



## **SOBRE O EMPREGO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE FLAT-TOP NO MEFG**

### **On the employment of flat-top partition of unity on GFEM**

Caio Silva Ramos (1); Sergio Persival Baroncini Proença (2)

(1) Mestrando, Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, Brasil.

Email para Correspondência: caio\_silva@usp.br; (P) Apresentador

(2) Dr. Prof., Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, Brasil.

**Resumo:** O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) propõe a expansão do espaço de aproximação do Método dos Elementos Finitos (MEF) mediante a inserção de funções (conhecidas como funções de enriquecimento) que melhor representem localmente o comportamento da solução procurada. Tais funções podem apresentar características específicas ou mesmo serem geradas numericamente. Entretanto, o aumento do espaço de aproximação de modo irrestrito pode introduzir dependências lineares no sistema de equações do MEFG, tornando a solução obtida imprecisa ou mesmo impedindo a solução do sistema por métodos diretos. A chamada versão estável do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFGE) explora uma modificação nas funções de enriquecimento com o objetivo de melhorar o condicionamento da matriz de rigidez. Contudo, tal modificação não se configura como condição suficiente para garantir uma redução efetiva do número de condição. Neste trabalho, considera-se uma nova modificação do espaço das funções de forma do MEFG associadas ao enriquecimento: trata-se do emprego de funções do tipo *flat-top* como Partição da Unidade (PU) empregadas exclusivamente na construção das funções de forma enriquecidas (são definidas PUs para elementos finitos quadriláteros e triangulares). Por meio de um exemplo numérico que evidencia as vantagens do MEFG em relação ao MEF convencional, demonstra-se que a *flat-top* empregada como PU do espaço de enriquecimento preserva as excelentes propriedades de convergência do MEFG. Além disso, mostra-se que o condicionamento da matriz de rigidez associada é próximo, ou melhor, que o condicionamento apresentado pelo MEF (uma vez que o enriquecimento, mesmo polinomial, não gera dependências).

*Palavras chaves:* Método dos Elementos Finitos Generalizados, Método dos Elementos Finitos Generalizados Estáveis, Número de Condição, Partição da Unidade.

**Abstract:** The Generalized Finite Element Method (GFEM) proposes the expansion of the Finite Element Method (FEM) approximation space by inserting functions (known as enrichment functions) that best represent locally the behavior of the searched solution. Such functions may have specific characteristics or even be generated numerically. However, the unrestricted approach space increase can introduce linear dependencies in the system of equations of the GFEM, making the solution obtained imprecise or even preventing the solution of the system by direct



# XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018  
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



methods. The so-called stable version of the Generalized Finite Element Method (SGFEM) explores a modification in the enrichment functions in order to improve the conditioning of the stiffness matrix and, therefore, to reduce discretization errors. However, such modification is not a sufficient condition to ensure an effective reduction of the condition number. This work considers a new modification of the GFEM shape functions space associated with the enrichment: it uses flat-top functions as Partition of Unity (PU) exclusively in the construction of the enriched shape functions (PUs are defined for quadrilateral and triangular finite elements). By means of a numerical example that shows the advantages of the MEFG in relation to the conventional MEF, it is demonstrated that the flat-top employed as PU of the enrichment space preserves the excellent convergence properties of the GFEM. Moreover, it is shown that the conditioning of the associated stiffness matrix is closer to, or better than, the conditioning presented by FEM (since the enrichment, even polynomial, does not generate dependencies).

*Keywords: Generalized Finite Element Method, Stable Generalized Finite Element Method, Condition Number, Partition of Unity.*

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas duas décadas diversas pesquisas vêm demonstrando a eficácia do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na resolução de problemas com características localizadas. O principal conceito do MEFG consiste em incorporar no espaço de aproximação o conhecimento a priori do comportamento da solução, explorando a estrutura de Partição da Unidade (PU) das funções de forma do Método dos Elementos Finitos (MEF). Dessa forma, por exemplo, é possível representar uma descontinuidade forte dentro de um elemento finito a partir da inserção de funções descontínuas no espaço de aproximação desse elemento. Tais características propiciam uma melhoria significativa na precisão numérica em comparação ao MEF.

Entretanto, o aumento irrestrito do espaço de aproximação pode tornar o sistema de equações do MEFG linearmente dependente. Diversas pesquisas apontam o problema do mau condicionamento da matriz de rigidez obtida pelo MEFG. Babuška e Banerjee (2011, 2012) demonstram matematicamente, para malhas regulares com elementos de dimensão  $h$ , que o número de condição da matriz de rigidez cresce com  $\mathcal{O}(h^{-4})$  mesmo quando uma função não polinomial é usada como enriquecimento. Tal resultado é muito pior em comparação com o MEF onde o crescimento é da  $\mathcal{O}(h^{-2})$ . Esse entrave do MEFG pode, às vezes, representar um limitador importante, principalmente na solução de problemas não lineares, devido ao acúmulo de erros de arredondamento, e problemas de convergência em solucionadores lineares iterativos (Béchet et al., 2005; Fries; Belytschko, 2010). Diversos estudos propõem metodologias para a solução desta adversidade, por exemplo, Béchet et al. (2005), Laborde et al. (2005) e Menk e Bordas (2011), porém com sucesso limitado.

A desvantagem citada acima foi recentemente abordada por Babuška e Banerjee (2011, 2012), que propuseram uma modificação que minimiza esse problema. A versão do MEFG que incorpora essa modificação foi referida como Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE). Tal modificação restringe-se às funções de enriquecimento, a fim de criar um espaço de funções de forma enriquecidas que seja quase ortogonal ao espaço de aproxi-

mação do MEF. Essa abordagem mantém a flexibilidade do MEFGE de enriquecer o espaço de aproximação com quaisquer funções arbitrárias. Babuška e Banerjee (2011, 2012) demonstram matematicamente que o condicionamento da matriz de rigidez do MEFGE cresce com  $\mathcal{O}(h^{-2})$ , ou seja, da mesma ordem do MEF.

Investigando as propriedades do MEFGE, Zhang, Banerjee e Babuška (2014) demonstram que, para enriquecimentos com funções polinomiais de graus superiores ( $>2$ ), a modificação imposta às funções de enriquecimento não é condição suficiente para garantir um bom condicionamento do sistema resolvente. Sendo assim, uma segunda mudança a ser aplicada ao espaço de enriquecimento é proposta, e equivale à substituição das funções PU convencionais do MEF (*hat-functions*) pela PU *flat-top*. A partir de análises numéricas unidimensionais, Zhang, Banerjee e Babuška (2014) demonstram que a nova modificação garante independência linear local entre o espaço de aproximação do MEF e o espaço de enriquecimento. Tais autores, referem-se à essa nova versão do MEFGE como MEFGE de Alta Ordem devido as taxas superiores ( $>2$ ) de convergência obtidas.

