



XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



COMPARAÇÃO DA EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE HELMHOLTZ USANDO AS FORMULAÇÕES DO ELEMENTO DE CONTORNO DE BASE RADIAL DIRETA E INDIRETA E O ELEMENTO DE CONTORNO USANDO SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DEPENDENTE DE FREQUÊNCIA

Comparison of computational efficiency in Helmholtz problem solving using the formulations of the direct and indirect radial base boundary element and the boundary element using frequency dependent fundamental solution

Á. J. Santos (1)(P); F. O. Netto (1); L. S. Campos(2); C.F. Loeffler (2)

(1) Graduando de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

Email para Correspondência: aquila.jsantos@outlook.com; (P) Apresentador

Resumo: O presente trabalho visa comparar a eficiência numérica e computacional na solução de problemas de Helmholtz para diferentes técnicas numéricas: o Método de Elementos de Contorno com Integração Radial Direta, que aplica funções de base radial para aproximar o termo de inércia, o Método de Elementos de Contorno com Integração Radial Indireta, que aplica essas mesmas funções de base radial para interpolar parte do termo da inércia e assim resolvê-lo, e a formulação padrão, que emprega a solução fundamental dependente da frequência. Exemplos de problemas de Helmholtz, serão resolvidos com as diferentes formulações, utilizando diferentes níveis de refinamento, e, em seguida, seus resultados comparados com as soluções analíticas disponíveis, para avaliação da eficiência numérica. Na investigação da eficiência computacional, os tempos de solução serão mensurados, e posteriormente comparados, em função dos graus de liberdade dos sistemas resolvidos.

Palavras-chave: Helmholtz; MEC; MIR.

Abstract: The present work aims at comparing numerical and computational efficiency in solving Helmholtz problems for different numerical techniques: the Direct Radial Integration Boundary Element Method that applies radial-base functions to approximate the inertia term, the Indirect Radial Integration Boundary Element Method that applies these same radial-based functions to interpolate part of the inertia term and thus solve it and the standard formulation that uses the frequency dependent fundamental solution. Examples of Helmholtz problems will be solved with the different formulations using different levels of refinement and then their results will be compared with the available analytical solutions for numerical efficiency evaluation. In the investigation of the computational efficiency, the times spent in the solutions will be measured and compared, depending on the degrees of freedom of the solved systems.

Keywords: Helmholtz; BEM; RIM.



XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



1 Introdução

A solução de integrais de domínio em que os núcleos não são auto-adjuntos (BREBBIA et al., 1984) é historicamente um dos principais desafios do Método dos Elementos de Contorno (MEC). O formulação do Método dos Elementos de Contorno da Reciprocidade Dual (MECRD) foi a primeira técnica geral de MEC capaz de resolver integrais de domínio com generalidade relativa, incluindo integrais de domínio dependentes do tempo e problemas difusivo-advectivos. Baseado em um esquema elegante, os núcleos são aproximados por um conjunto finito de funções de base radial (BUHMANN, 2003; SARRA; KANSA, 2009) e as integrais de domínio são transformados em integrais de contorno, usando uma função de interpolação primitiva. A formulação MECRD usa uma solução fundamental simples, evitando dificuldades requeridas por soluções fundamentais elaboradas (RAMACHANDRAN, 1994). Entretanto, estudos mostraram imprecisões em muitos tipos de aplicações, uma vez que a formulação requer a construção de duas matrizes auxiliares pela multiplicação das matrizes clássicas dos elementos de contorno H e G e o modelo matemático parece ser insuficientemente robusto para representar certos efeitos, especialmente relacionados a fenômenos dinâmicos.

O Método de integração radial (MIR) (GAO, 2002), aliado ao MEC, surge como alternativa importante neste contexto. Com relação aos problemas de Poisson e outras situações em que as forças do corpo são conhecidas, a eliminação da integral de domínio é feita sem qualquer outra aproximação além do próprio procedimento de discretização. Se a variável primordial estiver incluída no núcleo do domínio integral, um procedimento de base radial similar ao MECRD pode ser usado para atingir seus propósitos. No entanto, o custo computacional da formulação Método dos Elementos de Contorno com Integração Radial (MECIR) é alto, uma vez que sua estratégia usual requer avaliação sucessiva das integrais para cada ponto de origem.

A formulação do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta (MECID) (LOEFFLER et al., 2015) é uma técnica recente que também usa um conjunto de funções de base radial para aproximação, mas ao contrário da MECRD, o núcleo inteiro do domínio integral é interpolado, incluindo a solução fundamental. Alguns exemplos de aplicação são casos que envolvem fontes, forças corporais, problemas difusivos-advectivos onde efeitos de inércia foram tratados com sucesso.

