCLUSÕES

As figuras 11 e 12 apresentam os resultados da formulação via método dos elementos de contorno para os casos de estudo 01 e 02, respectivamente. É notável a característica do método em obter resultados coincidentes com a solução analítica predominantemente em pontos internos, mas existindo erros de baixo percentual nas células que possuem pontos no contorno. Isso se deve à etapa de diferenciação da função de forma no elemento quadrático para a obtenção dos valores de tensões no contorno.

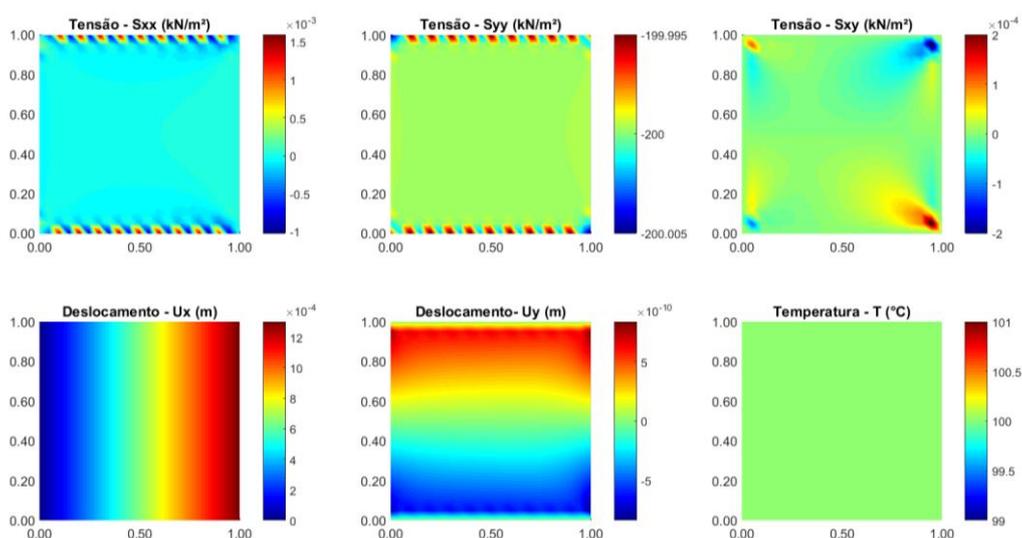


Figura 11. Campos de tensões, deslocamentos e temperaturas para o estudo de caso 01.

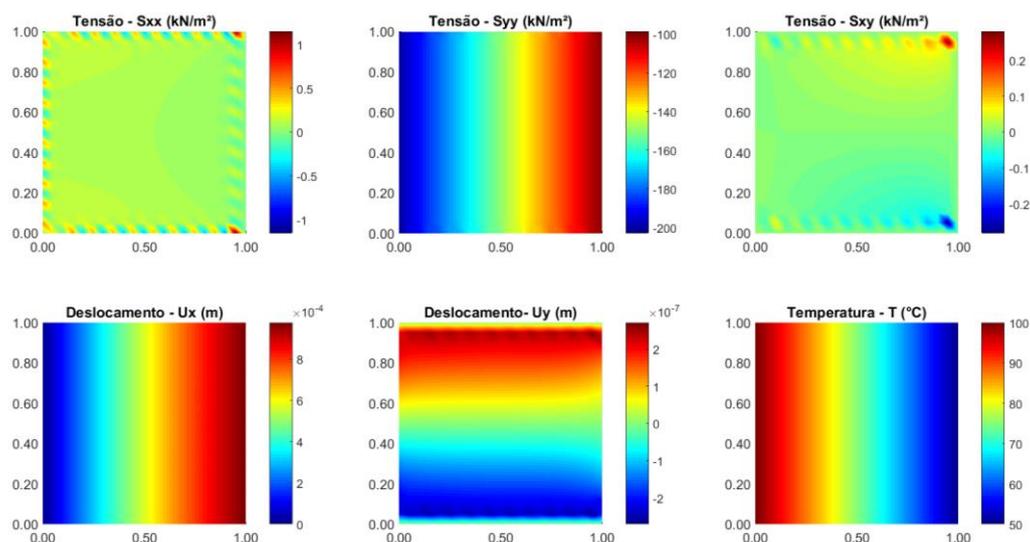


Figura 12. Campos de tensões, deslocamentos e temperaturas para o estudo de caso 02.

As tabelas 2 e 3 corroboram para a afirmação de que a modelagem numérica convergiu para valores aceitáveis e, devido a isso, a formulação poderá ser aplicada em modelos de geometria e condições de contorno mais complexas que fogem do escopo da solução analítica.

Tabela 2. Comparação entre modelos analítico e numérico no caso 01.

Modelo	Valores máximos				
	S11(kN/m ²)	S22(kN/m ²)	S12(kN/m ²)	U1(mm)	U2(mm)
Analítico	0,00E+00	-2,00E+02	0,00E+00	1,30E+00	0,00E+00
Numérico - MEC	1,60E-03	-2,00E+02	2,00E-04	1,30E+00	0,00E+00
Erro	1,60E-03	5,20E-03	2,00E-04	0,00E+00	0,00E+00

Tabela 3. Comparação entre modelos analítico e numérico no caso 01.

