



SUBESTRUTURAÇÃO DINÂMICA PELO MÉTODO DE CRAIG-BAMPTON

Dynamic Substructuring by the Craig-Bampton Method

Lidianne de Paula Pinto Mapa (1); Francisco de Assis das Neves (2); Gustavo Paulinelli Guimarães (3)

(1) Ma. Engenheira Mecânica, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto- MG, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto- MG, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto- MG, Brasil.

Email para Correspondência: lidianne.pinto@aluno.ufop.edu.br; (P) Apresentador

Resumo: Os métodos de subestruturação permitem a redução de custos computacionais, e são aplicáveis principalmente em análises dinâmicas estruturais. Na síntese modal de componentes tem-se o método de Craig-Bampton, que reduz os graus de liberdade internos de cada subestrutura e realiza o acoplamento com o objetivo de obter a resposta da estrutura. Esse artigo tem como objetivo desenvolver o método de Craig-Bampton aplicado a elementos de viga. Para isso, desenvolveu-se um algoritmo no software MATLAB que implementa a modelagem do Método de Elementos Finitos para cada subestrutura e, posteriormente, realiza o acoplamento pelo método de Craig-Bampton. O método foi validado a partir dos resultados de análises pelo Método de Elementos Finitos para estrutura completa realizadas no SAP 2000. Foi possível observar que o método permite uma grande redução do número de equações.

Palavras chaves: Subestruturação; Craig Bampton; Síntese Modal de Componentes.

Abstract: Substructuring methods allow the reduction of computational costs, and are applicable mainly in dynamic structural analysis. In the Component-Mode Synthesis we have the Craig-Bampton method, which reduces the internal degrees of freedom of each substructure and makes the coupling in order to obtain the structure response. This article aims to develop the Craig-Bampton method applied to beam elements. For this, an algorithm was developed in the MATLAB software that models the Finite Element Method for each substructure for later coupling by the Craig-Bampton method. The method was validated from analyzes of the Finite Element Method for complete structure realized in SAP 2000. From the applications it is possible to observe that the method allows a great reduction of the numbers of equations.

Keywords: Substructuring; Craig-Bampton method; Component-mode synthesis.



1 INTRODUÇÃO

Em análises estruturais dinâmicas os custos computacionais podem se tornar impraticáveis (Hollkamp e Gordon, 2008) uma vez que é necessário solucionar uma equação de equilíbrio do sistema para cada resposta no tempo. Nesse caso, destacam-se os métodos de subestruturação por reduzir os custos computacionais.

Esses métodos envolve a divisão de uma estrutura em um número de subestruturas. Assim, obtém-se o modelo dinâmico de ordem reduzida de cada subestrutura, e então é realizada a montagem dos modelos de ordem reduzida de toda a estrutura, possibilitando prever a resposta da estrutura completa (Craig e Kurdila, 2006). Além de facilitar os sistemas de montagem, a subestruturação permite fazer otimizações locais para posterior otimizações globais (D'Ambrogio e Sestieri, 2004).

Os métodos de subestruturação que utilizam matrizes generalizadas de massa, amortecimento e rigidez considerando propriedades locais são chamados de síntese modal de componentes (CMS). Esses são baseados no domínio do tempo. Dentre esses métodos destaca-se o Craig-Bampton. Os métodos baseados no domínio de frequência descrevem cada subestrutura em termos de funções de resposta em frequência (FRF's), são denominados subestruturação baseada em frequência (FBS) (Klerk, Rixen e Jong, 2006).

A síntese modal de componentes aproxima os graus de liberdade por coordenadas generalizadas a partir de uma matriz de transformação composta por modos. O método de Craig-Bampton considera nessa matriz de transformação os modos de interface fixa e os modos de restrição.

A subestruturação dinâmica linear tem sido desenvolvida desde o século XX (Guyan, 1965; Craig e Bampton, 1968; MacNeal, 1971; Rubin, 1975). O método de Craig-Bampton (C-B) é um método de subestruturação linear eficiente. O custo computacional pode ser reduzido drasticamente no primeiro desacoplamento de uma estrutura em subestruturas, e utilizando o método de Craig-Bampton para obter o comportamento da estrutura completa (Allen e Kuether, 2012). Assim, pretende-se desenvolver o método de subestruturação, realizando o acoplamento de subestruturas geometricamente lineares através do método de Craig-Bampton.

2 TEORIA

A equação de equilíbrio de um sistema sob vibração forçada de N graus de liberdade não amortecido é dada por (Rao, 2011):

$$M\ddot{u} + Ku = f(t) \quad (1)$$

Onde M é a matriz de massa, K é a matriz rigidez do sistema, ambas com dimensão $N \times N$, u é o vetor deslocamento e $f(t)$ o vetor de força aplicada, ambos com dimensões $N \times 1$.

