Família de modelos dinâmicos DARMA quantílicos

João Inácio Scrimini [1]
Cleber Bisognin [2]

Resumo

A distribuição Dagum Exponencial Generalizada Exponencializada (EGED) foi proposta por Nasiru et al. (2019), com parâmetros $(\alpha, \delta, \sigma, \lambda, \eta, \gamma)$ reais positivos, denotada por EGED$(\alpha, \delta, \sigma, \lambda, \eta, \gamma)$, com suporte nos reais positivos. Segundo Nasiru et al. (2019) a distribuição EGED contém pelo menos 8 casos particulares. Desta forma, o objetivo deste trabalho é propor um modelo dinâmico de séries temporais para modelagem de quantis da distribuição EGED e seus casos particulares. Considere a σ-álgebra $\mathcal{F}_{t-1}$ que representa toda a informação passada até o instante $t-1$. Seja $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots Y_n)^\top$ variáveis aleatórias tais que Y_t, condicional a $\mathcal{F}_{t-1}$ para $t = 1, \cdots, n$, possui função densidade de probabilidade condicional EGED reparametrizada com quantil μ_t, onde $\delta = -\frac{1}{\log(\mu_t)} \log\{\frac{1}{\alpha}[(1-(1-(1-(1-\tau)^{\frac{1}{\lambda}})^{\frac{1}{\eta}})^{\frac{1}{\gamma}})^{-\frac{1}{\sigma}} - 1]\}$, com $\tau \in (0,1)$. Assim, um modelo para μ_t é dado por $g(\mu_t) = \boldsymbol{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$, em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)^\top$ é o vetor de parâmetros da regressão ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^k$) e $\boldsymbol{x}_t = (x_{t1}, \cdots, x_{tk})^\top$ são observações de k covariáveis ($k < n$), as quais são supostamente fixas e conhecidas e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função de ligação duas vezes diferenciável e estritamente monótona. Neste trabalho utilizamos $g(x) = \log(x)$ e assumimos que ε_t é um processo ARMA(p, q), ou seja, $\phi(L)(g(y_t) - \boldsymbol{x}_t^\top \boldsymbol{\beta}) = \theta(L) r_t$, onde L é o operador *backward*, $\phi(z) = -\sum_{j=0}^{p} \phi_j z^j$ e $\theta(z) = -\sum_{j=0}^{q} \theta_j z^j$, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\phi_0 = -1 = \theta_0$ e assumimos que $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ não possuem raízes em comum e r_t é um erro aleatório. Neste caso a estrutura a ser considerada é $g(\mu_t) = \zeta + \boldsymbol{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{j=1}^{p} \phi_j \left[g(y_{t-j} - \boldsymbol{x}_{t-j}^\top \boldsymbol{\beta}) \right] + \sum_{j=1}^{q} \theta_j r_{t-j}$, para $t = 1, \ldots, n$ e $\zeta \in \mathbb{R}$ é uma constante, a qual, neste trabalho, consideramos $\zeta = 0$. A estimação do vetor de parâmetros do modelo proposto $\boldsymbol{\varphi} = (\sigma, \delta, \lambda, \eta, \gamma, \boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top)^\top$, com $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)^\top$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_p)^\top$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\top$, será realizada utilizando os estimadores de máxima verossimilhança (EMV), onde a função de log-verossimilhança de $\boldsymbol{y}$ é dada por $\ell(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{t=1}^{n} \ell_t(\boldsymbol{\varphi})$, em que $\ell_t(\boldsymbol{\varphi}) = \log(\alpha\lambda\sigma\delta\eta\gamma) - (\delta+1)\log(y_t) - (\sigma+1)\log(z_t) + (\gamma+1)\log\left(1 - z_t^{-\sigma}\right) + (\eta - 1)\log\left[1 - \left(1 - z_t^{-\sigma}\right)^\gamma\right] + (\lambda - 1)\log\left\{1 - \left[1 - \left(1 - z_t^{-\sigma}\right)^\gamma\right]^\eta\right\}$, com $z_t = (1 + \alpha y_t^{-\delta})$, μ_t o quantil da observação y_t no tempo t, e a reparametrização por δ, com $\tau \in (0,1)$. Para avaliar as propriedades dos EMV, foram realizados simulações de Monte Carlo. A implementação computacional foi desenvolvida no *software* R Core Team (2023). Para o cenário $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda, \sigma, \eta, \gamma, \phi_1, \theta_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = (1; 1; 30; 1; 1; -0,3; 0,5; 3,5; 0,4; -0,7)$, foram utilizadas 3.000 replicações para os tamanhos amostrais $n \in \{100; 300; 500\}$ e para o quantil $\tau = 0,50$. Analisando este cenário em particular, os estimadores são assintoticamente não viesados, normalmente distribuídos e consistentes. Estão sendo realizadas simulações para outros diferentes cenários e aplicações em variáveis reais. Também está sendo desenvolvido um pacote no R para ser disponibilizado.

Palavras-chave: Modelo Dinâmico, Séries Temporais, ARMA, Monte Carlo.

[1]Departamento de Estatística, UFSM - joao.scrimini@acad.ufsm.br
[2]Departamento de Estatística, UFSM - cleber.bisognin@ufsm.br