Modelo	Valores máximos				
	S11(kN/m ²)	S22(kN/m ²)	S12(kN/m ²)	U1(mm)	U2(mm)
Analítico	0,00E+00	2,00E+02	0,00E+00	9,75E-01	0,00E+00
Numérico - MEC	-1,15E+00	-2,03E+02	2,80E-01	1,00E+00	1,00E-06
Erro	1,15E+00	4,03E+02	2,80E-01	2,50E-02	1,00E-06

A Figura 11 compara resultados obtidos via formulação do método dos elementos de contorno e via método dos elementos finitos (Abaqus/CAE) para os campos de distribuição de momentos fletores e flecha. Embora também sejam variáveis de saída na análise os valores de rotação, esforços de momento volvente e esforço cortante, esses valores não foram representados abaixo por apresentarem campos de distribuição quase nulos.

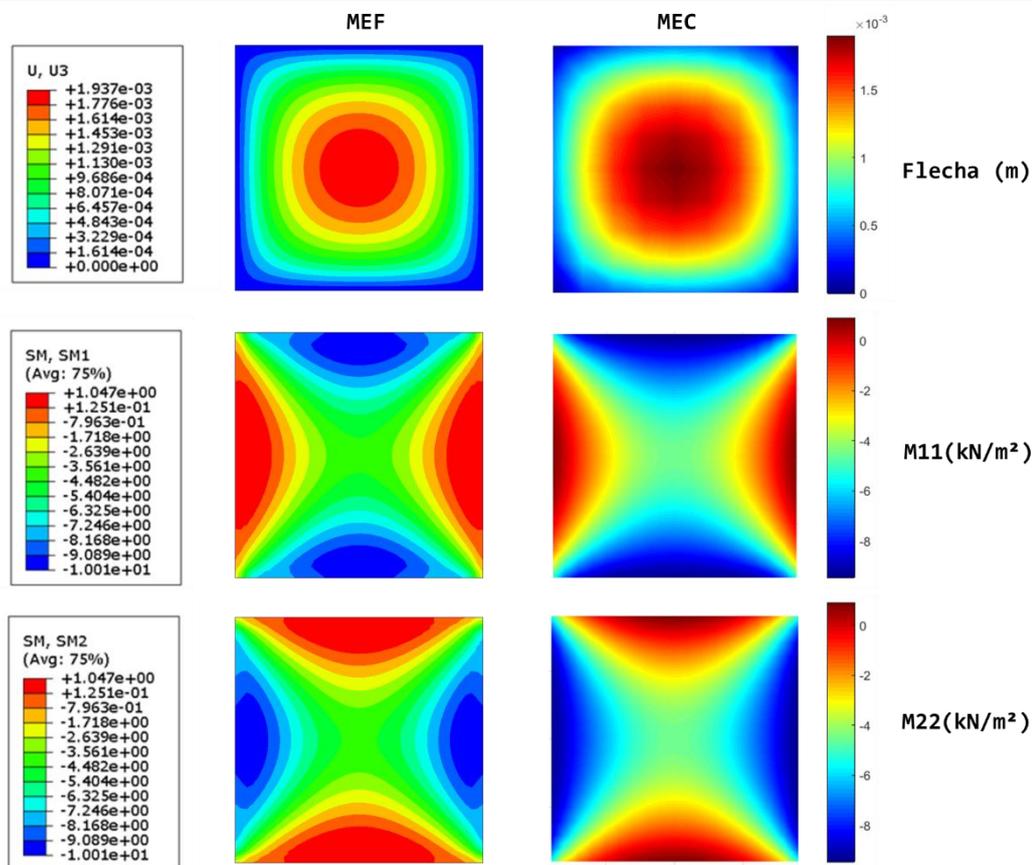


Figura 13.Campos de deslocamento e momentos fletores para o estudo de caso 03.

Através dos resultados abordados em cada estudo de caso, pode-se concluir que a formulação utilizada, via método dos elementos de contorno, apresentou boa capacidade de estimativa de tensões, deslocamentos e esforços numa análise termoelástica de elementos tipo placa espessa sob diferentes tipos de variação de temperatura. Cabe como sugestão para trabalhos futuros a consideração do acoplamento da curvatura do elemento de placa aos esforços de compressão presentes no elemento de chapa. Isso é interessante para a consideração de efeitos de não-linearidade geométrica, principalmente, para situações onde o comportamento mecânico da estrutura se distancia da consideração de pequenas deformações presente na teoria da elasticidade.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Pesquisa – CNPq e ao Programa de Engenharia Civil – PEC da COPPE/UFRJ pelo apoio que tornou possível a realização dos trabalhos de pesquisa cujos resultados subsidiaram a elaboração deste artigo.



7 REFERÊNCIAS

- Beskos, D. E., Boundary Element Analysis of Plates and Shells, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- Fadhil, A. S. and El-Zafrany, A., Boundary element analysis of thick Reissner plates on two-parameter foundation, International Journal of Solids and Structures, 1994.
- Karam, V. J., Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1986.
- Karam, V. J. and Telles, J. C. F. The BEM Applied to Plate Bending Elastoplastic Analysis Using Reissner's Theory. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1992.
- Kirchhoff, G., Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, J. Math., Crelle, 1850.
- Kutt, H. R., Quadrature formulae for finite part integrals, Report Wisk 178, The National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria, 1975.
- Lu P, Huang M. Boundary element analysis of shallow shells involving shear deformation. International Journal of Solids and Structures, 1992
- Reissner, E., The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, J. Appl. Mech., 1945.
- Telles, J. C. F., The boundary element method applied to inelastic problems, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- Van der Weeën, F., Application of the Direct Boundary Elements in Engineering (C. A. Brebbia, Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- Wen, P. H., Aliabadi, M. H. and Young, A.; Plane Stress and Plate Bending Coupling in BEM Analysis of Shallow Shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000.
- Xiao-Yan, L, Mao-Kuang, H and Xiuxi, W., Geometrically nonlinear analysis of a Reissner type plate by the boundary element method, Computes and Structures, 1990.