

Área temática: Operações e logística

**REVISÃO SISTEMÁTICA SOBRE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM MODELOS
MATEMÁTICOS COM SOLUÇÃO DEGENERADA**

RESUMO

A utilização de modelos matemáticos como ferramenta de apoio a decisão possibilita que gestores avaliem as alternativas antes de implementá-las, proporcionando um melhor uso dos recursos disponíveis. Uma forma de aprofundar essa avaliação é por meio da análise de sensibilidade do modelo, em que é possível verificar como mudanças em seus parâmetros afetam a solução ótima. Porém, essa análise torna-se imprecisa quando o modelo apresenta soluções degeneradas. Dessa forma, o objetivo do presente trabalho foi estudar formas de realizar a análise de sensibilidade em modelos matemáticos de programação linear com soluções degeneradas. Assim, foi realizada uma revisão sistemática de artigos sobre o tema, seguindo o método proposto por Sampaio e Mancini (2007), e elaborado um quadro com os resumos dos métodos apresentados pelos autores. Por fim, a pesquisa atingiu seu objetivo ao identificar métodos de análise de sensibilidade em modelos degenerados.

Palavras-chave: Programação Linear. Análise de Sensibilidade. Soluções Degeneradas.

ABSTRACT

The use of mathematical models as a decision support tool allows managers to evaluate alternatives before implementing them, providing a better use of available resources. One way to deepen this evaluation is through the sensitivity analysis of the model, in which it is possible to verify how changes in its parameters affect the optimal solution. However, this analysis becomes imprecise when the model presents degenerate solutions. Thus, the objective of the present work was to study ways of performing sensitivity analysis in mathematical models of linear programming with degenerate solutions. Thus, a systematic review of articles on the theme was carried out, following the method proposed by Sampaio and Mancini (2007), and a table with summaries of the methods presented by the authors. Finally, the research reached its goal by identifying methods of sensitivity analysis in degenerate models.

Key words: *Linear Programming, Sensitivity Analysis, Degeneracy.*

1 INTRODUÇÃO

As organizações, tanto públicas quanto privadas, possuem em comum a busca pela eficiência, isto é, ao melhor uso dos recursos disponíveis em suas operações. Assim, elas estão sempre tomando decisões a respeito da utilização dos seus recursos humanos, materiais e monetários, visando o alcance dos objetivos organizacionais. Porém, o processo decisório é complexo e envolve diversos fatores internos e externos ligados à organização.

Dessa forma, o uso de ferramentas de apoio à tomada de decisão pode orientar os gestores nesse processo, pois propicia maior embasamento e melhor conhecimento do problema em análise. Nessa realidade, insere-se a pesquisa operacional (PO), que por meio do desenvolvimento e aplicação de métodos científicos a questões que envolvem as operações de uma organização, auxilia “na solução de problemas de otimização, na tomada de decisões e no gerenciamento de sistemas, selecionando as melhores decisões, dentre todas as possíveis” (BRESSAN, ZEBEDIFF, 2015, p. 86).

A fim de encontrar as melhores soluções, a PO faz uso de modelos matemáticos. Segundo Cardoso (2011), um modelo matemático é uma representação simplificada de uma situação real, que relaciona as variáveis com os objetivos da melhor maneira, obedecendo às limitações existentes (apud BILINSKI, P. A. et al, 2016). Assim, ao utilizar a modelagem, os gestores têm a possibilidade de realizar testes que avaliam as opções antes de serem implementadas, proporcionando uma melhor tomada de decisão e economia de recursos.

Uma forma dos gestores avaliarem as opções de soluções para um determinado problema é por meio da análise de sensibilidade do modelo, isto é, “a análise dos efeitos ocasionados no modelo caso seus parâmetros mudem” (COLIN, 2013, p. 74). Por meio dessa análise, o tomador de decisão pode avaliar diversos cenários e observar como a solução seria afetada em cada caso. Porém, quando o modelo apresenta soluções degeneradas (refere-se ao fato de ter uma ou mais variáveis básicas com valor igual a zero), a análise de sensibilidade torna-se imprecisa e não confiável. Assim, nesse caso, a análise de sensibilidade requer uma interpretação mais cautelosa para que não ocorram decisões erradas e desvantagens financeiras e/ou estratégicas.

Observa-se que as pesquisas sobre análise de sensibilidade quando existe degeneração são escassas e pouco aplicáveis. Segundo Koltai e Tatay (2011), os trabalhos sobre esse tema possuem duas abordagens diferentes: (a) teórica: em que os trabalhos apresentam as propriedades e os efeitos da degeneração; e (b) prática: em que os trabalhos discutem o efeito enganoso da degeneração na tomada de decisões gerenciais. Porém, poucos trabalhos mostram como o tomador de decisão pode obter os resultados corretos da análise de sensibilidade quando existe degeneração.

Nesse sentido, esse trabalho apresenta como objetivo a realização de uma revisão sistemática em artigos publicados entre 2000 e 2019, a fim de identificar métodos de realizar a análise de sensibilidade em um modelo matemático de programação linear que apresenta solução degenerada

A escolha do tema da presente pesquisa justifica-se pela relevância da temática para o mundo científico, visto que em uma pesquisa prévia de literatura realizada pelos autores deste trabalho, foi observado que existem poucos trabalhos que abordam a análise de sensibilidade, principalmente em modelos com degeneração, o que indica que ainda há muito a ser explorado sobre o tema.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Programação Linear e Dualidade

A Programação Linear (PL) é uma técnica que usa modelos matemáticos para lidar com problemas de alocação de recursos limitados entre atividades que competem entre si, bem como outros problemas que possuem a formulação matemática similar (HILLIER, LIEBERMAN, 2013). Os modelos de PL, de forma geral, são formados por variáveis de decisão, parâmetros, função objetivo e restrições. As variáveis de decisão são aquelas que podem ser controladas pelo tomador de decisão, logo a solução do problema é encontrada ao testar valores dessas variáveis. Os parâmetros são variáveis do modelo que não podem ser controladas pelo tomador de decisão, portanto refere-se a valores fixos que devem ser considerados para a solução do problema. A função objetivo representa a medida de desempenho a ser maximizada ou minimizada no modelo. As restrições, por outro lado, representam as limitações ou exigências no conjunto de decisões possíveis (COLIN, 2013).

Outra característica importante dos problemas de PL é a sua dualidade, isto é, todo problema de PL pode ser expresso de duas formas. O problema original é chamado de primal e o problema associado a ele, dual. “As propriedades do primal estão intimamente ligadas às do dual, sendo o valor ótimo da função objetivo o mesmo para as duas formas” (CAIXETA-FILHO, 2011, p. 54). Dessa forma, o primal e o dual possuem diversas relações. O Quadro 1 apresenta algumas das relações que devem ser consideradas ao transformar o primal em dual, ou vice-versa.

