



## ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DE VIGAS BI-ENGASTADAS E ENGASTADAS E LIVRES: ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL

### Vibration Analysis of Cantilever and Clamped-Clamped Beam: A Numerical – Experimental Study

André Vasconcelos Soares Gomes (1) (P); Breno Dias Breda (2); Felipe Botelho Coutinho (3); Adenílcia Fernanda Grobério Calenzani (4)

(1) Engenheiro Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

(2) Engenheiro Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

(3) Mestre em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

(4) Dra. Profa., Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil

Email para Correspondência: andrevsg91@hotmail.com; (P) Apresentador

**Resumo:** Vigas podem ser caracterizadas como estruturas que estão sujeitas à variadas formas de carregamentos, podendo ser estáticos ou dinâmicos. Quando ações dinâmicas são aplicadas, as vigas podem assumir um estado de vibração que compromete todo o sistema estrutural – sendo fundamental o entendimento do seu comportamento dinâmico. Assim, este trabalho tem como objetivo realizar um estudo numérico e experimental do primeiro modo de vibração de vigas bi-engastadas e engastadas e livres. Os modelos numéricos são desenvolvidos no software de elementos finitos ANSYS 18.0. Para a verificação e validação da modelagem numérica, é feito um comparativo com resultados experimentais da frequência natural do primeiro modo de vibração de uma viga de aço em perfil W 200 x 22,5. Nessa análise prática, foram utilizados dois acelerômetros, um conversor A/D e um computador portátil para a aquisição dos sinais no domínio do tempo. Com recursos e programas desenvolvidos em MATLAB, esses sinais são tratados e transformados para o domínio da frequência pelo algoritmo denominado de FFT (*Fast Fourier Transform*). Observou-se que o desvio entre os resultados numéricos e experimentais foram próximos o suficiente para comprovar a confiabilidade dos modelos desenvolvidos. Além disso, utilizando o método do ajuste de curva de decaimento, são apresentados os fatores de amortecimento de cada gráfico obtido nos ensaios.

*Palavras chaves:* estruturas de aço; análise dinâmica; análise numérica e experimental.

**Abstract:** Beams can be characterized as structures that are subject to many different forms of loading, which can be static or dynamic. When dynamic actions are applied, the beams can assume a state of vibration that will compromise the entire structural system – being of fundamental importance the understanding of its dynamic behavior. Thus, this work has the objective to perform a numerical and experimental study of the first mode of vibration of clamped-clamped and cantilever beams. The numerical models were developed in the finite elements software ANSYS 18.0. For the verification and validation of the numerical modeling, it is made a comparison with the experimental



---

results of the natural frequency of the first vibration mode of a steel beam with profile W 200 x 22.5. In this practical analysis, two accelerometers, an A/D converter and a portable computer were used to acquire the signals in the time domain. With features and routines developed in MATLAB, these signals are processed and transformed into the frequency domain by the FFT algorithm (Fast Fourier Transform). It was observed that the deviation between the numerical and experimental results were close enough to prove the reliability of the models developed. In addition, using the decay curve fitting method, the damping factors of each graph obtained in the tests are presented.

***Keywords: steel structures; dynamic analysis; numeric and experimental analysis.***

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Análise Modal

A análise modal é utilizada na determinação dos modos de vibração de um sistema e suas respectivas frequências naturais. Nessa análise, não se considera o amortecimento. A equação do movimento de vibração livre não amortecida de um sistema com  $n$  graus de liberdade pode ser expressa da seguinte forma:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

em que  $m$  e  $k$  são, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez do sistema,  $\ddot{u}$  e  $u$  são, respectivamente, os vetores de aceleração e deslocamento e  $\mathbf{0}$  é um vetor com todas as componentes nulas.

Para um sistema linear, a solução da Eq. (1) pode ser representada por:

$$u(t) = \hat{v} \text{sen}(\omega t + \theta) \quad (2)$$

em que  $\hat{v}$  representa a configuração do sistema,  $\omega$  a sua frequência angular e  $\theta$  o ângulo de fase.

Quando a Eq. (2) e sua derivada segunda são substituídas na Eq. (1), obtêm-se um problema de autovalor e autovetor.

$$[k - \omega^2 m] \hat{v} = \mathbf{0} \quad (3)$$

A Eq. (3) terá solução não trivial se e somente se o determinante da expressão entre colchetes for igual a zero.

$$|k - \omega^2 m| = 0 \quad (4)$$

A Eq. (4) é chamada de equação característica ou equação de frequência do sistema. A partir do desenvolvimento desse determinante chega-se a uma equação cujas  $n$  raízes ( $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ ) representam os quadrados das frequências dos  $n$  modos de vibração possíveis do sistema.

### 1.2 Vibração Forçada Amortecida

As equações do movimento para vibração forçada amortecida são obtidas introduzindo-se na Equação (1) uma parcela relativa ao amortecimento no membro da esquerda e um vetor de forças externas aplicadas  $p(t)$  à direita das equações.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (5)$$

Para sistemas lineares, a solução da Eq. (5) é geralmente obtida pelo método da superposição modal, que pode ser definido como uma transformação linear de coordenadas.