Para desenvolver a síntese modal de componentes as matrizes são agrupadas em graus de liberdade de contorno b , que são compartilhados com outra subestrutura ou

recebem carga externa, e graus de liberdade internos \mathbf{i} (Craig e Kurdila., 2006). Conforme a seguinte equação, em que o subscrito (s) indica a correspondente subestrutura:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix}^{(s)} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_b \end{Bmatrix}^{(s)} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}^{(s)} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}^{(s)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b \end{Bmatrix}^{(s)} \quad (2)$$

Craig e Kurdila (2006) relatam que as coordenadas de deslocamento físico das subestruturas \mathbf{u} são representadas em termos de coordenadas generalizadas de componentes \mathbf{p} através da transformação:

$$\mathbf{u}^{(s)} = \boldsymbol{\Psi}^{(s)} \mathbf{p}^{(s)} \quad (3)$$

Onde a matriz transformação $\boldsymbol{\Psi}^{(s)}$ é composta por modos da subestrutura correspondente, que podem ser modos de corpo rígido, modos normais de vibração livre, modos de restrição e modos anexos.

A fim de reduzir os graus de liberdade internos dos modelos de cada subestrutura a matriz de transformação de Craig Bampton considera k modos de interface fixa $\boldsymbol{\phi}_{ik}$ e os modos de restrição $\boldsymbol{\Psi}_{ib}$. A transformação de coordenadas de Craig-Bampton é dada por:

$$\mathbf{u}^{(s)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}^{(s)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{ik} & \boldsymbol{\Psi}_{ib} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{bb} \end{bmatrix}^{(s)} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_b \end{Bmatrix}^{(s)} = \mathbf{T}_{CB} \mathbf{p} \quad (4)$$

Onde \mathbf{p}_k é o vetor de coordenadas generalizadas e \mathbf{T}_{CB} é a matriz de transformação C-B.

Kuether e Allen (2014) afirmam que deve-se considerar modos com frequências até 1,5 a 2,0 vezes a frequência máxima de interesse quando se trata de análises lineares.

Os modos normais de interface fixa são obtidos quando deslocamentos nulos são considerados nos graus liberdade de contorno da estrutura (Craig e Chang, 1976). Assim, tem-se o problema de autovalor:

$$[\mathbf{K}_{ii} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{ii}] \{\boldsymbol{\phi}_i\}_j = \mathbf{0} \quad j = 1, 2, \dots, N_i \quad (5)$$

Em que N_i é número de graus de liberdade internos e $\boldsymbol{\phi}_i$ é o conjunto de modos normais de interface fixa.

Quando os modos normais são \mathbf{M} -ortonormalizados, tem-se (Paz e Leigh, 2004):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_{ii}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_{ii} &= \mathbf{I}_{ii} \\ \boldsymbol{\phi}_{ii}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_{ii} &= \boldsymbol{\Lambda}_{ii} = \text{diag}(\omega_j^2) \end{aligned} \quad (6)$$

Conforme Cook *et al.* (2002), modos de restrição são obtidos quando um deslocamento unitário é aplicado nos graus de liberdade de contorno e os outros são mantidos fixos. Assim, os modos de restrição são dados por:

$$\boldsymbol{\psi}_c \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{ib} \\ \mathbf{I}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib}] \\ \mathbf{I}_{bb} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Fazendo $\mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{CB}$ e $\mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{CB}$ na Eq. 2 é possível obter as matrizes de massa e rigidez de ordem reduzidas. Quando os modos de interface fixa são M-ortonormalizados conforme Eq. (6) essas matrizes possuem, respectivamente, as seguintes formas:

$$\widehat{\mathbf{M}}_{CB}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{kk} & \widehat{\mathbf{M}}_{kb} \\ \widehat{\mathbf{M}}_{bk} & \widehat{\mathbf{M}}_{bb} \end{bmatrix}^{(s)} \quad (8)$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{CB}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{kk} & \mathbf{0}_{kb} \\ \mathbf{0}_{bk} & \widehat{\mathbf{K}}_{bb} \end{bmatrix}^{(s)} \quad (9)$$