Este trabalho insere-se no âmbito das investigações sobre novos desenvolvimentos para o MEFGE de Alta Ordem com aplicação em problemas bidimensionais. Em particular, destaca-se uma PU *flat-top* definida para elementos finitos triangulares. Além disso, apresentam-se análises numéricas que evidenciam a eficácia dos avanços propostos seja quanto à convergência do erro, seja quanto à estabilidade numérica.

## 2 PROBLEMA MODELO

Seja  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \in \mathbb{R}^2$  o domínio do Problema de Valor de Contorno (PVC), tal que o contorno  $\partial\Omega = \partial\Omega^\sigma \cup \partial\Omega^u$  e  $\partial\Omega^\sigma \cap \partial\Omega^u = \emptyset$ , onde sobre  $\partial\Omega^\sigma$  e  $\partial\Omega^u$  são definidas condições de Neumann e Dirichlet, respectivamente.

Na ausência de forças de volume, define-se a equação de equilíbrio para o problema como:

$$\nabla \cdot \sigma := 0 \text{ em } \Omega. \quad (1)$$

As relações constitutiva e de compatibilidade entre deformações e deslocamentos se escrevem, respectivamente, por:

$$\sigma := \mathfrak{C} : \varepsilon, \quad \varepsilon := \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T). \quad (2)$$

Na Eq. (2),  $\sigma$  é denotado de tensor de tensão de Cauchy,  $\mathfrak{C}$  é o tensor constitutivo de Hooke,  $\varepsilon$  é o tensor de pequenas deformações e  $u$  é o deslocamento. Define-se então condições de contorno sobre  $\partial\Omega$  como:

$$\bar{t} := n \cdot \sigma \text{ em } \partial\Omega^\sigma, \quad u := \bar{u} \text{ em } \partial\Omega^u, \quad (3)$$

tal que,  $n$  é o vetor normal unitário externo de  $\partial\Omega$ ,  $\bar{t}$  e  $\bar{u}$  são carregamentos e deslocamentos impostos, respectivamente. Mediante as Eq. (1) a (3) define-se a forma forte do PVC.

A formulação fraca do PVC reduz as exigências de continuidade da forma forte sobre as funções candidatas a solução, possibilitando assim a obtenção de soluções aproximadas (Pro-

ença, 2010). Nesse contexto, define-se a forma fraca mediante o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), como:

encontrar  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $u = \bar{u}$  em  $\partial\Omega^u$  para  $\forall v \in H^1(\Omega)$ ,  $v = 0$  em  $\partial\Omega^u$ , tal que

$$W_{int} = W_{ext}, \quad (4)$$

em que,  $u$  e  $v$  são funções ditas, respectivamente, de tentativa e teste e pertencem ao espaço de Hilbert  $H^1(\Omega)$  com primeiras derivadas contínuas por partes e quadrado integráveis.  $W_{int}$  e  $W_{ext}$  são o trabalho das forças internas e externas, respectivamente. Logo, para a elasticidade linear, define-se,

$$W_{int} := \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) d\Omega, \quad W_{ext} := \int_{\partial\Omega^{\sigma}} \bar{t} \cdot v d(\partial\Omega^{\sigma}), \quad (5)$$

Sendo assim, mediante o uso do método de Galerkin, define-se um subespaço  $\mathcal{S}(\Omega)$  do espaço  $H^1(\Omega)$  que contém funções de aproximação (“tentativas”) da solução exata. Portanto,  $\mathcal{S}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , e depende do método numérico utilizado para construir a aproximação. Nas seções seguintes demonstra-se a construção de aproximações numéricas para o PVC mediante os espaços de aproximação fornecidos pelo MEFG e MEFGE.

### 3 MEFG E MEFGE: UMA BREVE DESCRIÇÃO

O MEFG é uma metodologia híbrida entre o MEF e os métodos sem malha que permite expandir o espaço de aproximação do MEF com funções especiais que aproximam bem a solução localmente. Tal expansão é construída explorando as propriedades de PU das funções de forma do MEF. Em síntese, as funções de forma  $\phi_{ij}$  do MEFG são o resultado do produto entre a PU  $\varphi_i$  do MEF e as funções de enriquecimento  $\psi_j^{(i)}$ , i.e.,

$$\phi_{ij} = \varphi_i \psi_j^{(i)} \text{ (sem soma em } i\text{)}. \quad (6)$$

Seja,  $I_h = \{0, \dots, N-1\}$  o conjunto dos índices dos nós da discretização adotada em elementos finitos de dimensão  $h$  e  $N$  o número de nós,  $i \in I_h^e \subset I_h$  em que  $I_h^e$  é o conjunto com os índices dos nós dos elementos  $e$  pertencentes a nuvem  $\omega_i$  e  $j \in I_i = \{0, \dots, n_i\}$  tal que  $I_i$  é o conjunto com os índices das funções de enriquecimento  $\psi_j^{(i)}$  atreladas ao nó  $i$  e  $n_i$  é o número de funções de enriquecimento. Neste trabalho,  $\varphi_i$ ,  $i \in I_h$ , são funções lagrangianas lineares e bilineares com suporte definido sobre a nuvem  $\omega_i$ , i.e., sobre o domínio dado pela união de todos os elementos que compartilham o mesmo nó  $i$  (Oden; Duarte, 1997). Segundo Melnik (1995), tais funções constituem uma PU, pois atendem a propriedade de soma unitária, ou seja,  $\sum_{i \in I_h} \varphi_i(x) = 1$ ,  $\forall x \in \bar{\Omega}$ , e garantem conformidade à aproximação final obtida.

Portanto, em termos de uma representação geral, o espaço das funções teste do MEFG é definido mediante a Eq. (6) como,

$$\mathcal{S} = \sum_{i \in I_h} \sum_{j \in I_i} \phi_{ij} b_j^{(i)} = \sum_{i \in I_h} \sum_{j \in I_i} \varphi_i \psi_j^{(i)} b_j^{(i)} := \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2, \quad \psi_0^{(i)} = 1, \quad (7)$$

em que,

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{i \in I_h} \varphi_i \psi_0^{(i)} b_0^{(i)} \right\}, \quad \mathcal{S}_2 = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{i \in I_h} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i \psi_j^{(i)} b_j^{(i)} \right\}. \quad (8)$$

$b_0^{(i)}, b_j^{(i)} \in \mathbb{R}$  e representam os graus de liberdade atrelados aos nós da discretização.  $\mathcal{S}_1$  refere-se ao espaço de aproximação do MEF e  $\mathcal{S}_2$  ao espaço das funções de forma enriquecidas. Observa-se ainda que para as nuvens  $\omega_i$  em que  $n_i = 0$  o espaço de aproximação local  $\mathcal{S}$  é o mesmo do MEF.