A formulação do MEC com solução fundamental dependente da frequência, aqui denominada MECSF, baseia-se no uso de ferramentas matemáticas da Teoria das Equações Integrais para avaliar a integral de domínio utilizando em sua concepção inicial uma solução fundamental dependente da frequência de excitação.

Assim, neste trabalho a avaliação da composição proposta entre MECIR, MECID e MECSF é realizada pela solução de problemas de Helmholtz, considerando a resposta de frequência direta. As soluções de referência são fornecidas por soluções analíticas disponíveis, abordando problemas previamente resolvidos nas referências mencionadas.

2 Equação de Helmholtz

A Equação de Helmholtz pode ser interpretada como uma simplificação da Equação de Ondas Acústicas (GRAFF, 1975) na qual se busca a amplitude estacionária $u(X)$ produzida no sistema por uma excitação variável cuja frequência ω é conhecida. Essa equação é dada por:

$$\nabla^2 u(X) = - \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 u(X) \quad (1)$$

Na Eq. (1) k é a velocidade de propagação da onda acústica em meio contínuo. Integrando a Eq. (1) sobre o domínio físico $\Omega(X)$, usando uma função auxiliar, nomeada para solução fundamental $u^*(\xi; X)$, a seguinte equação resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(X) u^*(\xi; X) d\Omega = - \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega \quad (2)$$

Visando um modelo matemático mais simples, nas formulações MECRD e MECID a função base radial é usada para aproximar o núcleo não adjunto do lado direito da Eq. (2). Ambas as técnicas também utilizam a solução fundamental relacionada ao problema de Laplace, que não é dependente da frequência ω , o que permite que uma matriz de inércia explícita seja gerada, como ocorre com o Método dos Elementos Finitos (ZIENKIEWICZ et al., 2013). No entanto, essa simplicidade é alcançada à custa de uma perda de capacidade de representação do espaço funcional gerado na formulação integral do MEC, uma vez que a solução fundamental de um problema difusivo estacionário é utilizada.

Assim, mantém-se a abordagem matemática padrão do MEC para o operador laplaciano, na qual a aplicação da integração por partes e o Teorema da Divergência na Eq. (2) é executado, resultando na seguinte expressão integral:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (3)$$

Na Eq. (3), $u(X)$ é o potencial escalar e $q(X)$ é sua derivada normal; $u^*(\xi, X)$ é a solução fundamental para a Equação de Laplace e $q^*(\xi, X)$ é sua derivada normal:

$$u^*(\xi; X) = \frac{-\ln r}{2\pi} \quad (4)$$

$$q^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5)$$

O coeficiente $c(\xi)$ depende da posição do ponto ξ no domínio físico $\Omega(X) + \Gamma(X)$, e se o ponto está localizado no contorno $\Gamma(X)$, também depende de sua suavidade (Brebbia e Walker, 1980).

3 Formulação MECIR

A integral de domínio da Eq. (3) pode ser escrita em coordenadas polares como:

$$I(\xi) = \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi;X)d\Omega = \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi;X)\rho d\rho d\theta = \int_{\theta} \int_0^R u(X)u^*(\xi;X)\rho d\rho d\theta \quad (6)$$

O MIR, em sua formulação clássica, aproxima a variável $u(X)$ como uma soma de M produtos de funções de aproximação f^m e coeficientes a determinar γ^m , ou seja:

$$u(X) = \sum_{m=1}^M \gamma^m f^m \quad (7)$$

Inserindo a equação (7) na equação (6), tem-se:

$$I(\xi) = \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi;X)d\Omega = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\theta} \int_0^R f^m u^*(\xi;X)\rho d\rho d\theta \quad (8)$$

onde ξ é o ponto fonte e x o ponto de integração e R é o valor de ρ em um ponto no contorno Γ . Ou ainda:

$$I(\xi) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\Gamma} \frac{F^m(\xi)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad (9)$$

Sendo:

$$F^m(\xi) = \int_0^R f^m u^*(\xi;X)\rho d\rho \quad (10)$$

Assim, a integral de domínio da equação (8) pode ser escrita como:

$$I(\xi) = \left[\int_{\Gamma} \frac{F_1(\xi)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad \int_{\Gamma} \frac{F_2(\xi)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad \dots \quad \int_{\Gamma} \frac{F_M(\xi)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \right] \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Para calcular γ_m , é necessário considerar a força de corpo em M pontos do domínio e do contorno. No caso deste trabalho, estes pontos são os nós do contorno e alguns pontos internos. Assim, a equação (7) pode ser escrita como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\gamma \quad (12)$$

e γ pode ser calculado como:

$$\gamma = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \quad (13)$$



XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



Substituindo (13) na equação (11), tem-se:

$$I(\xi) = \left[\int_{\Gamma} \frac{F_1(\xi)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma \quad \int_{\Gamma} \frac{F_2(\xi)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma \quad \dots \quad \int_{\Gamma} \frac{F_M(\xi)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma \right] \mathbf{F}^{-1} \mathbf{p}. \quad (14)$$

ou, para todos os pontos fontes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, tem-se:

$$\mathbf{I} = \mathbf{S} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (15)$$

onde

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \frac{F_1(\xi_1)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{F_2(\xi_1)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma & \dots & \int_{\Gamma} \frac{F_M(\xi_1)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \frac{F_1(\xi_2)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{F_2(\xi_2)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma & \dots & \int_{\Gamma} \frac{F_M(\xi_2)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma} \frac{F_1(\xi_N)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{F_2(\xi_N)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma & \dots & \int_{\Gamma} \frac{F_M(\xi_N)}{r} \mathbf{n} \cdot d\Gamma \end{bmatrix}$$

Escrevendo a equação (14) para todos os pontos do domínio, isto é, todos os nós do contorno e pontos internos, tem-se:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} - \mathbf{G} \mathbf{q} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{S} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{H}_2 \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{q} \quad (17)$$

onde

$$\mathbf{H}_2 = \left[\mathbf{H} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{S} \mathbf{F}^{-1} \right] \quad (18)$$

As funções de aproximação f^m são funções de base radial escritas em termos de R , onde R é a distância entre o centro T da função de base radial e o ponto de integração P . No presente trabalho serão utilizadas funções de aproximação denominadas "Thin Plate Spline", dadas por $f = R/\ln(R)$.

4 Formulação MECID

Loeffler et al. (2015) propõe uma abordagem alternativa onde a equação 6 é reescrita como:

$$I(\xi) = \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega = \int_{\Omega} u^*(\xi, X) [u(X) - u(\xi)] d\Omega + \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \quad (19)$$



e todo o núcleo da integral de domínio, isto é, o produto $u^*(\xi, X) [u(X) - u(\xi)]$, é aproximado por uma soma de M produtos de funções de interpolação f^m e coeficientes a determinar γ^m , ou seja:

$$u^*(\xi, X) [u(X) - u(\xi)] = \sum_{m=1}^M \gamma^m f^m \quad (20)$$

Através de um processo análogo ao apresentado na secção anterior, obtém-se a equação matricial:

$$\mathbf{I} = \mathbf{sF}^{-1} u^*(\xi, X) [u(X_m) - u(\xi)] \quad (21)$$

onde

$$\mathbf{s} = \left[\int_{\Gamma} \frac{F_1}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \int_{\Gamma} \frac{F_2}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \dots \int_{\Gamma} \frac{F_M}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \right].$$

Chamando \mathbf{sF}^{-1} de $[S_1 S_2 \dots S_m]$ e considerando que os pontos de interpolação e os pontos fonte são coincidentes pode-se reescrever a equação (21) como

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_2 u^*(X_2, X_1) & \dots & S_m u^*(X_m, X_1) \\ S_1 u^*(X_1, X_2) & S_{22} & \dots & S_m u^*(X_m, X_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_1 u^*(X_1, X_m) & S_2 u^*(X_2, X_m) & \dots & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde S_{ii} é igual a menos a soma dos outros termos da linha. O termo $\int_{\Omega} u^*(\xi, X) u(\xi) d\Omega$ pode ser calculado diretamente pelo MIR e o fazendo para todos os pontos obtém-se:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} u^*(X, X_1) d\Omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \int_{\Omega} u^*(X, X_2) d\Omega & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \int_{\Omega} u^*(X, X_m) d\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (23)$$

Escrevendo a equação (3) para todos os pontos do domínio, isto é, todos os nós do contorno e pontos internos, tem-se:

$$\mathbf{H}\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{u} + \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \mathbf{M}\mathbf{u} = 0 \quad (24)$$

onde $\mathbf{M} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$.



5 Formulação MECSF

A solução fundamental de Helmholtz dependente da frequência é uma função de transferência que, para dada frequência, transfere os efeitos de uma força concentrada, representada por uma função delta de Dirac, de um ponto de origem para um ponto de campo. Portanto, dado um domínio infinito bidimensional, a solução fundamental $u^*(X, \xi, k = \omega/c)$, dependente da frequência ω e da localização dos pontos fonte ξ e campo X , e q^* , sua derivada na direção normal, (BREBBIA; WALKER, 1980; DOMINGUEZ, 1993), são dadas por:

$$u^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(i \frac{\omega r}{c} \right) \quad (25)$$

$$q^*(\xi; X) = -\frac{i\omega}{2\pi c} K_1 \left(i \frac{\omega r}{c} \right) \frac{\partial r}{\partial n(X)} \quad (26)$$

Onde K_0 e K_1 são funções de Bessel, respectivamente de primeiro e segundos tipos.