Neste método, a transformação linear é feita através da matriz modal e as coordenadas físicas são transformadas modais.

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}\mathbf{Y}(t) \quad (6)$$

Substituindo-se a Eq. (6) na Eq. (5), pré-multiplicando-se todos os termos por  $\boldsymbol{\phi}^T$  e considerando a matriz de amortecimento proporcional (Clough e Penzien, 1995), obtém-se:

$$\mathbf{I}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{W}(t) \quad (7)$$

$$\ddot{Y}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{Y}_r(t) + \omega_r^2Y_r(t) = W_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz de massa generalizada,  $\mathbf{C}$  a matriz de amortecimento generalizada,  $\boldsymbol{\Omega}$  a matriz de rigidez generalizada,  $\mathbf{W}$  a matriz de carga generalizada,  $\xi_r$  é a taxa de amortecimento relativa ao modo de vibração  $r$ , definida como a razão entre a constante de amortecimento  $c$  e o amortecimento crítico  $c_c$  do modo de vibração  $r$  e  $\omega_r$  a  $r$ -ésima frequência natural do sistema.

Portanto, as taxas de amortecimento modais são parâmetros a serem obtidos para se resolver o problema de vibração forçada amortecida. Essas taxas podem ser determinadas experimentalmente, por meio de métodos como: método do decaimento da vibração livre, método da amplificação ressonante, método da meia potência (Clough e Penzien, 1995), ou estimadas, com base em experiências anteriores, com precisão adequada em muitos casos. A Tabela 1 mostra o fator de amortecimento,  $\eta = 2\xi$ , de alguns materiais típicos de construção mecânica (Lazan, 1968).

**Tabela 1. Fatores de amortecimento dos materiais**

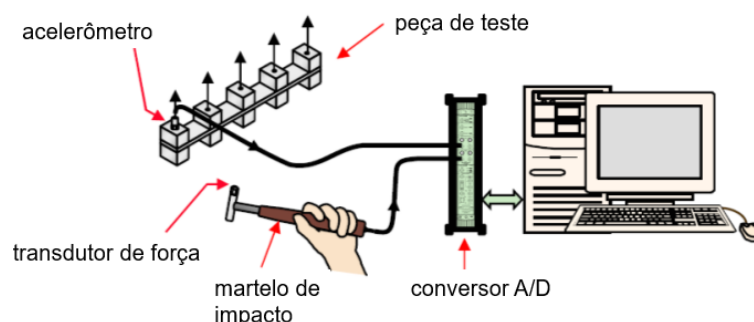
Material	Fator de perda, $\eta$
Alumínio puro	0,00002 a 0,002
Alumínio liga – Dural	0,0004 a 0,001
Cobre	0,002
Ferro fundido	0,003 a 0,03
Aço	0,001 a 0,008
Vidro	0,00006 a 0,002
Concreto	0,01 a 0,06

### 1.3 Análise Modal Experimental

O objetivo da análise modal experimental é a obtenção de um modelo matemático do sistema em estudo que relacione a saída (resposta) do sistema por cada unidade da entrada (excitação) aplicada (Nóbrega, 1996). Esse modelo matemático vai permitir descrever de uma forma mais precisa o comportamento dinâmico do sistema. Assim sendo, o processo de análise consiste no ajustamento das curvas teóricas, do modelo adotado, às curvas experimentais, através do qual se obtêm os parâmetros como, por exemplo, frequências naturais, modos de vibração e amortecimento modal. Ewins (1984) afirma que há, basicamente, dois tipos de medição de vibrações: aqueles nos quais somente um parâmetro é

medido (normalmente a resposta do sistema) e aqueles nos quais ambos os parâmetros, excitação e resposta, são medidos.

De acordo com Bilošova (2011), os instrumentos necessários para a realização da análise modal experimental consistem basicamente em três a quatro itens. Primeiro, um mecanismo de excitação por meio de vibradores eletrodinâmicos (com sinal harmônico ou aleatório) ou excitação impulsiva (impacto de um martelo ou um deslocamento inicial no sistema). Segundo, devem ser utilizados equipamentos transdutores, como acelerômetros e células de carga, para medir os variados parâmetros de interesse. A fixação apropriada desses transdutores na estrutura fornece precisamente a sua resposta. Bilošova (2011) descreve variados tipos de materiais de fixação, como: parafusos, cimento especial, fita adesiva dupla face, cera de abelha e ímã, ordenados do melhor para o pior. Terceiro, um conversor analógico – digital (A/D) para transformar os sinais contínuos no tempo em sinais discretos (sinais digitais). Por último, um sistema de computador para o pós-processamentos dos dados medidos, extração dos parâmetros modais, animação dos modos de vibração, etc. A Figura 1 mostra uma típica configuração experimental exemplificando os itens citados.



**Figura 1. Configuração experimental típica**

**Fonte: Bilošova (2011).**

Parâmetros modais, como a frequência natural da vibração e a taxa de amortecimento, podem ser determinados a partir dos sinais medidos. Esses parâmetros são determinados na etapa de processamento de sinais, que tem por objetivo realçar ou extrair informações contidas em um sinal onde a observação direta não poderia revelar (Silva e Maia, 1998).