No MEFGE Estável (MEFGE) as funções de enriquecimento do MEFGE são localmente modificadas afim de torná-las nulas nos nós da nuvem  $\omega_i$ , em outras palavras:

$$\bar{\psi}_j^{(i)} := \psi_j^{(i)} - \mathcal{I}_{\omega_i} \left( \psi_j^{(i)} \right), \quad (9)$$

em que, para problemas bidimensionais,

$$\mathcal{I}_{\omega_i} \left( \psi_j^{(i)} \right) := \sum_{k \in I_h^e} \varphi_k \psi_j^{(i)}(x_k, y_k) \Big|_{\omega_i}. \quad (10)$$

$\bar{\psi}_j^{(i)}$  é a função de enriquecimento modificada,  $\mathcal{I}_{\omega_i} \left( \psi_j^{(i)} \right)$  é uma interpolação dos valores nodais de  $\psi_j^{(i)}$  sobre a nuvem  $\omega_i$  e  $(x_k, y_k)$  são as coordenadas do nó  $k$ .

Com a modificação obtida, o mesmo procedimento apresentado na Eq. (7) é usado para construir os espaço de aproximação do MEFGE, resultando,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \bar{\mathcal{S}}_2, \quad \bar{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i \bar{\psi}_j^{(i)} b_j^{(i)} \right\}. \quad (11)$$

Desta forma, com uma ordenação adequada dos graus de liberdades nodais, a matriz de rigidez global do MEFGE ou MEFGE tem a forma,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

em que  $\mathbf{K}_{ij}$  são blocos de matrizes. A matriz  $\mathbf{K}_{11} = [B(\varphi_i, \varphi_j)]$  é a própria matriz de rigidez do MEF,  $\mathbf{K}_{22} = [B(\varphi_i \psi_j^{(i)}, \varphi_k \psi_m^{(k)})]$  é uma matriz que contém exclusivamente as parcelas do enriquecimento e  $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21}^T = [B(\varphi_i, \varphi_j \psi_k^{(j)})]$  são blocos híbridos que dependem de  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ .

Como mencionado anteriormente, embora a expectativa de convergência ótima seja uma excelente característica do MEFGE, para obtê-la é importante que o sistema de equações atrelado possa ser resolvido com precisão e eficiência, ou seja, é necessário que o sistema de equações seja bem condicionado. Desta forma, adota-se o número de condição escalonado  $\mathfrak{K}(\mathbf{K})$  como indicador do condicionamento matricial, definido a partir do número de condição  $\kappa_2(\cdot)$  da matriz escalonada  $\hat{\mathbf{K}}$ , conforme demonstrado a seguir:

$$\mathfrak{K}(\mathbf{K}) := \kappa_2(\hat{\mathbf{K}}) = \kappa_2(D\mathbf{K}D) = \|\hat{\mathbf{K}}\|_2 \|\hat{\mathbf{K}}^{-1}\|_2, \quad (13)$$

em que,  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal com  $D_{ii} = \mathbf{K}_{ii}^{-1/2}$  e  $\|\cdot\|_2$  é a norma euclidiana.

Babuška e Banerjee (2011, 2012) demonstram matematicamente para problemas unidimensionais enriquecidos com funções polinomiais que  $\kappa(\mathbf{K}_{MEFG}) = \mathcal{O}(h^{-4})$  e  $\kappa(\mathbf{K}_{MEFGE}) \approx \kappa(\mathbf{K}_{11}) = \mathcal{O}(h^{-2})$ , ou seja, o condicionamento do MEFGE, em contrapartida ao do MEF, é da mesma ordem de magnitude que o MEF. Todavia, Zhang, Banerjee e Babuška (2014) afirmam que a modificação imposta pelo MEFGE às funções de enriquecimento não é condição suficiente para garantir que não haverá dependências lineares. Desta forma, tais autores empregam uma segunda alteração sobre  $\bar{\mathcal{S}}_2$  a fim de garantir independência linear local do espaço  $\mathcal{S}_1$ . Essa alteração consiste no uso de PUs distintas para a construção dos espaços  $\mathcal{S}_1$  e  $\bar{\mathcal{S}}_2$ . Na Subseção 3.1 apresenta-se uma breve discussão acerca das ideias sugeridas por Zhang, Banerjee e Babuška (2014) e além disso, é proposta uma extensão de tais ideias para problemas bidimensionais.

### 3.1 Partição da Unidade *flat-top*

Zhang, Banerjee e Babuška (2014), objetivando a construção de espaços de aproximação de alta ordem, propõem a incorporação de polinômios de alta ordem ao espaço das funções de enriquecimento  $\bar{\mathcal{S}}_2$  do MEFGE. Entretanto, para garantir independência linear entre os espaços  $\mathcal{S}_1$  e  $\bar{\mathcal{S}}_2$ , tais autores sugerem uma modificação equivalente a substituir a PU *hat-function* do  $\bar{\mathcal{S}}_2$  pela PU *flat-top*  $\varphi_i^{FT}$ . Neste trabalho, essa versão do MEFGE será referida por MEFGE<sup>FT</sup>. Logo, o espaço de aproximação do MEFGE<sup>FT</sup> é definido por,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \bar{\mathcal{S}}_2^{mod}, \quad \bar{\mathcal{S}}_2^{mod} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i^{FT} \bar{\psi}_j^{(i)} b_j^{(i)} \right\}. \quad (14)$$

Neste contexto, Zhang, Banerjee e Babuška (2014) realizam ainda análises numéricas em problemas unidimensionais e comprovam que a PU *flat-top* garante estabilidade devido ao bom condicionamento matricial. Mais recentemente, Sato (2017) estende a formulação da PU *flat-top* para problemas bidimensionais com fratura, discretizados com elementos finitos quadrilaterais, e obtêm resultados que demonstram a eficácia da mesma para esta classe de problemas.