Quadro 1 - Relações entre os problemas primal e dual

Problema primal	Problema dual
Função objetivo de maximizar	Função objetivo de minimizar
Coeficientes da função objetivo	Constantes das restrições
Constantes das restrições	Coeficientes da função objetivo
Número de variáveis	Número de restrições
Número de restrições	Número de variáveis
Restrição tipo \leq	Restrição tipo \geq
Restrição tipo \geq	Variável ≤ 0
Restrição tipo =	Variável sem restrição de sinal

Fonte: Elaborado pelos autores.

Segundo Lachtermacher (2018), existem duas razões para o estudo de problemas duais. A primeira está relacionada à quantidade de restrições. Quando o primal possui muitas restrições é mais fácil resolver o problema pelo seu dual, pois a quantidade de restrições será igual o número de variáveis da função objetivo do primal. Portanto, provavelmente será um número menor de restrições, o que facilita para encontrar a solução ótima. A segunda refere-se às interpretações econômicas obtidas com os valores das variáveis de decisão do problema dual (também chamadas de preço-sombra – *shadow price* – ou preço dual). De acordo com o Teorema de Folga Complementar, as variáveis de decisão do dual estão associadas as variáveis de folga/excesso do primal. De forma geral, elas representam o valor pelo qual a função objetivo seria alterada, caso a quantidade de recurso fosse reduzida/aumentada uma unidade. Para analisar esse tipo de mudança, existe um procedimento realizado nos modelos de PL que é chamado de análise de sensibilidade.

2.2 Análise de Sensibilidade em Programação Linear

Ao resolver problemas de PL, assume-se que todos os parâmetros do modelo (coeficientes da função objetivo, coeficientes das variáveis das restrições e os termos independentes) são constantes e conhecidos com certeza (FÁVERO, BELFIORE, 2013). Porém, a aplicação da solução no mundo real pode gerar alterações em alguns parâmetros, causando incerteza sobre a qualidade da solução ótima. Dessa forma,

para minimizar a imprecisão a respeito dessas mudanças, realiza-se uma análise para verificar as possíveis variações, para cima e para baixo, dos valores dos parâmetros do modelo que não provocam alteração na solução ótima (LACHTERMACHER, 2006). Tal estudo é denominado de análise de sensibilidade.

Os principais objetivos da análise de sensibilidade são: (1) identificar os parâmetros sensíveis, aqueles que se alterados modificam a solução ótima; e (2) determinar os intervalos de valores possíveis para os parâmetros não sensíveis, aqueles ao longo do qual a solução ótima permanecerá inalterada (HILLIER, LIEBERMAN, 2013). Assim, a análise de sensibilidade auxilia o tomador de decisão avaliar como mudanças no modelo e no mundo real podem afetar a solução (COLIN, 2013), além de identificar quanto a solução está dependente de uma determinada constante ou coeficiente (LACHTERMACHER, 2006).

Segundo Colin (2013), do ponto de vista teórico, a análise de sensibilidade pode acontecer em: alterações nos valores dos coeficientes da função-objetivo; alterações nos lados direitos das restrições; alterações nos coeficientes (lados esquerdos) das restrições; introdução e retirada de variáveis e restrições. Em cada um desses casos, a análise de sensibilidade é realizada de uma forma e utiliza indicadores que apresentam as mudanças possíveis em cada um desses fatores, sem que a solução ótima seja alterada. Esses indicadores são o custo-reduzido, o preço-sombra, o aumento permitido e a redução permitida.

O custo reduzido, também chamado de *reduced cost*, representa o custo de incluir uma variável na solução ótima, ou seja, fazer com que uma variável deixe de ter valor igual à zero na solução ótima. Assim, observa-se que o custo reduzido é uma medida calculável apenas para as variáveis não básicas do modelo, ou seja, aquelas que assumem valores nulos na solução ótima. Logo, para as variáveis básicas, os custos reduzidos serão sempre nulos. (FÁVERO, BELFIORE, 2013).

O preço-sombra, também chamado de *shadow price* ou preço dual, representa o valor unitário equivalente de um recurso. Esse conceito é observado principalmente nas análises de sensibilidade a partir de alterações no valor de uma das constantes do lado direito da restrição, ou seja, quando há variações na disponibilidade de recursos. Assim, o preço-sombra demonstra o aumento ou redução no valor da função objetivo caso seja adicionada ou retirada uma unidade na quantidade atual de recursos disponíveis na restrição (FÁVERO, BELFIORE, 2013).

Por fim, os relatórios de sensibilidade também apresentam os limites inferiores e superiores das variáveis de decisão, dos coeficientes da função objetivo e das constantes das restrições. Esses limites são chamados de redução permitida (*allowable decrease*) e aumento permitido (*allowable increase*). Eles representam os menores e maiores valores que as variáveis de decisão, os coeficientes da função-objetivo e as constantes das restrições podem assumir (considerando que todas as outras variáveis permaneçam constantes) sem que nenhuma restrição deixe de ser satisfeita, isto é, sem que a solução se torne inviável (LACHTERMACHER, 2018).

Os valores de redução permitida e aumento permitido podem ser iguais a zero algumas vezes. Esse fato pode indicar duas situações diferentes: (1) quando ocorre para as restrições, significa que a solução ótima é degenerada, isto é, a solução do modelo possui uma ou mais variáveis básicas com o valor igual a zero; (2) quando ocorre para os coeficientes da função-objetivo (não existindo soluções degeneradas) significa a existência de soluções ótimas múltiplas, ou seja, diferentes valores para as variáveis de decisão alcançam o mesmo valor ótimo na função objetivo.

Na presença de soluções ótimas múltiplas, é possível calcular soluções alternativas utilizando as informações do relatório de sensibilidade. Porém, a presença

de soluções ótimas degeneradas impacta na interpretação do relatório de sensibilidade de diversas formas, por isso deve-se tomar cuidado ao analisá-lo em situações assim.

2.3 Solução Degenerada

A degeneração ocorre quando uma ou mais variáveis básicas tem o valor igual a zero. Assim, “se a solução ótima para uma PL tiver menos de m variáveis positivas, ela é chamada de solução degenerada” (MOORE, WEATHERFORD, 2005, TEA-4), sendo m o número de restrições. Normalmente, é possível identificar uma solução degenerada pelo relatório de sensibilidade quando o aumento permitido ou redução permitida para um preço-sombra é zero.