Para determinação das frequências naturais modais do sistema, o sinal no domínio do tempo deve ser transformado para o domínio da frequência. Há na literatura diferentes operações para realizar essa transformação. Um dos algoritmos mais utilizados é o denominado por Transformadas de Fourier Rápidas (FFT – *Fast Fourier Transform*). Essa expressão, na realidade, refere-se a uma família de eficientes algoritmos de obtenção da Transformada de Fourier Discreta (Soriano, 2014). Atualmente, essa operação é realizada de forma simples com programas e recursos desenvolvidos em MATLAB. Uma descrição detalhada das relações básicas da Transformada de Fourier, bem como desses algoritmos podem ser encontrados nos livros (Ewins, 1984), (Chopra, 1995), (Clough e Penzien, 1995), (Silva e Maia, 1998) e (Soriano, 2014).

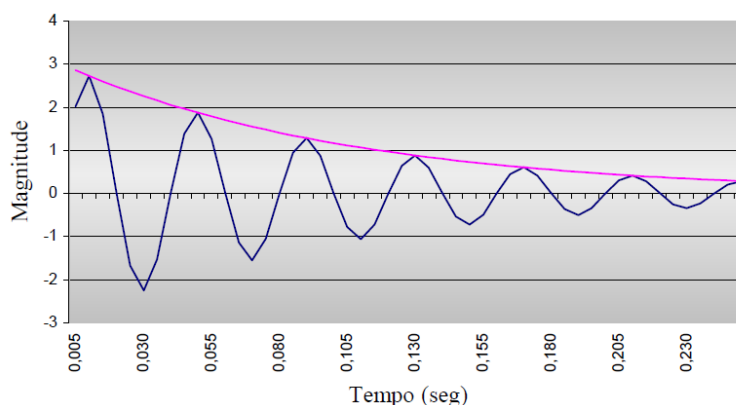
Conforme mencionado, existem várias técnicas para a determinação experimental de taxas de amortecimento modal. Todas elas são baseadas em parâmetros de um sistema

simples massa-mola-amortecedor, com um grau de liberdade, e observados a partir de movimentos de vibração livre e forçada. Dentre os métodos de decaimento da vibração Livre, Craig (1981) cita dois métodos similares que usam a resposta obtida em vibração livre de sistemas de um grau de liberdade para determinar a taxa de amortecimento: Método de decremento logarítmico e Método da meia amplitude. Existe também uma simples técnica de ajuste da curva exponencial de decaimento.

A técnica de ajuste da curva de decaimento é utilizada para sistemas de um grau de liberdade. Na prática, um sistema real possui vários graus de liberdade e sua resposta dinâmica é obtida pela superposição das respostas modais. Sendo assim, para aplicar esta técnica, o sinal deve conter apenas a componente relativa a um modo de vibração (Carvalho, 2002). O procedimento da técnica é simples. Ajusta-se uma curva exponencial pelos pontos dos picos máximos do sinal, conforme Figura 2. A curva envoltória dos picos máximos da resposta é dada por:

$$y(t) = U \cdot e^{-\xi\omega t} \quad (9)$$

Portanto, obtém-se a taxa de amortecimento,  $\xi$ , igualando-se o valor obtido na curva de ajuste ao produto  $-\xi\omega$ .



**Figura 2. Gráfico de um sinal com decaimento**

Fonte: Carvalho (2002).

## 2 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

### 2.1 Metodologia

Para a análise experimental foram realizados dois ensaios de vibração livre em uma viga de aço. O primeiro ensaio foi executado com a viga bi-engastada (Figura 3) com vão entre apoios de 1,900 m e o segundo com a viga em balanço (Figura 4) com vão livre de 1,854 m. O perfil de aço da viga em estudo foi o W200x22,5 da Gerdau Açominas (2018). As propriedades geométricas desse perfil estão disponibilizadas na Tabela 2.

**Tabela 2. Propriedades do perfil W200x22,5**

Massa linear	22,5 kg/m
Altura do perfil	0,206 m
Largura das mesas	0,102 m
Espessura das mesas	0,008 m
Espessura da alma	0,0062 m



**Figura 3. Condições de apoio da viga bi-engastada**

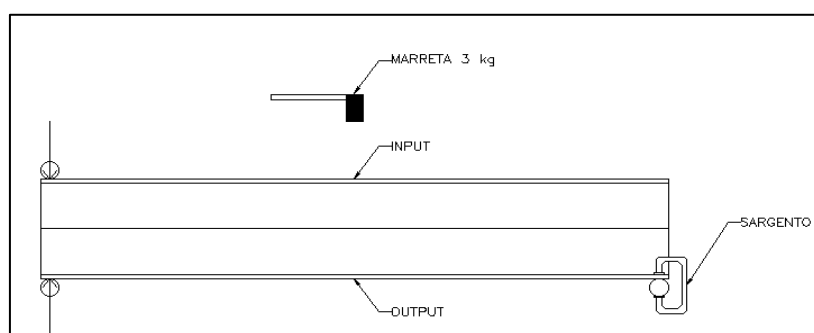
Fonte: Acervo pessoal.