Entretanto, o uso de elementos finitos quadrilaterais pode ser fator limitante na discretização de geometrias complexas. Desta forma, considerando o elemento finito mestre  $\hat{e} := \{(\xi, \eta) : \xi \in [0, 1], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi\}$ , propõe-se a seguir a extensão da formulação da PU *flat-top* para elementos finitos triangulares:

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \xi \in [0, \sigma], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, \\ \left( \frac{\xi - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \xi \in [\sigma, 1 - \sigma], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, \\ 1 & \xi \in [1 - \sigma, 1], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, \end{cases} \quad (15a)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \eta \in [0, \sigma], 0 \leq \xi \leq 1 - \eta, \\ \left( \frac{\eta - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \eta \in [\sigma, 1 - \sigma], 0 \leq \xi \leq 1 - \eta, \\ 1 & \eta \in [1 - \sigma, 1], 0 \leq \xi \leq 1 - \eta, \end{cases} \quad (15b)$$

$$\varphi_3(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \xi \in [0, \sigma] \text{ e } \eta \in [0, \sigma], \\ 1 - \left(\frac{\xi - \sigma}{1 - 2\sigma}\right)^k & \xi \in [\sigma, 1 - \sigma] \text{ e } \eta \in [0, \sigma], \\ 0 & \xi \in [1 - \sigma, 1] \text{ e } \eta \in [0, \sigma], \\ 1 - \left(\frac{\eta - \sigma}{1 - 2\sigma}\right)^k & \xi \in [0, \sigma] \text{ e } \eta \in [\sigma, 1 - \sigma], \\ 0 & \xi \in [0, \sigma] \text{ e } \eta \in [1 - \sigma, 1], \\ 1 - \left(\frac{\xi - \sigma}{1 - 2\sigma}\right)^k - \left(\frac{\eta - \sigma}{1 - 2\sigma}\right)^k & \xi \in [\sigma, 1 - \sigma], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, \end{cases} \quad (15c)$$

Nas Eq. (15a, b, c),  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  estão associadas a numeração local dos nós do elemento  $\hat{e}$  (ver Figura 1). O parâmetro  $0 < \sigma < 0.5$ , e o parâmetro  $k \in \mathbb{N}^*$  controlam a suavidade da curva que interliga as regiões planas. Observa-se ainda que as funções apresentadas respeitam a propriedade de soma unitária em qualquer ponto e têm suporte contido no domínio do elemento.

Como a PU *flat-top* tem características distintas em cada região do elemento, observa-se que, a depender do valor do parâmetro  $\sigma$ , a integração numérica pode ser afetada pois os pontos de integração podem concentrar-se em regiões específicas, impedindo a computação da contribuição das demais regiões e tornando a integração imprecisa. Uma opção para evitar este tipo de problema seria adotar uma grande quantidade de pontos de integração, entretanto, essa metodologia poderia penalizar seriamente o tempo gasto para computar a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais. Além disso, torna-se imprecisa a definição da quantidade de pontos de integração necessária para dado valor de  $\sigma$ .

A estratégia proposta em relação a essa questão consiste na divisão do domínio do elemento finitos mestre  $\hat{e}$  em nove *subelementos* triangulares que respeitam os limites definidos por  $\sigma$  (ver Figura 1). Em seguida, mapeia-se os pontos de integração da quadratura de Hammer, Marlowe e Stroud (1956) de um subdomínio mestre  $\hat{\tau} := \{(\hat{\xi}, \hat{\eta}) : \hat{\xi} \in [0, 1], 0 \leq \hat{\eta} \leq 1 - \hat{\xi}\}$  para cada subelemento  $\tau_i$ .

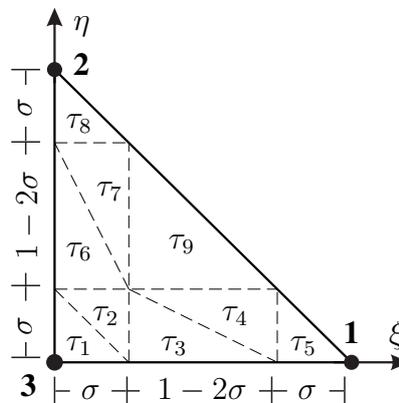


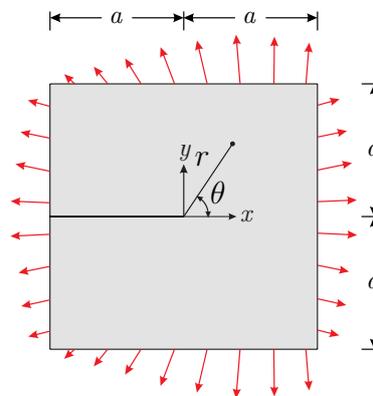
Figura 1. Representação do domínio dimensional do elemento finito mestre  $\hat{e}$  e dos subelementos  $\tau_i$ .

Tal estratégia, além de evitar que regiões do domínio do elemento finito mestre não sejam contabilizadas, flexibiliza a escolha da quantidade de pontos de integração na análise. Desta

forma, por exemplo, a contribuição dos subelementos em que a PU *flat-top* é nula não precisa ser computada, logo, o processo torna-se mais preciso e menos dispendioso computacionalmente.

#### 4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Um painel bidimensional com uma fissura de borda (ver Figura 2) foi submetido a análises numéricas por meio das versões do MEF<sub>G</sub>. Tal painel possui características que potencializam as vantagens do MEF<sub>G</sub> frente ao MEF.



**Figura 2. Representação do painel com fissura de borda.**

Considerou-se a condição de estado plano de deformação, painel de espessura unitária e dimensão  $a = 0.5$ . A descontinuidade de deslocamento através da linha da fissura foi levada em conta mediante emprego de nós duplos. Idealmente, considerou-se um material de comportamento linear elástico com módulo de elasticidade 1.0 e coeficiente de Poisson 0.3. O carregamento imposto ao longo dos lados foi determinado por meio dos primeiros termos da expansão assintótica da solução analítica em tensão, definida por Szabó e Babuška (1991, p. 176), para o Modo 1 e Modo 2. Nota-se que a origem do referencial cartesiano para a solução analítica coincide com a ponta da fissura. Observa-se ainda que o carregamento assim determinado fornece as condições de contorno de Neumann.

Nas análises, foram consideradas 6 malhas uniformes e regulares de elementos finitos quadrilaterais e triangulares. O comprimento dos lados dos elementos é dado por  $h_i = a/2^i$ ,  $i \in M = \{i \in \mathbb{N}^* : 1 \leq i \leq 6\}$ . Como exemplo, na Figura 3 ilustra-se a discretização da geometria em elementos finitos quadrilaterais e triangulares de dimensão  $h = 0.125$ .