Segundo Taha (2008), do ponto de vista prático, uma solução degenerada revela que o modelo tem no mínimo uma restrição redundante. Já do ponto de vista teórico, a degeneração tem duas implicações, sendo elas:

- a) O fenômeno da ciclagem ou do retorno cíclico: as soluções entram em uma sequência de alterações que nunca melhoram o valor da função objetivo e nunca satisfazem a condição de otimalidade;
- b) Interações com categorização diferentes de suas variáveis como básicas e não básicas resultam em valores idênticos para o valor da função objetivo.

Quando uma solução ótima é degenerada, os resultados obtidos na análise de sensibilidade deixam de ser confiáveis. Assim, é necessário observar alguns pontos no momento da sua interpretação. Segundo Moore e Weatherford (2005), Ragsdale (2001, apud LACHTERMACHER, 2018), Ragsdale e Lachtermacher (2009, apud BELFIORE, FÁVERO, 2013) as seguintes conclusões podem ser tiradas nessa situação:

- a) Os custos reduzidos e/ou preços-sombras (e seus intervalos) ainda são válidos, porém podem não ser únicos. Dessa forma, é possível que duas soluções diferentes sejam geradas, apresentando os mesmos valores ótimos para as variáveis de decisão e valores da função objetivo, mas com alguns ou todos os custos reduzidos e/ou preços-sombra (e intervalos) diferentes;
- b) Os intervalos de variação (aumento permitido e redução permitida) dos coeficientes da função objetivo ainda são válidos, porém o coeficiente pode assumir valores fora desse intervalo e ainda assim não alterar a solução ótima;
- c) Quando o intervalo de variação (aumento permitido e redução permitida) do coeficiente de uma das variáveis da função objetivo também for zero, a afirmação de ocorrência de múltiplas soluções ótimas passa a não ser confiável.

De forma geral, observa-se que na presença de soluções ótimas degeneradas, os resultados da análise de sensibilidade tornam-se incertos. Assim, é preciso mais cálculos para obter as informações necessárias para a tomada de decisões gerenciais (JANSEN et al., 1997 apud KOLTAL, TATAY, 2011).

3 METODOLOGIA

Essa pesquisa trata-se de uma revisão sistemática de literatura, sendo classificada de acordo com Fontelles, Simões, Farias e Fontelles (2009) como aplicada, observacional, qualitativa, exploratória, bibliográfica, transversal e retrospectiva.

O método de revisão sistemática que será utilizado é o apresentado por Sampaio e Mancini (2007). Segundo esses autores, o processo de elaboração de um estudo de revisão sistemática possui cinco passos, sendo eles: (1) definição do

problema; (2) busca de evidências; (3) seleção dos estudos; (4) análise da qualidade dos estudos; e (5) apresentação dos resultados.

O primeiro passo refere-se à definição da pergunta de pesquisa. No caso dessa pesquisa, a pergunta de referência é: “Como fazer e interpretar a análise de sensibilidade em problemas matemáticos de programação linear que apresentam soluções degeneradas?”. Tal pergunta aprofunda o último tópico do referencial teórico, em que foi apresentado que a presença de soluções degeneradas torna os resultados da análise de sensibilidade incertos. Assim, essa revisão sistemática tem como objetivo encontrar o que deve ser feito para contornar essa situação e obter resultados confiáveis para o tomador de decisões.

Com a pergunta de pesquisa definida, o segundo passo refere-se à busca de evidências. Segundo Sampaio e Mancini (2007, p. 85), esse passo “tem início com a definição de termos ou palavras-chave, seguida das estratégias de busca, definição das bases de dados e de outras fontes de informação a serem pesquisadas”. Para a revisão sistemática dessa pesquisa, as palavras-chave e as estratégias de busca foram:

- a) Tipo de trabalho: artigos que apresentem as palavras-chave (*sensitivity analysis, linear programming e degeneracy*) ou a frase (*sensitivity analysis in linear programming under degeneracy*) no assunto, no resumo ou nas palavras-chave apresentadas pelo autor. O título não foi escolhido, porque isso poderia restringir demais os resultados. Além disso, o uso de palavras em inglês tem como objetivo ampliar a busca, visto que foi observado que praticamente todos os artigos sobre o assunto estão publicados nessa língua;
- b) Período determinado: 2000-2019, a fim de analisar estudos mais recentes sobre o tema;
- c) Operador lógico: “E”, a fim de direcionar as buscas para artigos que apresentem as três palavras-chave conjuntamente, e não uma ou outra.

Além disso, segundo Sampaio e Mancini (2007), a escolha das bases de dados é importante, pois auxilia em uma procura eficaz. Assim, foram escolhidas dez bases de dados para serem consultadas, sendo elas:

- a) Cabell’s directories, International Abstracts in Operations Research (IAOR), SciELO e SCOPUS: por serem bases de dados indicadas pela SOBRAPO, em que os artigos publicados em Pesquisa Operacional são indexados;
- b) Periódico Capes, Portal de Busca Integrada USP, Google Acadêmico, Science Direct, IEEE Xplore Digital Library e Springer Link: por apresentarem resultados de trabalhos de diversas bases de dados e por possuírem credibilidade no mundo científico.

O terceiro passo refere-se à seleção dos artigos, que será feita por meio da busca nas bases de dados, conforme as estratégias definidas no passo anterior, e registro de todos os resultados obtidos. Em seguida, será realizada uma pré-análise dos artigos, a fim de excluir os que forem repetidos. A relação de artigos encontrados em cada base de dados será apresentada em um quadro contendo a base de dados, a forma que a busca foi feita e a quantidade de artigos encontrada.

No quarto passo será avaliada a qualidade dos artigos restantes do terceiro passo, por meio da análise dos seus resumos (*abstracts*). Assim, serão incluídos na revisão aqueles que apresentarem no resumo que o artigo tratará de análise de sensibilidade em problemas de programação linear com degeneração. Caso o resumo não apresente essas características, o artigo será excluído da revisão. A relação de artigos incluídos será apresentada em um quadro contendo a base de dados, o nome do artigo, o autor e o ano de publicação.

Por fim, o quinto passo trata da análise dos artigos incluídos na revisão e apresentação dos resultados obtidos. Assim, após a leitura dos artigos incluídos na revisão sistemática, as informações apresentadas nos artigos serão resumidas em um quadro com o título do artigo, autor, método de análise de sensibilidade apresentado, observações sobre o método, forma que o método foi exemplificado/aplicado e programas usados pelo autor. Por fim, será apresentada uma conclusão informando as evidências encontradas.

4 RESULTADOS

4.1 Seleção dos Estudos

Considerando a pergunta de pesquisa e os critérios de busca definidos anteriormente, as buscas nas bases de dados foram realizadas. O Quadro 2 a seguir apresenta seus resultados.