**Figura 4. Condições de apoio da viga em balanço**

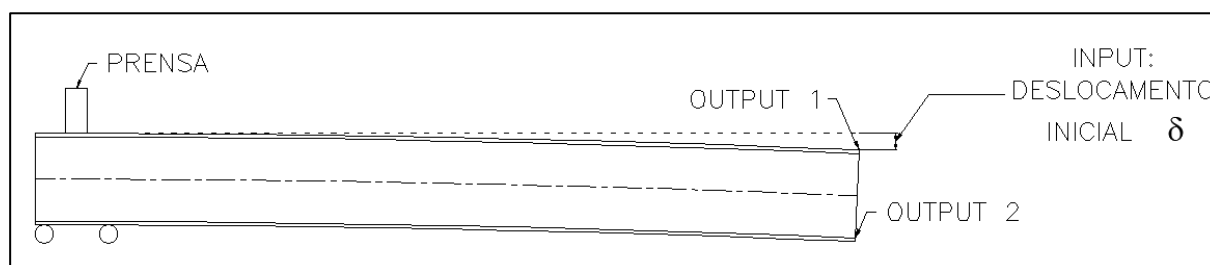
Fonte: Acervo pessoal.

Duas formas de excitação impulsivas foram utilizadas para induzir a vibração livre em cada ensaio. Na viga bi-engastada, a excitação foi induzida por meio do impacto de uma marreta de 3 kg aplicado no meio do vão da viga. Essa posição foi escolhida para a excitação do seu primeiro modo de vibração que tem seu maior deslocamento vertical nesse ponto. Na viga em balanço, a vibração foi induzida pela liberação repentina de uma posição deformada causada por um deslocamento inicial. Esse deslocamento foi dado por um cilindro de concreto amarrado na extremidade em balanço da viga. Essa posição também foi escolhida por se tratar do ponto de maior deslocamento vertical do seu primeiro modo de vibração. Os modelos representando os ensaios realizados da viga bi-engastada e em balanço são mostrados na Figura 5 e Figura 6, respectivamente.



**Figura 5. Pontos de excitação e medição da viga bi-engastada**

**Fonte: Acervo pessoal.**



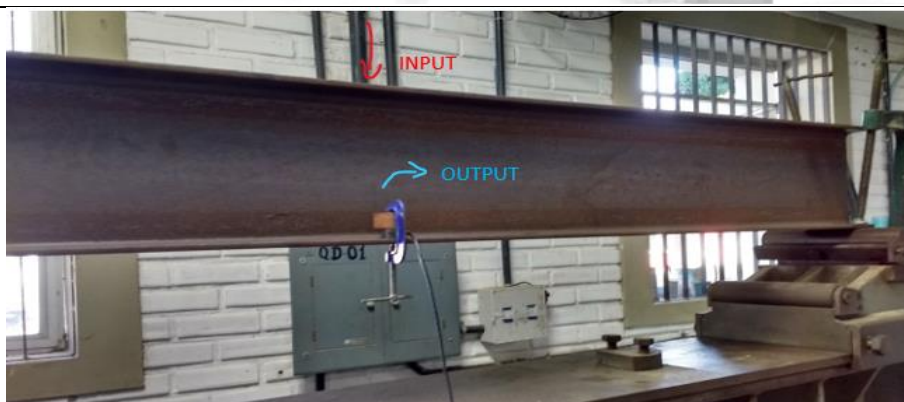
**Figura 6. Pontos de excitação e medição da viga em balanço**

**Fonte: Acervo pessoal.**

Para a aquisição dos sinais da aceleração, foram utilizados dois acelerômetros triaxiais de capacidade nominal de  $\pm 196,1 \text{ m/s}^2$  ( $\pm 20G$ ), um sistema integrado e um programa de aquisição de dados denominados ADS2002IP e Lynx AqDados, respectivamente. As ligações dos acelerômetros ao sistema de aquisição de dados foram por meio de  $\frac{1}{4}$  de ponte completa de Wheatstone.

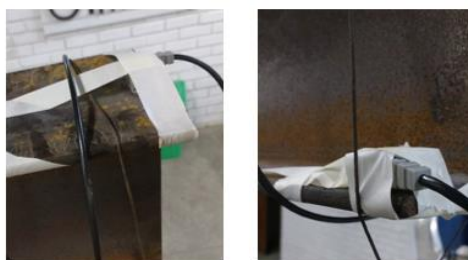
Diferentes tipos de conexão dos acelerômetros nas vigas foram utilizados em cada ensaio. Na viga bi-engastada, apenas um acelerômetro foi fixado em sua mesa inferior por meio de um sargento que atua de forma semelhante a um parafuso (Figura 7). Na viga em balanço, foi fixado um acelerômetro em cada mesa do perfil por meio de fita adesiva dupla face entre ambos e outra fita adesiva em volta do acelerômetro (Figura 8).