Para o acoplamento das matrizes (Eq. (8) e (9)) é realizado uma transformação de coordenadas dependentes \mathbf{p} em coordenadas independentes \mathbf{q} . Conforme a equação:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{k1}^{(1)} \\ \mathbf{p}_b^{(1)} \\ \mathbf{p}_{k2}^{(2)} \\ \mathbf{p}_b^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{k1}^{(1)} \\ \mathbf{q}_{k2}^{(2)} \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Assim, acoplamento de duas subestruturas com matrizes de massa e rigidez conforme Eq. (8) e (9), implica nas seguintes matrizes de massa e rigidez de ordem reduzida acopladas:

$$\widehat{\mathbf{M}}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k_1 k_1} & \mathbf{0}_{k_1 k_2} & \widehat{\mathbf{M}}_{k_1 b}^{(1)} \\ \mathbf{0}_{k_2 k_1} & \mathbf{I}_{k_2 k_2} & \widehat{\mathbf{M}}_{k_2 b}^{(1)} \\ \widehat{\mathbf{M}}_{b k_1}^{(1)} & \widehat{\mathbf{M}}_{b k_2}^{(1)} & \widehat{\mathbf{M}}_{bb}^{(1)} + \widehat{\mathbf{M}}_{bb}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{k_1 k_1}^{(1)} & \mathbf{0}_{k_1 k_2} & \mathbf{0}_{k_2 b} \\ \mathbf{0}_{k_2 k_1} & \mathbf{\Lambda}_{k_2 k_2}^{(2)} & \mathbf{0}_{k_2 b} \\ \mathbf{0}_{b k_1} & \mathbf{0}_{b k_2} & \widehat{\mathbf{K}}_{bb}^{(1)} + \mathbf{K}_{bb}^{(1)} \end{bmatrix}$$

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Para o desenvolvimento do rotina computacional implementada no software MATLAB foram utilizadas as formulações apresentadas no capítulo anterior. A figura 1 apresenta o fluxograma computacional.

A rotina inicia-se fazendo a leitura de dados geométricos, propriedades do material, conectividade e coordenadas dos nós, número de elementos e de nós, nós de contorno, nós com condições de contorno e frequência de interesse de cada subestrutura.

Posteriormente, a rotina faz a superposição das matrizes de massa e rigidez de cada elemento das subestruturas. Aplica-se as condições de contorno, eliminando linhas e colunas referentes aos graus de liberdade restringidos.

Em seguida, as matrizes são condensadas em graus de liberdade internos e de contorno. As matrizes de transformação de Craig-Bampton são obtidas após o cálculo de modos de restrição e a execução das subrotinas **autoprob** e **ordmod**. Essas, respectivamente, têm como objetivo obter os modos normais de interface fixa e ordená-los.

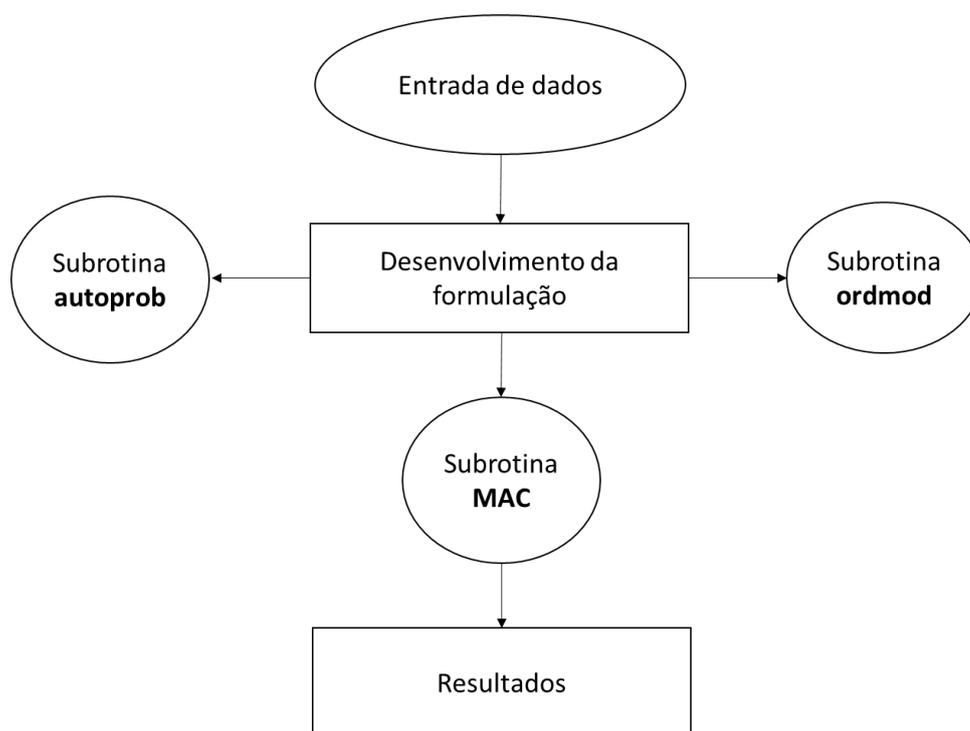


Figura 1: Fluxograma da rotina implementada.

No passo seguinte, obtêm-se as matrizes de massa e rigidez generalizadas (equação 8 e 9). Assim, as matrizes são acopladas conforme equação 10.