Além disso, para a análise de convergência da solução aproximada empregou-se a medida de erro definida pela norma energia do erro em tensão  $\|e\|_{\Omega}$ , sendo esta descrita como,

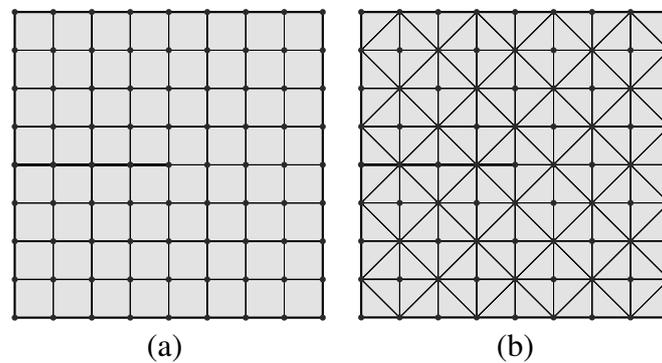
$$\|e\|_{\Omega} = \left( \int_{\Omega} (\sigma_{ap} - \sigma_{ex}) \mathfrak{C}^{-1} (\sigma_{ap} - \sigma_{ex}) \right)^{1/2}, \quad (16)$$

em que,  $\Omega$  refere-se ao domínio do problema,  $\sigma_{ap}$  é a solução para as componentes de tensão obtida por meio de cada versão do MEF<sub>G</sub>,  $\sigma_{ex}$  é a solução analítica exata para cada componente de tensão, e  $\mathfrak{C}$  é o tensor constitutivo.

Duas estratégias de enriquecimentos foram empregadas para aproximar o comportamento da solução. Além disso, apresenta-se um estudo acerca do parâmetro  $\sigma$  de modo a obter um valor de referência que conduza as estratégias de enriquecimento empregadas.

Como já mencionado, o sistema de equações do MEFGE, e suas versões, pode ser linearmente dependente. Para a busca de solução, nas análises descritas a seguir, nas situações onde o sistema de equações apresentou dependências lineares, foi empregado o algoritmo de escalonamento e perturbação da matriz dos coeficientes proposto por Strouboulis, Babuška e Copps (2000).

Vale ressaltar ainda que nas simulações numéricas baseadas em elementos finitos quadrilaterais, empregou-se a PU *flat-top* definida por Sato (2017).



**Figura 3. Discretização do painel em elementos finitos de dimensão  $h = 0.125$ . (a) Malha de elementos finitos quadrilaterais. (b) Malha de elementos finitos triangulares.**

#### 4.1 Análise do parâmetro $\sigma$

Como mencionado nas seções anteriores, o parâmetro  $\sigma$  controla a dimensão dos subdomínios da PU *flat-top*. Dessa forma,  $0 \leq \sigma \leq 0.5$ , de modo que para  $\sigma = 0$  recupera-se a PU linear do MEF e, para  $\sigma = 0.5$  representa-se a função *Heaviside*.

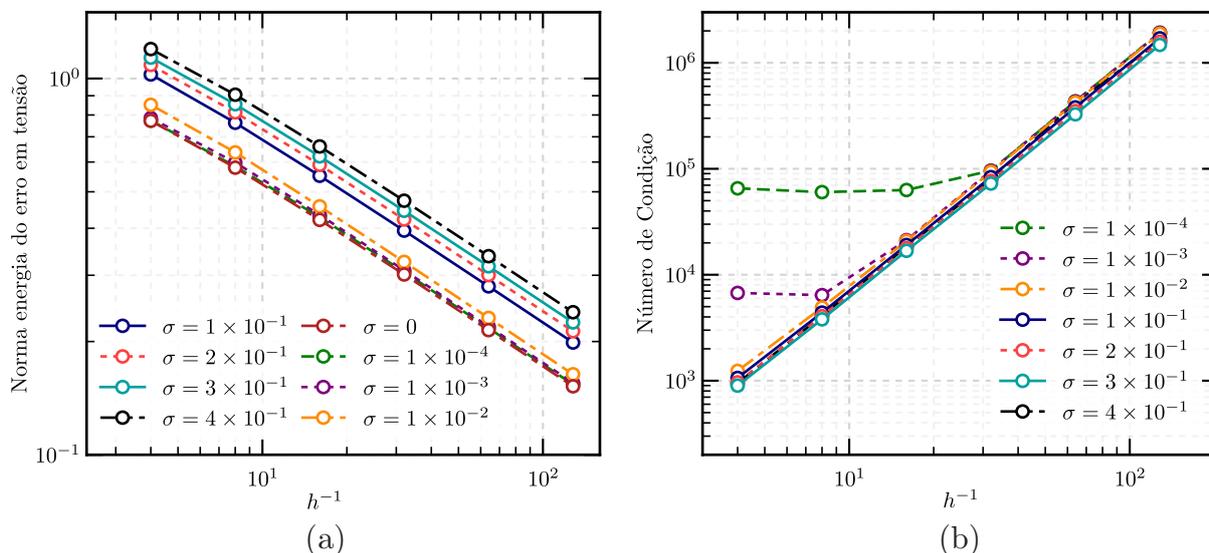
Zhang, Banerjee e Babuška (2014) apontam que a presença da região plana (“*top*”) na PU *flat-top* penaliza a taxa de convergência. Além disso, o número de condição se reduz à medida que  $\sigma$  se aproxima de 0.5, porém, a imprecisão da aproximação aumenta nessa mesma direção. Sato (2017), por meio do MEFGE<sup>FT</sup>, realiza um estudo acerca do efeito do parâmetro  $\sigma$  sobre a convergência dos resultados e recomenda a adoção de  $\sigma = 0.1$  na PU *flat-top* do elemento finito quadrilateral.

Nesse contexto, visando encontrar um valor de referência para  $\sigma$  na PU *flat-top* do elemento finito triangular, simulações numéricas foram realizadas com o MEFGE<sup>FT</sup>. Em tais simulações, para cada nível de refinamento  $h$  e em todos os nós da discretização, adotou-se um enriquecimento com polinômio completo modificado de ordem 2, ou seja:

$$\text{span}\{\psi_j^{(i)}\}_{j=0}^{n_i=5} = \left\{ 1, \frac{(x-x_i)}{h_i}, \frac{(y-y_i)}{h_i}, \frac{(x-x_i)(y-y_i)}{h_i^2}, \frac{(x-x_i)^2}{h_i^2}, \frac{(y-y_i)^2}{h_i^2} \right\}. \quad (17)$$

Os resultados obtidos são apresentados na Figuras 4a e 4b, que ilustram o crescimento do número de condição e a convergência do erro em tensão na norma energia, respectivamente, à

medida que a malha de elementos finitos é refinada, para diversos valores de  $\sigma$ .