**Figura 7. Fixação do acelerômetro na viga bi-engastada**

**Fonte: Acervo pessoal.**



**Figura 8. Fixação dos acelerômetros na viga em balanço**

**Fonte: Acervo pessoal.**

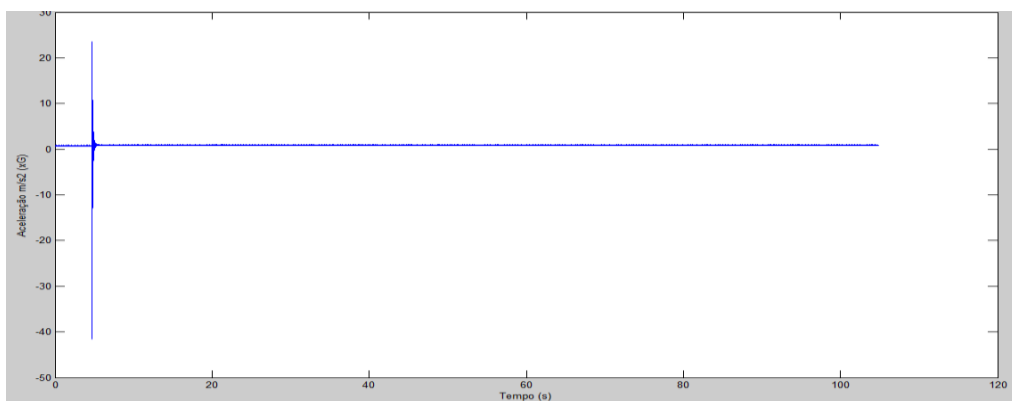
## **2.2 Resultados**

Após a aquisição dos sinais, os dados das medições foram processados pelos algoritmos desenvolvidos em MATLAB.

A Figura 9 e a Figura 12 mostram o sinal no domínio do tempo, isto é, os gráficos da aceleração, da viga bi-engastada e da viga em balanço, respectivamente. Para evitar os efeitos de vazamento espectral, foi aplicada, primeiramente, uma janela retangular nos sinais obtidos, realizando o truncamento do impulso gerado pela excitação. Essa vibração foi dissipada em menos de um segundo após o impacto. Em seguida, foi aplicada a janela de Hanning, gerando os sinais representados na Figura 10 e na Figura 13. Logo após, esses sinais foram transformados para o domínio da frequência usando o algoritmo da FFT no MATLAB. As densidades espectrais de potência desses sinais estão mostradas na Figura 11 e na Figura 14. O pico de maior amplitude aconteceu na frequência 338,1 Hz para a viga bi-engastada e 55,49 Hz para a viga em balanço, identificadas como a frequência fundamental obtida experimentalmente para cada ensaio.

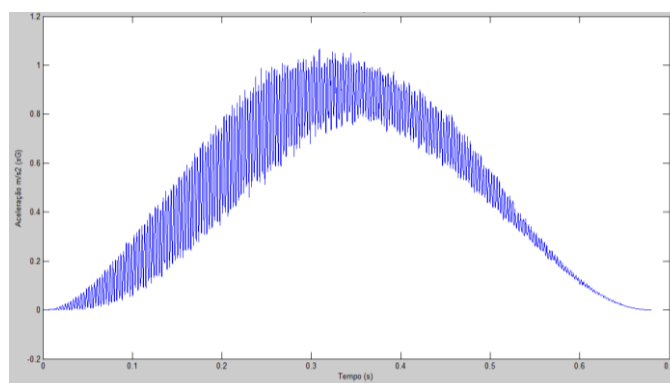
Vale ressaltar que outro pico foi identificado próximo ao pico da primeira frequência natural no ensaio da viga em balanço (Figura 12). Essa frequência foi de 60 Hz e está relacionada ao ruído da rede elétrica no sinal obtido pelos acelerômetros. Os condutores elétricos da rede de energia que alimenta os equipamentos não são blindados e por isso funcionam como antenas irradiando sinais da frequência de 60 Hz, em nosso país. Esses sinais

podem ser captados por circuitos sensíveis, como os usados em acelerômetros. Para evitar esse ruído, os cabos dos transdutores devem ser devidamente blindados para acoplar os sinais ao conversor A/D e todos os equipamentos devem ser aterrados adequadamente. Filtros passa-baixas também podem ser utilizados para este fim, porém a frequência de corte deve ser ajustada de forma que não afete os sinais capturados.



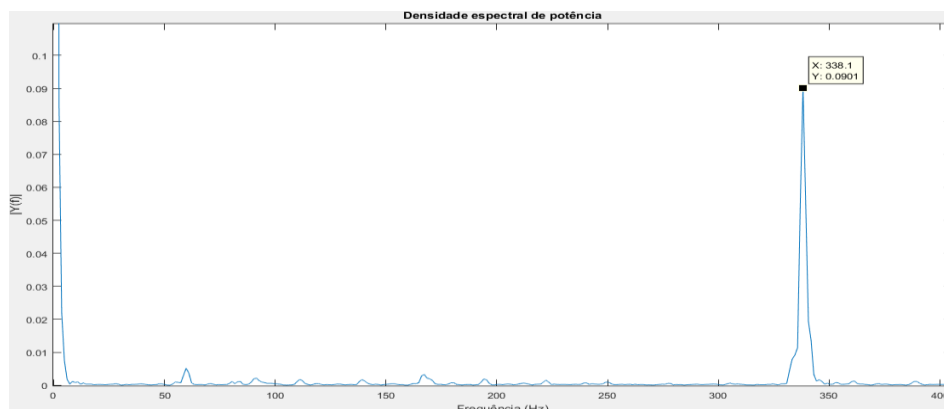
**Figura 9. Gráfico da aceleração da viga bi-engastada**

Fonte: Acervo pessoal.