Quadro 2 - Resultados das buscas nas bases de dados

Base de dados	Forma de busca	Quantidade de artigos encontrados
<i>Cabell's directories - Library University of Michigan</i>	<u>Advanced Search:</u> (1) <i>Subject: Sensitivity analysis AND Subject: Linear programming AND Subject: Degeneracy;</i> (2) Additional search options – Publication Date: Between 2000 to 2010	10
<i>International Abstracts in Operations Research (IAOR)</i>	<u>Paper Filter:</u> (1) <i>Search Text: Sensitivity analysis in linear programming under degeneracy.</i>	1
SciELO	<u>Busca Avançada:</u> (1) Todos os índices: <i>Sensitivity analysis; Linear programming; Degeneracy;</i> (2) Todos os índices: <i>Sensitivity analysis in linear programming under degeneracy.</i>	0
SCOPUS	<u>Document Search:</u> (1) <i>Search - Article title, Abstract, Keywords: Sensitivity analysis AND Linear programming AND Degeneracy;</i> (2) Limit – Data range (inclusive): Published 2000 to present	9
Periódicos Capes	<u>Busca Avançada:</u> (1) No assunto contém <i>Sensitivity analysis; Linear programming; Degeneracy;</i> (2) Data inicial: 01/01/2000; (3) Data final: 31/12/2019.	8
Portal de Busca Integrada USP	<u>Busca Avançada no Acervo:</u> (1) Assunto contém <i>Sensitivity analysis</i> E Assunto contém <i>Linear programming</i> E Assunto contém <i>Degeneracy;</i> (2) Data inicial: 01/01/2000; (3) Data final: 31/12/2019.	2
Google Acadêmico	<u>Pesquisa Avançada:</u> (1) Com todas as palavras: <i>Sensitivity analysis; Linear programming;</i>	22

	<i>Degeneracy; Operations research; (2) Com a frase exata: "Sensitivity analysis in linear programming under degeneracy; (3) Onde minhas palavras ocorrem: em qualquer lugar do artigo; (4) Período específico: 2000-2019.</i>	
<i>Science Direct</i>	<i>Advanced Search: (1) Find articles with these terms: Sensitivity analysis, Linear programming, Degeneracy; (2) Title, abstract ou author-specified keywords: Sensitivity analysis, Linear programming, Degeneracy; (3) Refine by – Years: 2000, 2007, 2011</i>	4
<i>IEEE Xplore Digital Library</i>	<i>Advanced Search Options: (1) Sensitivity analysis in Abstract/Author Keywords AND Linear programming in Abstract/Author Keywords AND Degeneracy in Abstract/Author Keywords; (2) Sensitivity analysis in linear programming under degeneracy in Abstract; (3) Publication year – Specify Year Range: From: 2000; To: Present.</i>	0
<i>Springer Link</i>	<i>Advanced Search: (1) With all of the words: Sensitivity analysis, Linear programming, Degeneracy; (2) Show documents published between: Start year 2000 and End year 2019; Refine Your Search: (3) Content Type – Article; (4) Subdiscipline – Operations Research/Decision Theory; (5) Discipline – Economics/Management Science.</i>	4

Fonte: Elaborado pelos autores.

Segundo o Quadro 2, as buscas resultaram em um total de 60 artigos, sendo que as bases de dados SciELO e *IEEE Xplore Digital Library* não apresentaram resultados. Assim, os títulos dos artigos foram analisados e encontrou-se 25 artigos repetidos e 2 artigos com publicação fora do período determinado de 2000-2019, restando 33 artigos válidos para a revisão sistemática.

4.2 Análise da Qualidade dos Estudos

A fim de identificar os artigos que de fato abordavam sobre o tema pesquisado nessa revisão sistemática, os resumos (*abstracts*) dos 33 artigos restantes foram analisados. Apenas 5 desses artigos apresentavam claramente em seus resumos que tratariam da análise de sensibilidade em casos com degeneração. Assim, esses 5 artigos foram incluídos na revisão sistemática e os 28 restantes, excluídos. O Quadro 3 a seguir apresenta características dos artigos incluídos na revisão sistemática. Na primeira coluna (Nº) do Quadro 4, os artigos foram numerados para facilitar quando forem mencionados posteriormente.

Quadro 3 - Relação dos artigos incluídos na revisão sistemática

Nº	Base de dados em que apareceu como resultado	Título do artigo	Autor	Ano de publicação
1	Google Acadêmico	Computing true shadow prices in linear programming	James K. Ho	2000
2	Cabell's directories, Scopus, Periódicos Capes, Google Acadêmico e ScienceDirect	The difference between the managerial and mathematical interpretation of sensitivity analysis results in linear programming	Tamás Koltai, Tamás Terlaky	2000
3	Scopus, Google Acadêmico e ScienceDirect	Construction of the largest sensitivity region for general linear programs	H. Arsham	2007
4	Cabell's directories, Periódico Capes e Google Acadêmico	Computing shadow prices/costs of degenerate LP problems with reduced simplex tables	Chi-Jen Lin	2010
5	IAOR, Scopus, Google Acadêmico e ScienceDirect	A practical approach to sensitivity analysis in linear programming under degeneracy for management decision making	Tamás Koltai, Viola Tatay	2011

Fonte: Elaborado pelos autores.

De acordo com o Quadro 3, observa-se que, com exceção do artigo 1, todos apareceram como resultado em mais de uma base de dados. Além disso, a quantidade de artigos incluídos demonstra que o tema dessa revisão sistemática foi pouco explorado ainda, visto que foram considerados dezenove anos como período para as buscas.

Em relação aos artigos excluídos da revisão, um dos motivos foi porque eles apresentavam problemas de PL diferentes dos estabelecidos nos critérios de inclusão. Outro motivo foi que muitos artigos apresentaram em seus resumos temas muito específicos, que não incluíam a análise de sensibilidade em problemas de programação linear com degeneração. Assim, como eles apresentaram algumas palavras-chaves definidas como critério de busca, concluiu-se que eles até poderiam apresentar problemas de PL, degeneração ou análise de sensibilidade em seu conteúdo, porém como não ficou claro no resumo que eles explorariam a pergunta referência dessa pesquisa, entendeu-se que eles não contribuiriam para o objetivo dessa revisão sistemática. Por fim, um artigo em específico foi excluído por estar em húngaro, o que tornou inviável fazer sua análise.

4.3 Apresentação dos Resultados

O quinto e último passo trata da análise dos artigos incluídos na revisão e apresentação dos resultados obtidos. Assim, o Quadro 4 apresenta as numerações, os títulos, os autores, os métodos de análise de sensibilidade apresentados nos artigos, as observações sobre os métodos/artigos, as formas como os métodos foram exemplificados/aplicados e os programas usados. Visto que os artigos são em inglês, os resumos dos quadros são traduções de informações retiradas dos artigos.