A rotina prossegue resolvendo o problema de vibração livre, onde também foram utilizadas as subrotinas **autoprob** e **ordmod**. Finalmente, as coordenadas são atualizadas e os resultados com apresentados. Os modos obtidos através do método foram correlacionados com os modos do Método de Elementos Finitos da estrutura completa obtidos pelo SAP 2000 pela subrotina **MAC** (Modal Assurance Criterion).

4 RESULTADOS

A fim de exemplificar o acoplamento de vigas, inicialmente fez-se o acoplamento de duas vigas engastadas livres, cada viga (subestruturas) foram discretizadas em 100 elementos finitos. A representação do acoplamento pode ser observada pela figura 2.

Conforme é ilustrado as vigas foram acopladas através dos graus de liberdade de deslocamento e de rotação contidos na interface compartilhada.

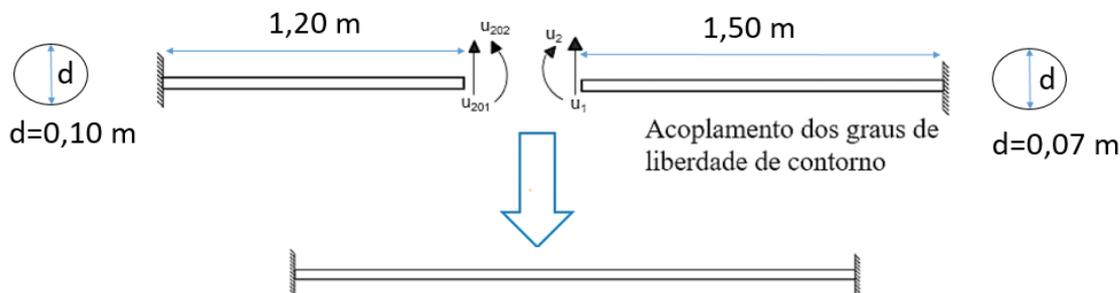


Figura 2: Representação do acoplamento de vigas engastadas-livre pelo método de Craig Bampton.

As propriedades geométricas de uma das vigas foram: comprimento $L=1.2$ m, seção circular de diâmetro $D= 0,10$ m, inércia $I= 0.49087 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$. Para a outra viga as propriedades geométricas foram: comprimento $L= 1.5$ m, seção circular de diâmetro $D=0,07$ m, inércia $I = 0.1178 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$. Considerou-se o alumínio o material dessas vigas com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E= 70.0$ GPa e densidade 2780 Kg/m^3 .

Na tabela 1 é possível observar as frequências dos cinco primeiros modos de interface fixa obtidos para cada subestrutura.

Tabela 1: Frequências dos modos de interface fixa relativos as subestruturas 1 e 2.

Número do modo	Viga engastada livre 1,2 m: Viga engastada livre 1,5 m:	
	Subestrutura 1	Subestrutura 2
	Interface fixa	Interface fixa
1	310,209	383,086
2	855,102	751,002
3	1676,343	1241,444
4	2771,080	1854,504
5	4139,517	138,974

Pelo algoritmo verifica-se que o total de modos normais de interface fixa obtidos é igual ao número de graus de liberdade internos de cada subestrutura conforme pode-se constatar também através da Eq. (5). Portanto, o número de elementos finitos adotados para cada subestrutura deve possibilitar que haja nós internos.

Considerou-se o intervalo de frequência de interesse de 0 a 500 Hz, e modos de cada subestrutura 2 vezes a frequência máxima de interesse na matriz de transformação. Pode-se observar na tabela 1 que os dois primeiros modos estão dentro desse intervalo para subestrutura 1, e para a subestrutura 2 os três primeiros modos.

Na figura 3 é possível observar os três primeiros modos de vibração livre para a estrutura obtidos através do Método de Elementos Finitos para a estrutura completa e através do método de Craig-Bampton conforme indica legenda.