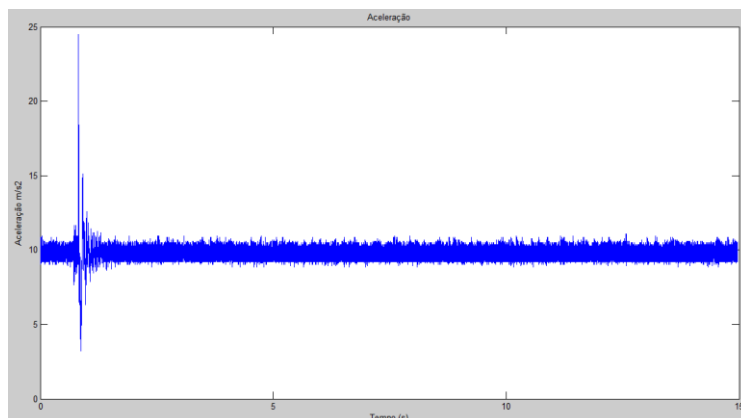
**Figura 10. Sinal no domínio do tempo com a aplicação da janela de Hanning**

Fonte: Acervo pessoal.



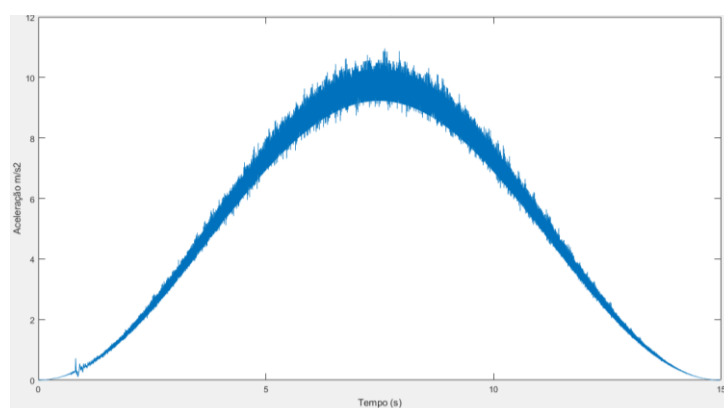
**Figura 11. Densidade espectral de potência do sinal após o janelamento**

Fonte: Acervo pessoal.



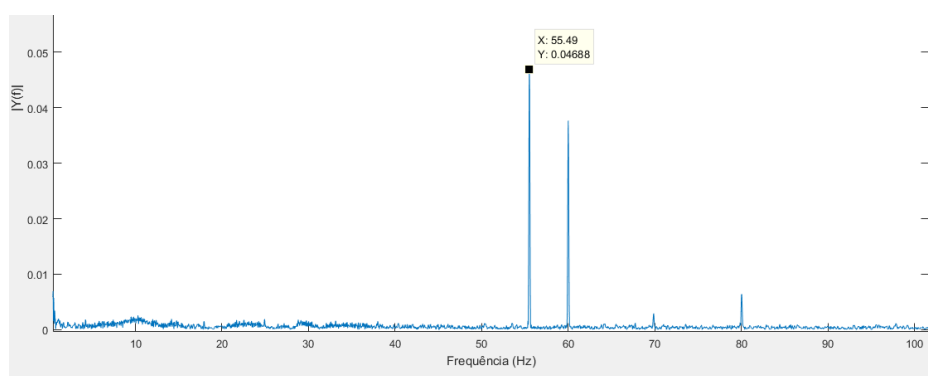
**Figura 12. Gráfico da aceleração da viga em balanço**

Fonte: Acervo pessoal.



**Figura 13. Sinal no domínio do tempo com a aplicação da janela de Hanning da viga em balanço**

Fonte: Acervo pessoal.

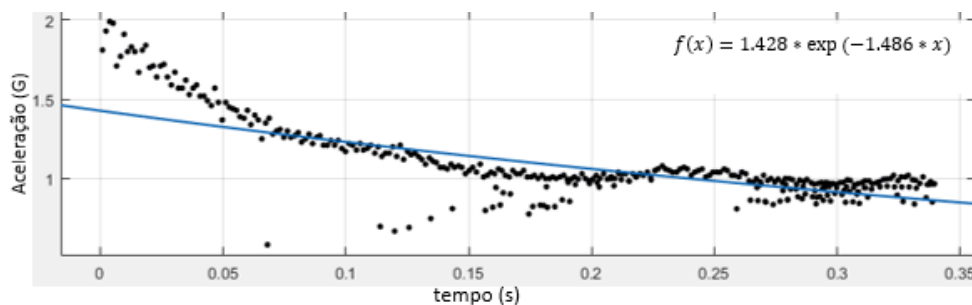


**Figura 14. Densidade espectral de potência da viga em balanço**

Fonte: Acervo pessoal.