Quadro 4 - Resumo dos métodos de análise de sensibilidade em problemas de PL com solução degenerada apresentados nos artigos

	Resumo
Nº, título do artigo e autor(es)	Nº 1 - Computing true shadow prices in linear programming – James K. Ho
Método de análise de sensibilidade apresentado no artigo	<p>O autor apresenta que para qualquer problema de programação linear existem dois preços-sombra, um para os intervalos de aumento e outro para os intervalos de redução da restrição. Assim, ele apresenta formas de calcular os preços-sombra reais nos softwares LINDO e MPSX/370 a partir da execução de alguns comandos repetidas vezes.</p> <p>No <u>LINDO</u>, existem dois procedimentos diferentes: o paramétrico dos intervalos das restrições (RHS) e a perturbação.</p> <ul style="list-style-type: none"> - No paramétrico, o LINDO é usado para resolver o problema de PL e fazer o Range (Sensitivity) Analysis. A partir dos resultados, para todos os RHS com redução ou aumento permitido igual a zero, deve-se usar o comando PARA para dar um novo valor ao RHS, que force a mudança do valor objetivo se possível. O relatório de saída do PARA apresentará um valor de <i>Dual Variable</i>, que corresponde ao novo valor do preço-sombra. Caso o valor da função objetivo não mude, o último valor da <i>Dual Variable</i> listado deve ser usado. Uma observação desse primeiro procedimento é que antes de usar o comando PARA para um novo RHS, o LINDO tem que resolver o problema de PL inicial novamente, pois caso contrário irá considerar o último valor encontrado, o que pode interferir nos resultados. Dessa forma, os aumentos ou reduções utilizados nos RHS e os preços-sombra obtidos tem que serem registrados em outro lugar para não serem perdidos. - Na perturbação, usa-se o comando ALTER para mudar o RHS com valores pequenos. Novamente, realiza-se o registro dos aumentos e reduções realizados nos RHS e os preços-sombra obtidos. <p>No <u>MPSX/370</u>, dois procedimentos também são sugeridos.</p> <ul style="list-style-type: none"> - No primeiro, o problema de PL é resolvido com a opção RANGE. Em seguida, os limites dos preços-sombra são examinados e usa-se o comando PARARHS para os que não tiverem corretos. Esse comando baseia-se no incremento RHS original e calcula com múltiplos sucessivos de uma coluna de troca até que um máximo incremento seja alcançado. Porém, a coluna de alteração, o múltiplo a ser usado e o incremento máximo devem ser especificados no programa. A diferença entre esse e o LINDO é que seu cálculo se baseia no quadro ideal do problema de PL, logo não é necessário ficar resolvendo o problema inicial diversas vezes. - O segundo refere-se a automatização da parametrização com a instalação de um programa de controle para todas as execuções do comando PARARHS. O autor não comenta qual seria esse programa.
Observações sobre o método/artigo	<ul style="list-style-type: none"> - O artigo é baseado em uma pesquisa não publicada, que foi concluída em 1987 na University of Tennessee, Knoxville. Apesar dos softwares usados serem desatualizados, o autor afirma que os princípios e resultados permanecem intactos. - O autor apresenta que seria desejável automatizar os cálculos nos <i>softwares</i> e que isso poderia ser feito sem modificações extensas.
Forma que o método foi exemplificado/aplicado	Problema de programação linear com quatro variáveis de decisão.
Programas usados pelo(s) autor(es)	LINDO (1986) e MPSX/370 (1979).
Nº, título do artigo e autor(es)	Nº 2 - The difference between the managerial and mathematical interpretation of sensitivity analysis results in linear programming – Tamás Koltai, Tamás Terlaky

<p>Método de análise de sensibilidade apresentado no artigo</p>	<p>Os autores não apresentam um método em si, e sim sugestões de como melhorar a saída de sensibilidade do software de PL, sendo elas:</p> <ol style="list-style-type: none"> Os softwares desenvolvidos para uso gerencial apresentam informações de sensibilidade sobre as variáveis de decisão e/ou função objetivo e não sobre as bases ótimas. Para isso, seriam necessários cálculos extras, mas que ajudariam muito os usuários no gerenciamento. Um exemplo do tipo de informação de sensibilidade que deveria ser apresentado pelos softwares são os valores dos preços-sombra direito e esquerdo e seus consecutivos intervalos de redução e aumento para validade do valor ótimo. Informações sobre o conjunto de recursos que são gargalos do problema e sobre a mudança múltipla dos intervalos das variáveis das restrições (RHS) também são essenciais para o gerenciamento. Uma forma de obter essas informações é introduzindo uma nova variável que representa a mudança simultânea dos elementos RHS e a obtendo sua sensibilidade. Um desempenho fácil e automático desta análise pelos softwares seria importante. A existência de soluções alternativas deveria ser expressa mais explicitamente. Segundo os autores, o problema da degeneração primal é que, embora a solução ótima primal seja única, existem várias soluções ótimas duais. Da mesma forma, quando a solução ótima dual é degenerada, a solução ótima primal não é única. Assim, os softwares poderiam gerar informações sobre as diversas soluções existentes e a decisão seria por conta do gerente. Existe uma teoria matemática consistente para determinar a dimensão dos conjuntos ótimos quando se usa métodos do ponto interior (<i>Interior Point Methods</i> – IPMs, que apresenta soluções ótimas complementares). Fornecer essa informação não aumentaria o custo computacional dos softwares.
<p>Observações sobre o método/artigo</p>	<p>- O artigo também explica os três tipos de sensibilidade (Tipo I, II e III) e faz uma interpretação dos resultados de um problema de planejamento de produção para mostrar falhas nas informações apresentadas pelos relatórios de sensibilidade.</p>
<p>Forma que o método foi exemplificado/aplicado</p>	<p>Problema de planejamento de produção de dois produtos, em dois períodos diferentes e com estocagem.</p>
<p>Programas usados pelo(s) autor(es)</p>	<p>STORM.</p>
<p>Nº, título do artigo e autor(es)</p>	<p>Nº 3 - Construction of the largest sensitivity region for general linear programs – H. Arsham</p>
<p>Método de análise de sensibilidade apresentado no artigo</p>	<p>O autor apresenta um método de análise de perturbações, isto é, a maior região de sensibilidade, que trata todos os tipos de análises de sensibilidade (análise de sensibilidade ordinária, análise de sensibilidade paramétrica, análise de tolerância simétrica, análise de tolerância simétrica individual e análise de tolerância) em uma abordagem unificada. Com isso, esse método calcula a maior análise de sensibilidade que permite qualquer mudança dependente ou independente, tanto nos os intervalos das variáveis das restrições (RHS) como nos coeficientes de custo dos modelos de PL. Porém, ele baseia-se em <u>soluções ótimas e não degeneradas</u>. Assim, o autor apresenta que <u>o método de análise de sensibilidade não é aplicável para problemas degenerados e problemas com múltiplas soluções</u>. Ele demonstra apenas formas de manter a solução degenerada e manter as múltiplas soluções. Dessa forma, o método apresentado não se aplica ao objetivo dessa revisão sistemática.</p>
<p>Observações sobre o método/artigo</p>	<p>- A vantagem da abordagem proposta é sua simplicidade, visto que se baseia no que a solução ótima diz, enquanto executa apenas sistemas de equação de resolução.</p>