**Figura 4. Resultados para diferentes valores de  $\sigma$ . (a) Convergência do erro. (b) Número de condição.**

O gráfico apresentado na Figura 4a confirma a hipótese de melhora do condicionamento matricial à medida que o valor  $\sigma$  se aproxima de 0.5. Além disso, observa-se outro comportamento interessante para o intervalo de  $0 < \sigma \leq 0.01$ , em que o número de condição é mais elevado e constante até que se atinja a mesma ordem de valor em malhas mais refinadas com  $\sigma \geq 0.01$ . Observa-se ainda que para  $\sigma \geq 0.01$  uma ordem do número de condição muito próxima em todas as malhas. A Tabela 1 ilustra o limite da análise, ou seja  $\sigma = 0$ , situação em que recupera-se a PU linear do MEF. Confrontando os resultados dessa tabela com a Figura 4a fica evidente que o condicionamento matricial dado pela PU *flat-top* para qualquer valor de  $\sigma > 0$  é muitas ordens de magnitude menor que o atrelado a PU *hat-functions*.

**Tabela 1. Número de condição e erro para  $\sigma = 0$ .**

| $h$       | Número de Condição     | Erro     |
|-----------|------------------------|----------|
| 0.25      | $4.115 \times 10^{17}$ | 0.771955 |
| 0.125     | $4.500 \times 10^{17}$ | 0.579560 |
| 0.0625    | $1.324 \times 10^{18}$ | 0.420970 |
| 0.03125   | $1.274 \times 10^{18}$ | 0.301409 |
| 0.015625  | $5.752 \times 10^{18}$ | 0.214416 |
| 0.0078125 | $1.406 \times 10^{19}$ | 0.152065 |

Além disso, a Figura 4a comprova convergência linear, porém com aumento do erro à medida que o parâmetro  $\sigma$  cresce. Contudo, a diferença entre os valores do erro para  $\sigma \leq 0.01$  é mínima.

Logo, com base nos gráficos presentes nas Figuras 4a e 4b, pode-se concluir que, no elemento finito triangular, para  $\sigma = 0.01$  encontra-se um bom equilíbrio entre o número de condição e erro. Nessa situação, os erros de discretização são os mais próximos dos valores deter-

minados com  $\sigma = 0$  (ver Tabela 1) – condição em que a divisão do subdomínio não afetaria a precisão – para um crescimento estável do número de condição. Portanto, justifica-se assim o emprego de  $\sigma = 0.01$  em discretizações com elementos finitos triangulares nas análises, apresentadas nas seções seguintes, que empregam o MEFGE<sup>FT</sup>. No mesmo contexto, seguindo a recomendação dada por Sato (2017), para os elementos finitos quadrilaterais adota-se  $\sigma = 0.1$ .

## 4.2 Estratégia de enriquecimento I

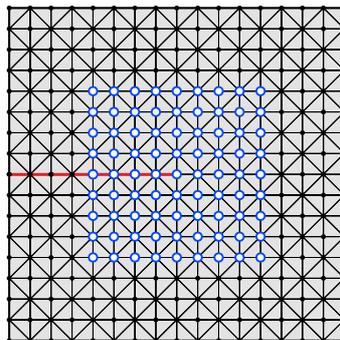
A primeira estratégia de enriquecimento envolve o conjunto de funções de enriquecimento para o campo de deslocamento apresentado por Oden e Duarte (1997) e Duarte, Babuška e Oden (2000) (ver Eq. (18)). Tais funções possuem a capacidade de representar o comportamento singular da tensão nas proximidades da ponta de uma fissura e são construídas pelas seguintes bases de aproximação:

$$L_i^x = \sqrt{r} \begin{Bmatrix} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \left( \kappa + \frac{1}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

$$L_i^y = \sqrt{r} \begin{Bmatrix} \left( \kappa + \frac{3}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{3\theta}{2}, \\ \left( \kappa - \frac{3}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

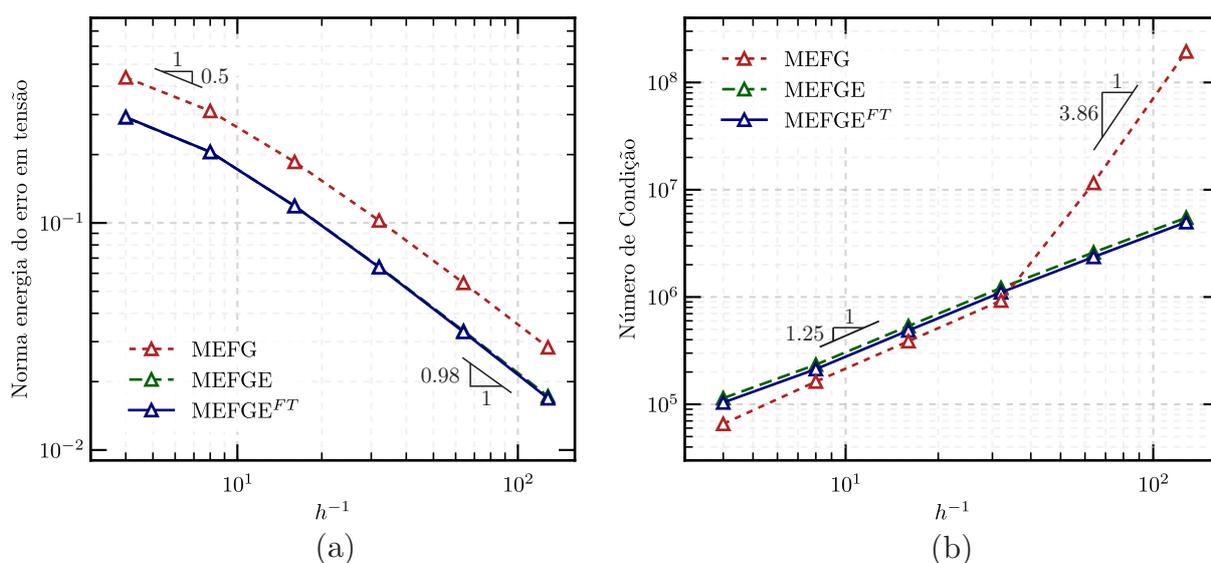
em que,  $(r, \theta)$  é o sistema de coordenadas polar localizado na ponta da fissura (ver Figura 2),  $\kappa$  é uma constante do material definida por  $(3 - 4\nu)$ , onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Ainda sobre a Eq. (18),  $L_i^x$  e  $L_i^y$  são usadas para enriquecer os graus de liberdade da aproximação relacionados as direções globais  $x$  e  $y$ , respectivamente.