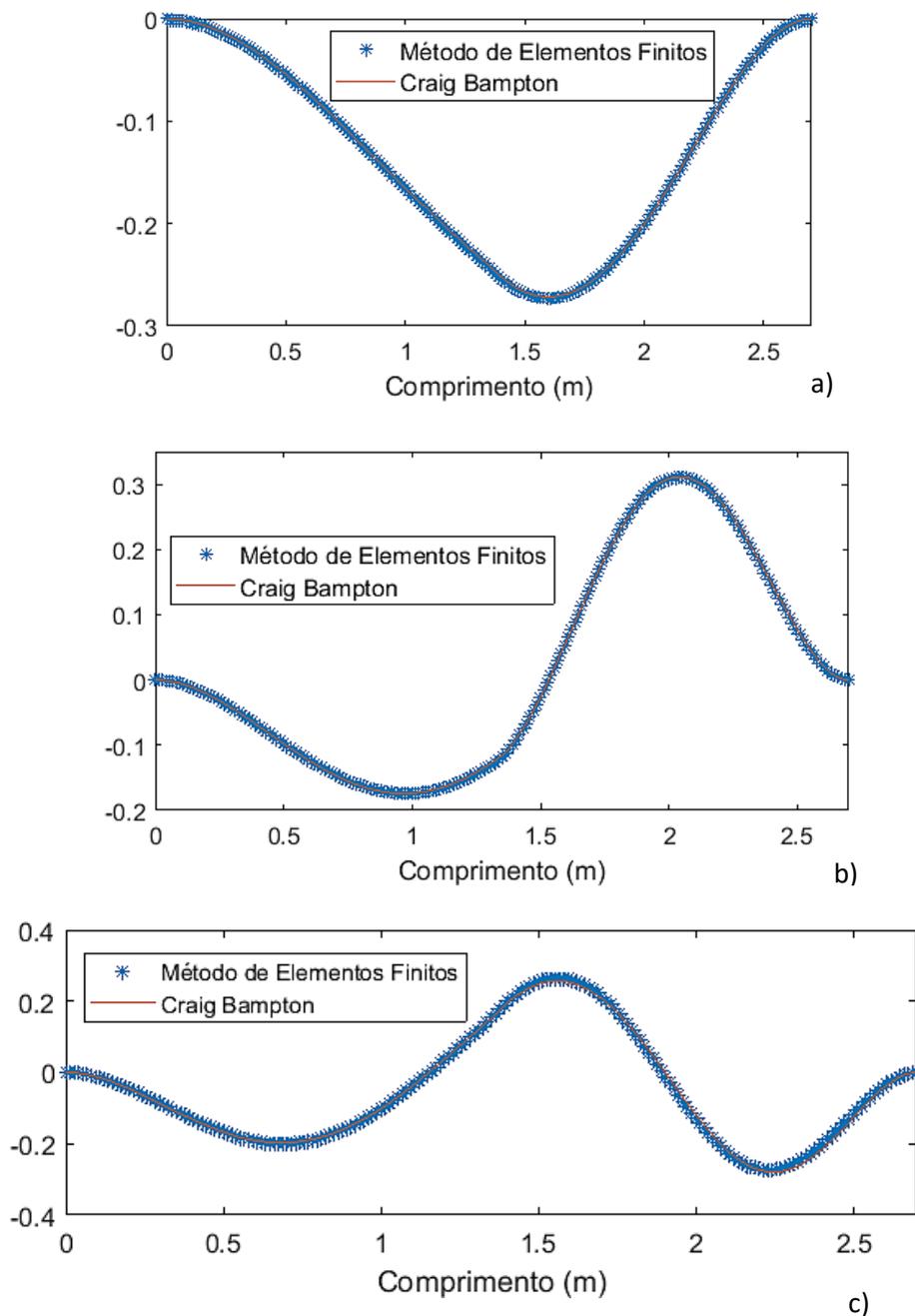


Figura 3: Primeiro - 49,839 Hz (a) segundo - 139,695 Hz (b) e terceiro - 269,265 Hz (c) modos de vibração livre para a viga bi-engastada.

Pela Figura 4 é possível observar a correlação entre os modos obtidos via MEF para estrutura completa e pelo método de Craig-Bampton através dos coeficientes MAC.