	- A desvantagem é que ela requer a solução de um problema de otimização não-linear para realizar a análise de sensibilidade em programas lineares.												
Forma que o método foi exemplificado/aplicado	Problemas de programação linear com duas e com três variáveis de decisão.												
Programas usados pelo(s) autor(es)	JavaScript (autor indica o uso desse software para problemas maiores).												
Nº, título do artigo e autor(es)	Nº 4 - Computing shadow prices/costs of degenerate LP problems with reduced simplex tables – Chi-Jen Lin												
Método de análise de sensibilidade apresentado no artigo	O autor apresenta dois métodos: um para calcular os preços-sombra do pacote de recursos (pv- e pv+) e outro para calcular os custos-sombra do pacote de atividades (qw- e qw+). Os dois métodos assumem que o modelo é resolvido pelo método simplex ou <i>Big M</i> simplex usando variáveis artificiais. Assim as etapas consistem em adaptações nas tabelas a fim de encontrar os preços-sombra e custos-sombra.												
Observações sobre o método/artigo	- Os métodos apresentados são uma integração da abordagem de programação paramétrica, da abordagem geral convexa e da abordagem de solução ótima. Eles podem ser aplicados a problemas primal degenerados, dual degenerados e ambos degenerados.												
Forma que o método foi exemplificado/aplicado	Problemas de programação linear com quatro variáveis de decisão.												
Programas usados pelo(s) autor(es)	Nenhum programa foi usado.												
Nº, título do artigo e autor(es)	Nº 5 - A practical approach to sensitivity analysis in linear programming under degeneracy for management decision making – Tamás Koltai, Viola Tatay												
Método de análise de sensibilidade apresentado no artigo	<p>Considerando que a forma padrão de um problema de programação linear primal, e seu dual, são:</p> $\text{Primal: Max } (c^T x) \quad Ax \leq b \quad c \geq 0 \quad (1)$ $\text{Dual: Min } (b^T y) \quad A^T y \geq c \quad y \leq 0 \quad (2)$ <p>Os autores apresentam um método em que problemas adicionais de PL precisam ser resolvidos para obter valores reais dos preços-sombra e dos intervalos de sensibilidade. A Figura 1 apresenta esses problemas.</p> <p style="text-align: center;">Figura 1- Problemas adicionais de PL</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">Maximal decrease</th> <th style="text-align: center;">Maximal increase</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="vertical-align: top;">Sensitivity analysis of objective function coefficients (OFC)</td> <td> $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} - \gamma_i \mathbf{e}_i$ $\mathbf{b}^T \mathbf{y} = OF^* - \gamma_i x_i^*$ $\gamma_i \geq 0$ $\text{Max } (\gamma_i); \quad (3)$ $\text{Optimal solution: } \gamma_i^-$ </td> <td> $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} + \gamma_i \mathbf{e}_i$ $\mathbf{b}^T \mathbf{y} = OF^* + \gamma_i x_i^*$ $\gamma_i \geq 0$ $\text{Max } (\gamma_i); \quad (4)$ $\text{Optimal solution: } \gamma_i^+$ </td> </tr> <tr> <td style="vertical-align: top;">Sensitivity analysis of the left shadow price ($\delta < 0$) (y_i^-)</td> <td> $\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j - \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* - \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (5)$ $\text{Optimal solution: } n \xi_j^-$ </td> <td> $\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j + \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* + \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (6)$ $\text{Optimal solution: } n \xi_j^+$ </td> </tr> <tr> <td style="vertical-align: top;">Sensitivity analysis of the right shadow price ($\delta > 0$) (y_j^+)</td> <td> $\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j - \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* - \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (7)$ $\text{Optimal solution: } p \xi_j^-$ </td> <td> $\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j + \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* + \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (8)$ $\text{Optimal solution: } p \xi_j^+$ </td> </tr> </tbody> </table> <p>Fonte: KOLTAI, TATAY, 2011, p. 394.</p> <p>Esses problemas adicionais de PL encontram o valor da redução máxima (quanto deve ser subtraído de um parâmetro para obter o menor valor do intervalo de validade) e aumento máximo (quando deve</p>		Maximal decrease	Maximal increase	Sensitivity analysis of objective function coefficients (OFC)	$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} - \gamma_i \mathbf{e}_i$ $\mathbf{b}^T \mathbf{y} = OF^* - \gamma_i x_i^*$ $\gamma_i \geq 0$ $\text{Max } (\gamma_i); \quad (3)$ $\text{Optimal solution: } \gamma_i^-$	$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} + \gamma_i \mathbf{e}_i$ $\mathbf{b}^T \mathbf{y} = OF^* + \gamma_i x_i^*$ $\gamma_i \geq 0$ $\text{Max } (\gamma_i); \quad (4)$ $\text{Optimal solution: } \gamma_i^+$	Sensitivity analysis of the left shadow price ($\delta < 0$) (y_i^-)	$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j - \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* - \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (5)$ $\text{Optimal solution: } n \xi_j^-$	$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j + \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* + \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (6)$ $\text{Optimal solution: } n \xi_j^+$	Sensitivity analysis of the right shadow price ($\delta > 0$) (y_j^+)	$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j - \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* - \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (7)$ $\text{Optimal solution: } p \xi_j^-$	$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j + \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* + \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (8)$ $\text{Optimal solution: } p \xi_j^+$
	Maximal decrease	Maximal increase											
Sensitivity analysis of objective function coefficients (OFC)	$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} - \gamma_i \mathbf{e}_i$ $\mathbf{b}^T \mathbf{y} = OF^* - \gamma_i x_i^*$ $\gamma_i \geq 0$ $\text{Max } (\gamma_i); \quad (3)$ $\text{Optimal solution: } \gamma_i^-$	$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} + \gamma_i \mathbf{e}_i$ $\mathbf{b}^T \mathbf{y} = OF^* + \gamma_i x_i^*$ $\gamma_i \geq 0$ $\text{Max } (\gamma_i); \quad (4)$ $\text{Optimal solution: } \gamma_i^+$											
Sensitivity analysis of the left shadow price ($\delta < 0$) (y_i^-)	$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j - \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* - \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (5)$ $\text{Optimal solution: } n \xi_j^-$	$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j + \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* + \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (6)$ $\text{Optimal solution: } n \xi_j^+$											
Sensitivity analysis of the right shadow price ($\delta > 0$) (y_j^+)	$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j - \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* - \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (7)$ $\text{Optimal solution: } p \xi_j^-$	$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_j + \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = OF^* + \xi_j y_j^*$ $\xi_j \geq 0$ $\text{Max } (\xi_j) \quad (8)$ $\text{Optimal solution: } p \xi_j^+$											