O enriquecimento dado pelo conjunto de funções singulares apresentado na Eq. (18) foi aplicado localmente à vizinhança da ponta da trinca. A zona de enriquecimento é limitada, para todas as malhas, por uma região quadrilateral centrada na ponta da fissura e com comprimento do lado de 0.5 (ver Figura 5).

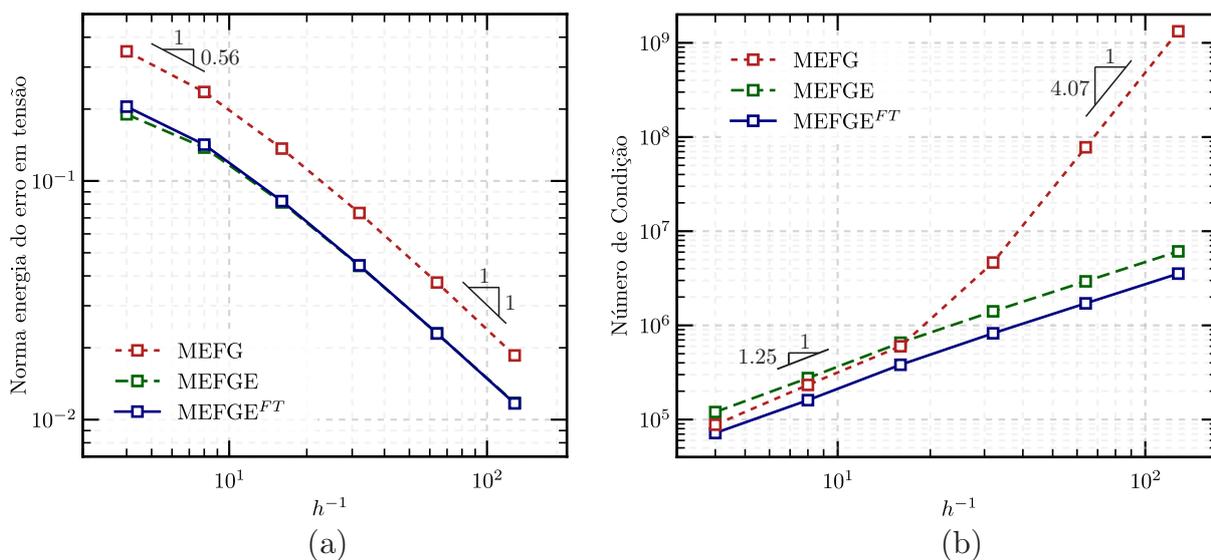


**Figura 5. Malha de elementos finitos triangulares com  $h = 0.0625$ . A zona de enriquecimento é representada pelo conjunto de nós em azul. A fissura é representada pela linha em vermelho.**

Portanto, segundo os gráficos presentes nas Figuras 6a e 7a, observa-se que o enriquecimento singular propicia ao MEFGE e suas versões taxa de convergência ótima, ou seja, da  $\mathcal{O}(h)$ . Além disso, identifica-se que as versões estáveis do MEFGE apresentam resultados bastante semelhantes. Além disso, é visto que o resultado obtido pelo MEFGE, apesar de apresentar a mesma taxa de convergência de suas versões estáveis, possui uma medida do erro de maior magnitude.



**Figura 6. Resultados para os elementos finitos triangulares enriquecidos com funções singulares. (a) Convergência  $h$ . (b) Número de condição.**



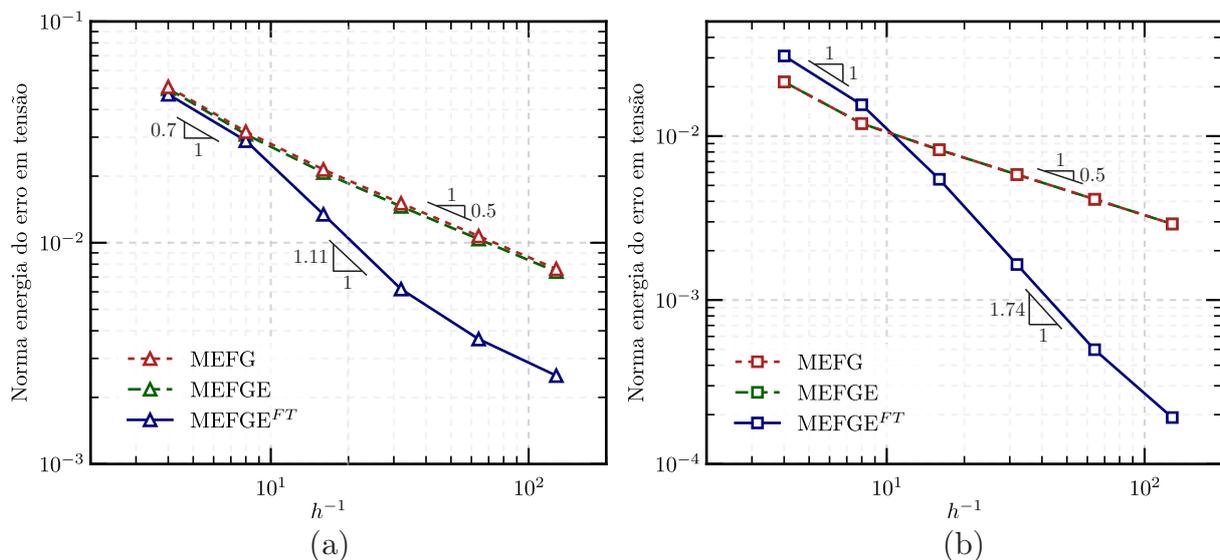
**Figura 7. Resultados para os elementos finitos quadrilaterais enriquecidos com funções singulares. (a) Convergência  $h$ . (b) Número de condição.**

Outro aspecto interessante é evidenciado pelos resultados presentes nas Figuras 6b e 7b. Os resultados apontam a mesma ordem de crescimento para o número de condição em todas as versões do MEFGE, e para os dois tipos de elementos finitos, em refinamentos de  $h < 0.03125$ .

Contudo, observa-se para o MEFGE, uma rápida evolução do número de condição da  $\mathcal{O}(h^{-4})$  nos próximos refinamentos. Segundo Gupta et al. (2013), esse fenômeno está relacionado a dimensão da zona de enriquecimento. Além disso, observa-se um crescimento regular da  $\mathcal{O}(h^{-1.25})$  ao longo de toda as análises para as versões estáveis do MEFGE seja em elementos finitos triangulares ou quadrilaterais.