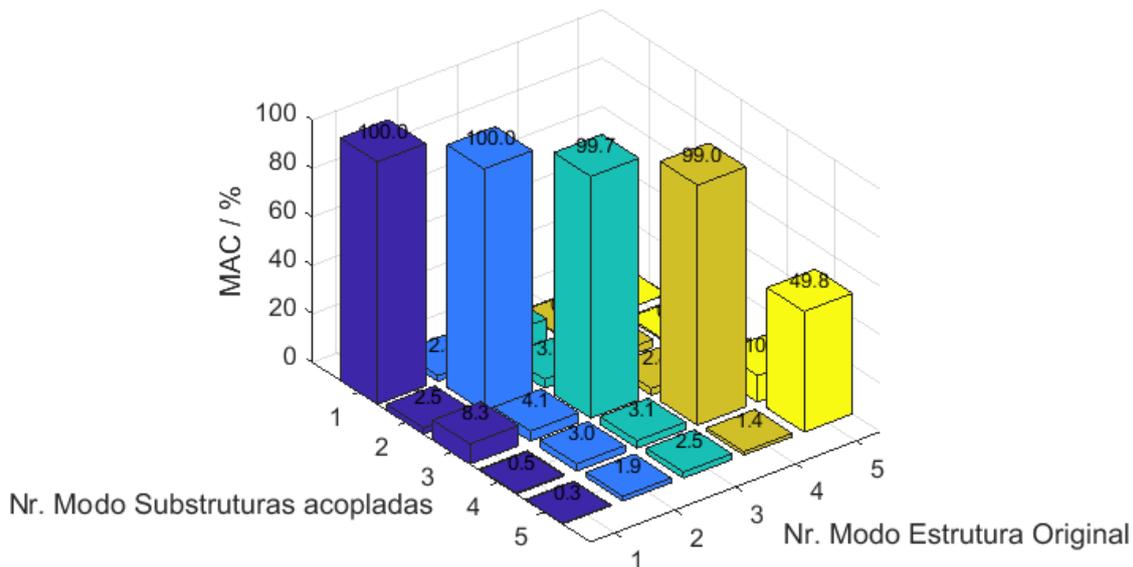


Figura 4: Valores dos coeficientes MAC entre os modos obtidos via Craig-Bampton e via Método de Elementos Finitos.

Observa-se pela figura 4 que os coeficientes MAC da diagonal principal se aproximaram de 100 % para todos os modos que estão dentro da faixa de frequência de interesse.

Na tabela 2 é possível observar a diferença percentual de frequências naturais do método de Craig-Bampton com relação ao Método de Elementos Finitos para a estrutura completa.

Tabela 2: Diferença percentual de frequências do Método de C-B com relação ao Método de Elementos Finitos

Nº do modo	Craig-Bampton	Método de Elementos Finitos	Diferença %
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
1	49,853	49,839	0,028
2	140,589	139,695	0,640
3	270,486	269,265	0,453
4	443,402	436,434	1,597
5	784,950	674,921	16,302

O diferença apresentada na tabela 2 foi calculada através da seguinte fórmula:

$$\text{Diferença (\%)} = 100 \frac{\text{resultado obtido via MEF} - \text{Resultado obtido via C} - B}{\text{resultado obtido via MEF}}$$

Observa-se que dentro da faixa de frequência de interesse (0 - 500 Hz) a diferença máxima entre os métodos é de 1,597 %, relativo ao quarto modo de vibração da estrutura acoplada.

Para essa aplicação o modelo completo do Método de Elementos Finitos teve 398 equações, enquanto que o modelo de Craig-Bampton apresentou 6 equações.

Realizou-se o acoplamento de duas vigas bi-apoiadas, conforme é ilustrado na figura 5.

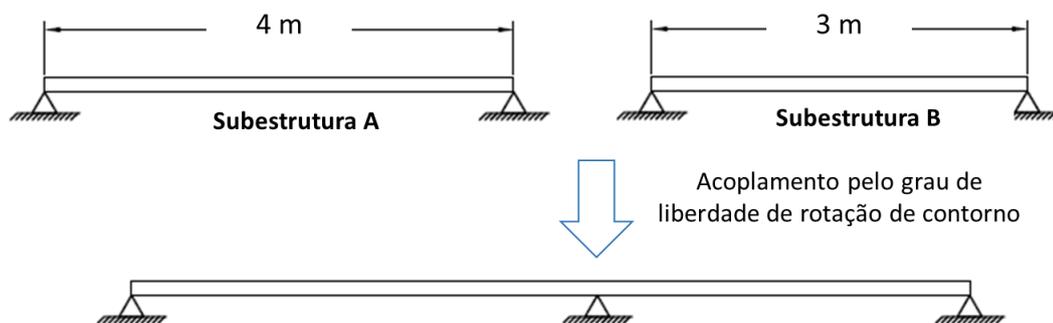


Figura 5: Representação do acoplamento de vigas bi-apoiadas pelo método de Craig Bampton.

Nessa aplicação, o acoplamento se deu através do grau de liberdade de rotação conforme é ilustrado na figura 4. A subestrutura A foi modelada com o perfil W 310x143 e a subestrutura B com o perfil W 360x72, ambas foram discretizadas em 30 elementos finitos. Foi considerado o módulo de elasticidade de 200 GPa para as seções das duas subestruturas.

A tabela 3 apresenta as frequências dos modos de interface fixa obtidos para a subestrutura A e B. Para essa aplicação considerou-se a faixa de frequência de interesse de 0 a 300 Hz.

Tabela 3: Frequências dos modos de interface fixa relativos as subestruturas A e B.

Número do modo	Viga bi-apoiada (4 m): Subestrutura A	Viga bi-apoiada (3 m): Subestrutura B
	Interface fixa (Hz)	Interface fixa (Hz)
1	68,366	130,587
2	273,464	522,349
3	615,297	1175,291
4	1093,877	2089,437
5	1709,235	3264,844

Observando a faixa de frequência de interesse, selecionou-se para a matriz de transformação os dois primeiros modos de cada subestrutura.

Pela tabela 4 é possível observar a convergência do método de Craig-Bampton em relação ao Método de Elementos Finitos para estrutura completa considerando as frequências naturais.