	<p>ser somado ao parâmetro para obter o maior valor do intervalo de validade) de um parâmetro. Para cada coeficiente da função objetivo deve-se calcular (3) e (4) e para cada restrição deve-se calcular (5), (6), (7) e (8) para obter os valores de redução máxima, aumento máximo e dos preços-sombra. Dessa forma, para um problema de PL com I variáveis e J restrições, deverão ser calculados $2I+6J$ problemas adicionais de PL para obter as informações de faixa para cada elemento OFC e RHS do problema original.</p> <p><u>Resumo de notações:</u></p> <p>A Matriz de coeficientes com elementos a_{ji} ($j=1, \dots, J; i=1, \dots, I$) b Vetor do lado direito (RHS) com elementos b_j ($j=1, \dots, J$) c Vetor do coeficiente da função objetivo com elementos c_i ($i=1, \dots, I$) x Variável do problema primal com elementos x_i ($i=1, \dots, I$) x^* Solução ótima do problema primal com elementos x_i^* ($i=1, \dots, I$) y Variável do problema dual com elementos y_j ($j=1, \dots, J$) y^* Solução ótima do problema dual com elementos y_j^* ($j=1, \dots, J$) OF* Valor ótimo da função objetivo e_i Vetor unitário com elementos I e com $e_i = 1$ e $e_k = 0$ para todos $k \neq i$. e_j Vetor unitário com elementos J e com $e_j = 1$ e $e_k = 0$ para todos $k \neq j$. δ Perturbação de um parâmetro do lado direito (RHS) y_j^- Preço-sombra esquerdo de um elemento do lado direito (RHS) b_j ($\delta < 0$) y_j^+ Preço-sombra direito de um elemento do lado direito (RHS) b_j ($\delta > 0$) γ_i Mudança no coeficiente da função objetivo c_i γ_i^- Diminuição viável do coeficiente da função objetivo c_i γ_i^+ Aumento viável do coeficiente da função objetivo c_i ξ_j Mudança do elemento do lado direito (RHS) b_j $n \xi_j^-$ Diminuição viável de b_j pertencente ao preço-sombra esquerdo $n \xi_j^+$ Aumento viável de b_j pertencente ao preço-sombra esquerdo $p \xi_j^-$ Diminuição viável de b_j pertencente ao preço-sombra direito $p \xi_j^+$ Aumento viável de b_j pertencente ao preço-sombra direito</p>
<p>Observações sobre o método/artigo</p>	<p>- A quantidade de problemas adicionais ($2I+6J$) a serem resolvidos torna-se um número muito alto no caso de problemas com muitas variáveis e restrições. No entanto, a fim de diminuir essa quantidade, alguns dos problemas adicionais não precisam ser resolvidos. Para delimitar esses problemas que podem ser desconsiderados, pode-se fazer uma análise matemática ou gerencial.</p> <p>- Na análise matemática conclui-se que, para algumas restrições, os preços-sombra da direita e da esquerda são iguais. Nesses casos, em vez de calcular 6 problemas adicionais de PL, apenas 2 devem ser resolvidos (para redução máxima e para aumento máximo). Para encontrar essas restrições, deve-se observar o intervalo de validade do preço-sombra nos relatórios de sensibilidade disponibilizados pelos solucionadores de PL. Se nenhum dos extremos do intervalo for zero, os preços-sombra da direita e da esquerda serão idênticos.</p> <p>- Na análise gerencial, a omissão da solução dos problemas adicionais de PL dependerá da situação decisória, logo não existem regras gerais. Assim, uma forma de filtrar os problemas adicionais de PL a serem resolvidos é: (a) calcular apenas para as restrições de capacidade de recursos críticos; (b) não calcular para elementos RHS em que o</p>

	aumento ou a diminuição não é uma alternativa viável; (c) não calcular para variáveis usadas na formulação do modelo para as quais os resultados de sensibilidade de OFC não tem significado prático; (d) não calcular caso observe que os intervalos fornecidos pelos solucionadores de PL, apesar de estreitos, já seja suficiente para a tomada de decisão.
Forma que o método foi exemplificado/aplicado	Problema de planejamento de produção com duas e com três variáveis de decisão.
Programas usados pelo(s) autor(es)	LINGO e POM-QM.

Fonte: Elaborado pelos autores.

4.4 Discussão

Com bases nos resumos apresentados no Quadro 4, pode-se constatar os seguintes aspectos dos métodos apresentados nos artigos e o tema dessa pesquisa:

- a) O artigo 2 apresentou somente sugestões de melhorias para os softwares com base em informações e cálculos que poderiam ser adicionados para fornecer uma análise de sensibilidade melhor. Assim, apesar dos autores não apresentarem um método em si, observou-se que o primeiro ponto mencionado por eles a respeito dos preços-sombra direito e esquerdo e seus intervalos foram abordados também nos artigos 1, 4 e 5.
- b) O artigo 3 apresentou um método para encontrar a maior região de sensibilidade, considerando diversos tipos de análises de sensibilidade. Porém o método não é aplicável em problemas degenerados, assim não contribui com o objetivo dessa revisão sistemática.
- c) Os artigos 1, 4 e 5 utilizaram abordagens diferentes para encontrar os valores reais dos preços-sombas, dos custos reduzidos e dos intervalos da análise de sensibilidade. Assim, eles utilizam comandos nos softwares, tabela simplex reduzida e problemas de PL adicionais respectivamente.
- d) O método apresentado no artigo 1 refere-se ao uso de comandos nos *softwares* LINDO e MPSX/370 para calcular novos valores dos preço-sombra após a mudança do RHS. Assim, por meio da repetição do procedimento encontra-se até que ponto o resultado inicial é válido, as mudanças que ocorrem com o aumento ou diminuição do valor da RHS e os novos valores do preço-sombra. Porém, esse método considera uma mudança por vez, sendo preciso realizar diversos testes para encontrar os resultados. Assim, a aplicação do método em um problema grande é inviável, visto que será necessário muito tempo para realizar todos os testes nas diversas restrições. Logo, sua utilização só seria viável se houvesse a automatização dos cálculos dos comandos nos *softwares*, o que segundo o autor pode ser feito sem modificações extensas.
- e) O método apresentado no artigo 4 refere-se ao uso de tabelas simplex reduzidas para encontrar os valores dos preços-sombra e dos custos-sombra. Para isso, é necessário que as tabelas simplex sejam montadas e em seguida alteradas a fim de obter os resultados pretendidos. Visto isso, percebe-se que tal método precisa de uma análise detalhada e é feito manualmente, tanto que o autor não menciona nenhum programa no artigo. Assim, da mesma forma que o método do artigo 1, a aplicação do método em um problema grande é inviável.
- f) O método apresentado no artigo 5 refere-se ao uso de problemas adicionais de PL para calcular os preços-sombra e intervalos de aumento e redução possíveis. Apesar da quantidade de problemas adicionais necessária ($2 \times$ quantidade de variáveis + $6 \times$ quantidade de restrições), esse método se mostrou mais interessante que os demais, visto que após a montagem dos