### 4.3 Estratégia de enriquecimento II

Visando obter taxas de convergência superiores, emprega-se simultaneamente os enriquecimentos utilizados nas subseções 4.1 e 4.2. Desta forma, os enriquecimentos polinomiais são encarregados de suavizar a solução nas regiões distantes da ponta da trinca, enquanto o enriquecimento singular é responsável por representar o comportamento da solução na vizinhança da ponta da fissura.



**Figura 8. Convergência  $h$  para enriquecimento com funções singulares e polinômio completo. (a) Resultados para os elementos finitos triangulares. (b) Resultados para os elementos finitos quadrilaterais.**

Segundo os resultados presentes nas Figuras 8a e 8b, para o MEFG e MEFGE, o enriquecimento polinomial completo penalizou a taxa de convergência dada pelas funções singulares. Todavia, seja nos elementos finitos quadrilaterais ou triangulares, a PU *flat-top* propiciou taxa de convergência ótima. Em particular, a ordem de convergência é superior a indicada por Babuška e Banerjee (2011, 2012) para o MEFG e MEFGE.

Outro aspecto importante é observado nas Tabelas 2 e 3. O MEFG e MEFGE apresentaram números de condição de magnitudes muito superiores aos dados pelas versões do MEFGE que consideram a PU *flat-top*. Em contrapartida, observa-se um comportamento estável e regular do condicionamento matricial atrelado ao sistema de equações dado pela incorporação das funções *flat-top* como PU do espaço de enriquecimento.

Observa-se ainda que na estratégia de enriquecimento II, o MEFGE não apresentou nenhuma vantagem em relação ao MEFG, tanto o erro quando a medida do número de condição mostram-se bastante próximos nas duas metodologias.

**Tabela 2. Número de condição para enriquecimento com polinômio completo e funções singulares nos elementos finitos triangulares.**

| $h$       | MEFG                   | MEFGE                  | MEFGE <sup>FT</sup> |
|-----------|------------------------|------------------------|---------------------|
| 0.25      | $5.549 \times 10^{17}$ | $6.237 \times 10^{17}$ | $3.934 \times 10^5$ |
| 0.125     | $8.569 \times 10^{17}$ | $4.161 \times 10^{17}$ | $7.171 \times 10^5$ |
| 0.0625    | $1.015 \times 10^{18}$ | $1.115 \times 10^{18}$ | $1.446 \times 10^6$ |
| 0.03125   | $3.824 \times 10^{18}$ | $4.294 \times 10^{18}$ | $3.001 \times 10^6$ |
| 0.015625  | $3.165 \times 10^{19}$ | $8.134 \times 10^{18}$ | $6.315 \times 10^6$ |
| 0.0078125 | $6.276 \times 10^{18}$ | $7.058 \times 10^{18}$ | $1.131 \times 10^7$ |

**Tabela 3. Número de condição para enriquecimento com polinômio completo e funções singulares nos elementos finitos quadrilaterais.**

| $h$       | MEFG                   | MEFGE                  | MEFGE <sup>FT</sup> |
|-----------|------------------------|------------------------|---------------------|
| 0.25      | $2.810 \times 10^{17}$ | $3.542 \times 10^{17}$ | $2.791 \times 10^5$ |
| 0.125     | $4.341 \times 10^{18}$ | $2.116 \times 10^{18}$ | $5.644 \times 10^5$ |
| 0.0625    | $6.919 \times 10^{18}$ | $1.199 \times 10^{19}$ | $1.222 \times 10^6$ |
| 0.03125   | $3.815 \times 10^{19}$ | $1.553 \times 10^{20}$ | $2.510 \times 10^6$ |
| 0.015625  | $4.546 \times 10^{20}$ | $3.112 \times 10^{20}$ | $5.042 \times 10^6$ |
| 0.0078125 | $7.278 \times 10^{21}$ | $2.190 \times 10^{22}$ | $1.009 \times 10^7$ |

## 5 CONCLUSÃO

A investigação numérica realizada com o MEFGE<sup>FT</sup> considerando PU *flat-top* para elementos finitos quadrilaterais e triangulares demonstra que o condicionamento matricial do sistema de equações medido pelo número de condição é da mesma ordem que o fornecido pelo MEF. Além disso, as taxas de convergência resultantes, quando comparadas ao MEFG convencional, indicam favoráveis ganhos de precisão.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

- Babuška, I., & Banerjee, U., 2011. Stable generalized finite element method (SGFEM). *Technical Report*, TICAM, The University of Texas at Austin.
- Babuška, I., & Banerjee, U., 2012. Stable generalized finite element method (SGFEM). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 201, pp. 91–111.



- Béchet, E. et al., 2005. Improved implementation and robustness study of the x-fem for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, n. 8, pp. 1033–105.
- Duarte, C. A., Babuška, I., & Oden, J. T., 2000. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, vol. 77, n. 2, pp. 215–232.
- Fries, T., & Belytschko, T., 2010. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, n. 3, pp. 253–304.
- Gupta, V. et al., 2013. A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 266, pp. 23–39.
- Hammer, P. C., Marlowe, O. J., & Stroud, A. H., 1956. Numerical integration over simplexes and cones. *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, vol. 10, n. 55, pp. 130–137.
- Laborde, P. et al., 2005. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, n. 3, pp. 354–381.
- Melenk, J. M. *On Generalized Finite Element Methods*. 1995. Ph.D. Thesis, University of Maryland.
- Menk, A., & Bordas, S. P. A., 2011. A robust preconditioning technique for the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 85, n. 13, pp. 1609–1632.
- Oden, J. T., & Duarte, C. A., 1997. Clouds, cracks and FEM's. *Recent Developments in Computational and Applied Mechanics*, International Center for Numerical Methods in Engineering, CIMNE, Barcelona, Spain, pp. 302–321.
- Proença, S. P. B., 2010. *Introdução aos Métodos Numéricos: Notas de aula*. Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos/USP.
- Sato, F. M. *Experimentos numéricos com versões estáveis do Método dos Elementos Finitos Generalizados*. 2017. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Strouboulis, T., & Babuška, I., Copps, K., 2000. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 181, n. 1-3, pp. 43–69.
- Szabó, B., & Babuška, I., 1991. *Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons.
- Zhang, Q., Banerjee, U., & Babuška, I., 2014. Higher order stable generalized finite element method. *Numerische Mathematik*, vol. 128, n. 1, pp. 1–29.