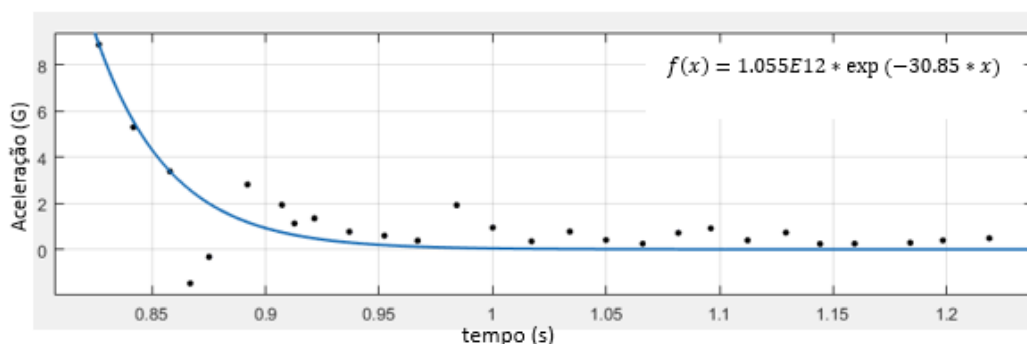
Além das frequências fundamentais, foi possível determinar a taxa de amortecimento com os sinais obtidos nos ensaios. Para isso, utilizou-se o método do ajuste de curvas. Primeiro, para os sinais da Figura 9 e da Figura 12, obtiveram-se os picos máximas das suas curvas de decaimento. Após isso, utilizando a função *Curve Fitting App* no MATLAB, as

curvas exponenciais foram ajustadas a esses picos, conforme a Figura 15 e a Figura 16. Igualando-se o valor  $b$  obtido na curva de ajuste,  $f(x) = ae^{-bx}$ , ao produto  $\xi\omega$ , determina-se a taxa de amortecimento do sistema. Com isso, a taxa de amortecimento para a viga bi-engastada e para a viga em balanço foram de 0,070 % e 8,9 %, respectivamente.



**Figura 15. Ajuste da curva exponencial para o sinal da viga bi-engastada**

Fonte: Acervo pessoal.



**Figura 16. Ajuste da curva exponencial para o sinal da viga em balanço**

Fonte: Acervo pessoal.

### 3 MODELO EM ELEMENTOS FINITOS DAS VIGAS

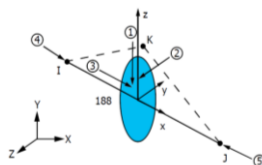
#### 3.1 Propriedades Físicas dos Materiais

As vigas metálicas são em aço ASTM A572-Grau 50 e adotou-se, de acordo com a ABNT NBR 8800:2008, o módulo de elasticidade igual a 200 GPa, o coeficiente de Poisson igual a 0,3 e a densidade igual a 7850 kg/m<sup>3</sup>. O material foi considerado linear, elástico e isotrópico.

#### 3.2 Tipos de Elementos Finitos

O elemento adotado para simulação das vigas foi o BEAM188. Este elemento é adequado para a análise de estruturas de vigas que inclui efeitos de deformação por cisalhamento. Ele tem seis ou sete graus de liberdade em cada nó. Estes incluem translações nas direções x, y e z e rotações nas direções x, y e z. Um sétimo grau de liberdade (empenamento) é opcional. Este

elemento é adequado para aplicações lineares e não-lineares, de grande rotação ou de grandes deformações.



**Figura 17. Elemento BEAM188**

Fonte: ANSYS 18.0.

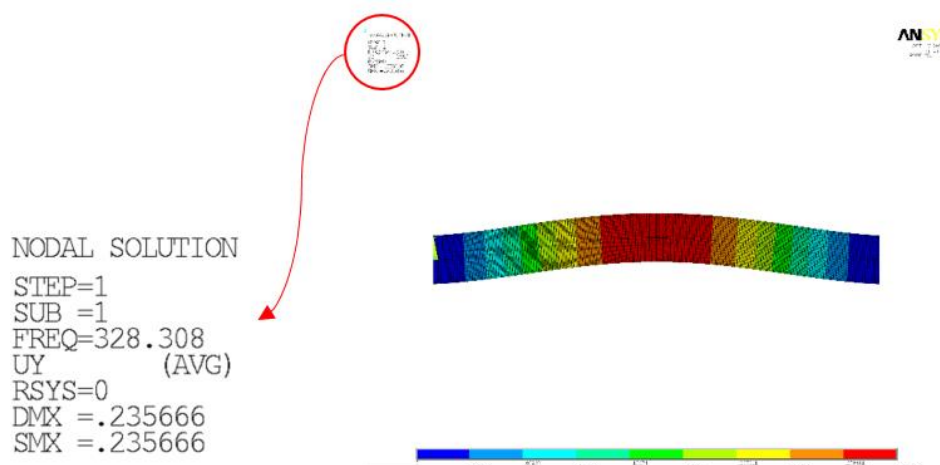
### 3.3 Condições de Contorno

Para a simulação das condições de contorno de viga bi-engastada e viga em balanço, foram aplicados deslocamentos e rotações nulos de acordo com a condição em estudo. Para a viga bi-engastada, ambos os nós das extremidades tiveram as três rotações e translações impedidas. Na viga em balanço, apenas uma extremidade teve os seis graus de liberdade impedidos.