problemas, eles podem ser resolvidos por um software e os resultados obtidos mais rapidamente. Em relação a sua aplicação em problemas grandes, o ponto de dificuldade é o grande número de problemas adicionais a serem resolvidos, porém existem estratégias que podem ser utilizadas a fim de diminuir esse número como foi apresentado pelos próprios autores.

- g) Os exemplos utilizados pelos artigos foram de problemas de planejamento de produção e variou o uso de 2 a 4 variáveis de decisão. Uma possível justificativa para o uso desses exemplos é o fato de os problemas de PL serem bastante usados na Engenharia e na Administração de Produção.
- h) Os softwares utilizados nos artigos foram o LINDO e o MPSX/370 (versões desatualizadas), o STORM, o JavaScript, o LINGO e o POM-QM. Apesar do LINDO e o LINGO serem da empresa, percebe-se que os autores utilizaram *softwares* diferentes. Assim, não teve como concluir qual *software* é mais usado ou mais indicado para realizar a análise de sensibilidade. Além disso, todos os autores comentaram que quando os resultados obtidos por seus métodos se igualavam aos fornecidos pelos *softwares*, tratava-se de uma coincidência. Logo, conclui-se que nenhum *software* fornece informações mais exatas a respeito da análise de sensibilidade em problemas degenerados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise de sensibilidade em modelos de programação linear é fundamental para um gestor analisar como alterações nos parâmetros do modelo afetam a solução ótima, e a partir disso tomar decisões mais embasadas. Porém, quando ocorrem soluções degeneradas, a análise de sensibilidade é comprometida, sendo necessária uma interpretação cautelosa e mais cálculos para validar os intervalos de sensibilidade.

Assim, esta pesquisa buscou responder “Como fazer a análise de sensibilidade em um modelo matemático de programação linear que apresenta solução degenerada?”, tendo como objetivo identificar métodos de análise de sensibilidade nesse contexto. Depreende-se que esse objetivo foi alcançado por meio da realização da revisão sistemática de artigos que apresentaram métodos de análise de sensibilidade sob degeneração.

Percebe-se que as buscas para a revisão sistemática resultaram em um número muito baixo de artigos válidos (33), considerando que foram usadas publicações de um período de dezenove anos. Além disso, o número de artigos incluídos na revisão sistemática (5) valida a afirmação de que apesar da importância dessa temática, pesquisas sobre o tema são escassas e pouco aplicáveis. Por fim, pelo fato de todos os artigos encontrados serem em inglês, percebe-se uma falta de publicações sobre o tema no Brasil, o que dificulta o entendimento e o aprofundamento no tema por aqueles que não sabem a outra língua.

Assim, conclui-se que os resumos elaborados dos métodos encontrados pela revisão sistemática contribuem tanto para a academia como para o mercado por reunir estudos e aplicações sobre o tema, servindo de referência para futuros estudos ou para profissionais que estejam lidando com problemas degenerados e precisem realizar uma análise de sensibilidade mais assertiva.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARSHAM, H. Construction of the Largest Sensitivity Region for General Linear Programs. **Applied Mathematics and Computation**, Baltimore, v. II, p. 1435-1447, Junho 2007.
- BILINSKI, P. A. et al. **Aplicação da Pesquisa na Otimização da Lucratividade de uma Empresa do Segmento de Marcenaria**. XXXVI ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO. João Pessoa: [s.n.]. Outubro 2016. p. 1-10.
- BRESSAN, G. M.; ZEBEDIF, N. B. Modelagem Matemática e Resolução de Problemas de Gerenciamento da Produção Utilizando Programação Linear. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 5, n. 1, p. 85-109, Dezembro 2015.
- CAIXETA-FILHO, J. V. **Pesquisa Operacional: Técnicas de Otimização Aplicadas a Sistemas Agroindustriais**. 2ª. ed. São Paulo: Atlas, v. 5, 2011.
- COLIN, E. C. **Pesquisa Operacional: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas**. Rio de Janeiro: Ltda, 2013.
- FÁVERO, L. P.; BELFIORE, P. **Pesquisa operacional para concursos de engenharia**. Rio de Janeiro: CIP-Brasil, 2013.
- FONTELLES, M. J. et al. **Metodologia da Pesquisa Científica: Diretrizes para a Elaboração de um Protocolo de Pesquisa**. UNAMA. Belém, p. 8. 2009.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9ª. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- HO, J. K. Computing True Shadow Prices in Linear Programming. **Institute of Mathematics and Informatics**, Chicago, v. 11, n. 4, p. 421-434, Janeiro 2000.
- KOLTAI, T.; TATAY, V. A practical approach to sensitivity analysis in linear programming under degeneracy for management decision making. **International Journal of Production Economics, Elsevier**, v. 131, p. 392-398, Maio 2011.
- KOLTAI, T.; TERLAKY, T. The difference between the managerial and mathematical interpretation of sensitivity analysis results in linear programming. **International Journal of Production Economics**, v. 65, n. 3, p. 257-274, 2000. ISSN 0925-5273.
- LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. 5ª. ed. Rio de Janeiro: CIP-BRASIL, v. II, 2018.
- LIN, C.-J. Computing Shadow Prices/Costs of Degenerate LP Problems with Reduced Simplex Tables. **Expert Systems with Applications: An International Journal**, Hsinchu, v. 37, n. 8, p. 5848-5855, Agosto 2010.
- MOORE, J. H.; WEATHERFORD, L. R. **Tomada de Decisão em Administração com Planilhas Eletrônicas**. 6ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.
- SAMPAIO, R. F.; MANCINE, M. C. Estudos de Revisão Sistemática: Um Guia para Síntese Criteriosa da Evidência Científica. **Revista Brasileira de Fisioterapia**, São Carlos, v. 11, n. 1, p. 83-89, Janeiro/fevereiro 2007. ISSN 1.
- TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional: Uma visão Geral**. 8ª. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2008.