Tabela 4: Diferença percentual de frequências do Método de C-B com relação ao Método de Elementos Finitos

Nº do modo	Craig-Bampton	Elementos Finitos	Diferença %
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
1	77,397	77,394	0,003
2	177,334	177,297	0,021
3	303,114	302,692	0,139
4	596,565	573,942	3,942
5	1169,214	693,170	68,676

Observa-se pela tabela 4 que na faixa de frequência de interesse a diferença máxima entre as frequências foi de 0,139 %.

Os modos três primeiros modos de vibração livre da estrutura estão demonstrados na figura 6.

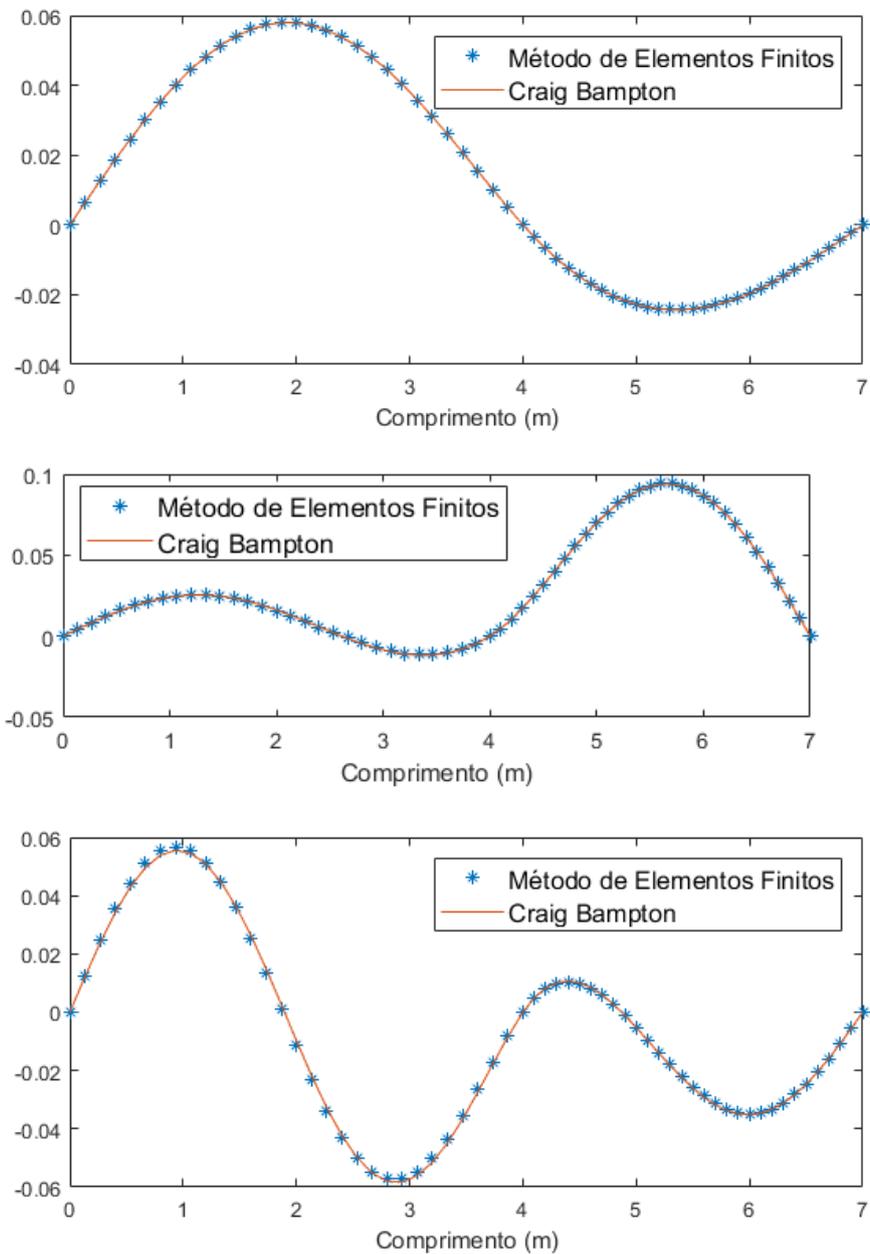


Figura 6: Primeiro - 77,394 Hz (a), segundo - 177,297 Hz (b) e terceiro - 302,692 Hz (c) modos de vibração para o acoplamento de vigas bi-apoiadas.

Novamente, os três primeiros modos obtidos pelo acoplamento de Craig-Bampton apresentaram-se precisos em relação aos obtidos por meio do Método de Elementos Finitos para a estrutura completa. Nota-se pela figura 6 que na faixa de frequência de interesse os valores do MAC são próximos de 100 %.