### 3.4 Comparação entre resultados numéricos e experimentais

Após executar-se a análise modal para as duas vigas ensaiadas, a primeira frequência natural do sistema foi obtida. A Figura 18 e a Figura 19 mostram o modo de vibração obtido e sua respectiva frequência.

Para comparação dos resultados foi calculado a porcentagem de desvio entre a frequência obtida numericamente e experimentalmente. O resultado numérico foi assumido como o valor aproximado, enquanto que o experimental o valor real. Assim, encontrou-se um desvio de 2,9% entre os resultados para a viga bi-engastada e 14,57% para a viga em balanço.



**Figura 18. Resultado do modelo numérico da viga bi-engastada**

Fonte: Acervo pessoal.

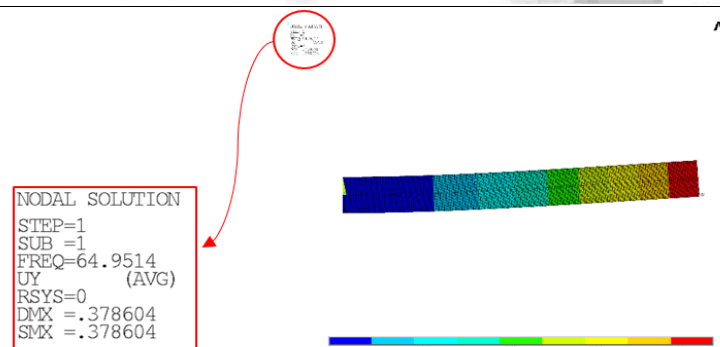


Figura 19. Resultado do modelo numérico da viga em balanço

Fonte: Acervo pessoal.

## 4 CONCLUSÕES

Foi determinada experimentalmente e numericamente a frequência fundamental de uma viga metálica bi-engastada e em balanço. Com os resultados experimentais, obteve-se a taxa de amortecimento desse material por meio do ajuste da curva de decaimento em vibração livre.

O desvio entre a frequência fundamental obtida experimentalmente e numericamente para a viga bi-engastada foi de 2,9 % e 14,57 % para a viga em balanço. Esses valores foram considerados satisfatórios, validando a técnica experimental utilizada. Como o desvio foi menor para a viga bi-engastada, concluiu-se que a excitação pelo impacto de uma marreta e a fixação do acelerômetro na estrutura com o uso do sargento apresentaram resultados mais satisfatórios que a excitação por deslocamento inicial e fixação por meio de fita adesiva. Além disso, o desvio entre as frequências pode também estar relacionado com a diferença entre as condições de contorno simuladas numericamente e realizadas experimentalmente.

A taxa de amortecimento modal obtida experimentalmente para a viga bi-engastada (0,070 %) apresentou resultados levemente superiores ao da literatura (entre 0,04 % e 0,05 %), enquanto que para a viga em balanço (8,9 %) foi muito superior. Portanto, concluiu-se que o procedimento experimental utilizado para a viga bi-engastada apresentou melhores resultados que o utilizado para a viga em balanço.



---

## **AGRADECIMENTOS**

À Capes. À UFES, Universidade Federal do Espírito Santo. Aos Laboratórios Experimentais da Engenharia Civil (Labeciv) da UFES.

## **REFERÊNCIAS**

ANSYS®: *Academic Research. Multiphysics. Realease 18.0.*

Bilošova, A., *Modal Testing*, VŠB TU Ostrava, 2011.

Carvalho, F. W. L. *Procedimento Experimental para Avaliação do Fator de Amortecimento em Estruturas*. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Universidade Federal do Minas Gerais, Brasil.

Chopra, A. K. *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1995.

Clough, R. W.; Penzien, J. *Dynamics of Structures*. 3. ed. Berkeley: Computers & Structures, 1995.

Craig, R. R Jr. *Structural Dynamics – An Introduction to Computer Methods*. New York: John Wiley & Sons, 1981.

Ewins, D. J. *Modal testing – Theory and Practice*. Research Studies Press LTD, Baldock, 1984.

Gerdau Açominas, *Perfis Estruturais Gerdau – Tabela de Bitolas*, em <https://www.gerdau.com/br/pt/productsservices/products/Document%20Gallery/perfil-estrutural-tabela-de-bitolas.pdf> acessado em 01/03/2018.

Lazan, B. J., *Damping of Materials and Members in Structural Mechanics*. Pergamon Press Ltd. London, 1968.

Nóbrega, J. M. A. N. C. *Modelação de estruturas por análise modal experimental e acoplamento dinâmico*. 1996. 266f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

Silva, J. M. M.; Maia, N. M. M. *Modal Analysis and Testing: Proceedings of the NATO advanced study institute*. Sesimbra: Applied science, 1998.

Soriano, H. *Introdução à Dinâmica das Estruturas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.