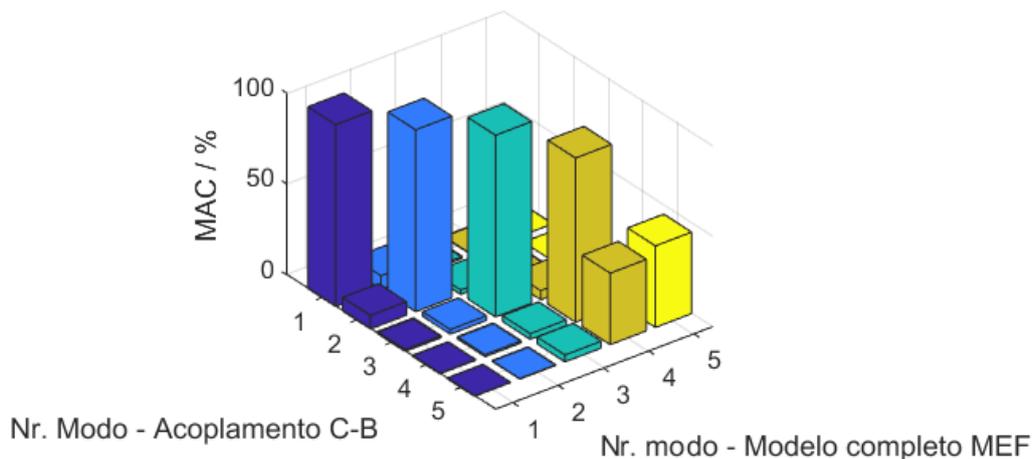


Figura 6: Valores MAC para o acoplamento de vigas bi-apoiadas.

Nessa aplicação o modelo obtido pelo método de Craig-Bampton foi executado com 5 equações, enquanto que o modelo completo de elementos Finitos foi obtido com 119 graus de liberdade.

CONCLUSÕES

O método de síntese modal de componentes foi desenvolvido considerando as formulações do método de Craig Bampton. As subestruturas foram acopladas pelos graus de liberdade de contorno e os graus de liberdade internos foram reduzidos, permitindo a obtenção resposta completa das estruturas com menor custo computacional.

Além de permitir uma grande redução do número de equações dos modelos, para análises a partir do método é necessário considerar poucos modos na matriz transformação, confirmando assim a redução do custo computacional.

Observa-se que o método apresenta confiabilidade na faixa de frequência de interesse. Os valores MAC apresentaram-se maiores que 99% em ambas aplicações mostrando que os modos se correlacionam corretamente. As diferenças máximas de frequência em relação ao método de Elementos Finitos para estrutura completa não ultrapassaram de 2 %.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a todos que contribuíram por esse trabalho em especial a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

REFERÊNCIAS

Allen, M.S., Kuether, R.J., 2012. Substructuring with Nonlinear Subcomponents: A Nonlinear Normal Mode Perspective. In: Mayes R. et al. (eds) Topics in Experimental Dynamics Substructuring and Wind Turbine Dynamics, vol. 2. *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*. Springer.



Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., Witt, R. J., 2002. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.

Craig, R. R., Chang, C.-J., 1976. A review of substructure coupling methods for dynamic analysis. *Eng. Sci*, vol. 2, pp. 393-408.

Craig, R., Bampton, M., 1968. Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. *AIAA Journal*, vol. 6, n. 7, pp. 1313–1319.

Craig, R., Kurdila, A., 2006. *Fundamentals of Structural Dynamics*. John Wiley.

D'ambrogio, W., Sestieri, A., 2004. Unified Approach to Substructuring and Structural Modification Problems. *Shock and Vibration journal*, vol. 11, n. 3, pp. 295–309.

Guyan, R. J., 1965. Reduction of Stiffness and Mass Matrices. *AIAA Journal*, vol. 33, pp. 380-1965.

Hollkamp, J. J., Gordon, R. W., 2008. Reduced-order models for nonlinear response prediction: Implicit condensation and expansion. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 318, n. 4, pp. 1139-1153.

Klerk, de D., Rixen, D., Jong, J., 2006. Frequency Based Substructuring (FBS) Method Reformulated According to the Dual Domain Decomposition Method. In: the Fifteenth *International Modal Analysis Conference*.

Kuether, R. J., 2014. *Nonlinear Modal Substructuring of Geometrically Nonlinear Finite Element Models*, Doctoral Thesis, Engineering Mechanics, University of Wisconsin-Madison.

Macneal, R., 1971. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, vol.1, pp. 581–601.

Paz, M., Leigh, W., 2004. *Structural Dynamics: Theory and Computation*. Kluwer Academic Publishers.

Rao, S., 2011. *Vibrações Mecânicas*. Pearson Prentice Hall.

Rubin, S., 1975. Improved component mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, vol. 18, pp. 995–1006.