Em uma abordagem paralela às formulações MECIR e MECID, que utilizam a solução da equação de Laplace, a formulação MECSF utiliza a solução acima como função auxiliar na Eq. (1).

A aplicação da integração por partes e do teorema da divergência na Eq (2), operações bem documentadas na literatura (BREBBIA; WALKER, 1980; BREBBIA et al., 1984), considerando a derivada normal como indicado na Eq. (26), resulta na seguinte expressão integral:

$$\int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma = -k^2 \int_{\Omega} u(X) [u^*(\xi; X) + \nabla^2 u^*(\xi; X)] d\Omega \quad (27)$$

Considerando a função auxiliar $u^*(\xi; X)$ dada na Eq. (25) e sua derivada normal $q^*(\xi; X)$, Eq. (26), onde ξ é um ponto de domínio interno e considerando as ferramentas matemáticas básicas da teoria de equações integrais, a expressão matemática gerada no lado direito da Eq. (27), colocados entre colchetes pode ser escrita como:

$$[u^*(\xi; X) + \nabla^2 u^*(\xi; X)] = -\Delta(\xi; X) \quad (28)$$

Onde Δ é a função delta de Dirac. A substituição da Eq. (28) na Eq. (27) fornece a seguinte equação integral de contorno:

$$\int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma + k^2 c(\xi) u(\xi) = 0 \quad (29)$$

Na Eq. (29), o valor do $c(\xi)$ depende não apenas do posicionamento do ponto de origem ξ em relação ao domínio físico $\Omega(X)$ mas também da suavidade do contorno no mesmo ponto (BREBBIA et al., 1984). Considerando que a solução fundamental e sua derivada normal são



dadas por funções complexas, o procedimento padrão de discretização do MECSF gera matrizes consequentemente complexas, nas quais álgebra adequada deve ser usada. Por outro lado, na expressão matemática obtida da Eq. (29) não há uma matriz de inércia (como ocorre com o MEF). Assim, a frequência é inserida nos coeficientes das matrizes **H** e **G** e a solução dos problemas de autovalor não é imediata (BREBBIA; WALKER, 1980). As soluções das integrais singulares também são mais complicadas quando comparadas às operações similares em problemas com coeficientes reais. Devido à quantidade de operações matemáticas, as soluções clássicas de integrações singulares não são apresentadas aqui. Detalhes podem ser obtidos nas referências (DOMINGUEZ, 1993; KYTHE, 1995).

6 Simulações Numéricas

As simulações foram feitas em softwares de criação dos autores na linguagem gratuita Julia versão 0.6.0. O programa foi executado em um computador Dell OptPlex 7040 com processador Intel(R) Core i5 - 6500 (3.20GHz).

Foram resolvidos dois problemas com geometria quadrada simples de lado unitário, dos quais maiores particularidades serão descritas adiante. As propriedades mecânicas também foram tomadas como unitárias. Cada problema foi avaliado ao longo intervalo real \mathbf{I}_{freq} em 15 frequências distintas igualmente espaçadas, para 7 (sete) níveis de crescente discretização em cada uma das formulações. A discretização é aqui explicitada através do número de Graus de Liberdade (GDL) da malha, definido como a soma entre o Número de Pontos de Contorno (NPC) e o Número de Pontos Internos (NPI).

Quanto ao tipo de elemento de contorno utilizado: A formulação MECSF foi resolvida com elementos constantes e quadráticos descontínuos e as formulações acopladas ao MIR e ao MIRd foram resolvidas com elementos quadráticos contínuos.

6.1 Eficiência Numérica

A avaliação da eficiência numérica foi feita através da medida do Erro Percentual da Raiz Quadrada Média (ERQM) gerado pelas formulações no cálculo do potencial $u(X)$ ao longo dos pontos internos da geometria.

$$\%ERQM = \frac{100}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (\hat{U}_j - U_j)^2}{\sum_{j=1}^N \hat{U}_j^2}} \quad (30)$$

onde \hat{U}_j é o valor da solução analítica no j -ésimo ponto, U_j o valor da solução numérica no j -ésimo ponto e N o número de pontos internos da malha.

6.2 Eficiência Computacional

Para avaliação da eficiência computacional, foi mensurado o tempo total para solução dos exemplos em cada uma das formulações. Foi também mensurado o percentual do tempo para geração da matriz de inércia \mathbf{M} em relação ao tempo de total MECIR e da matriz de inércia \mathbf{Md} em relação ao MECIR. O tempo foi avaliado ao longo das simulações com utilizando a função @timeit oriunda do pacote TimerOutputs.

6.3 Exemplo 01: Barra Tracionada

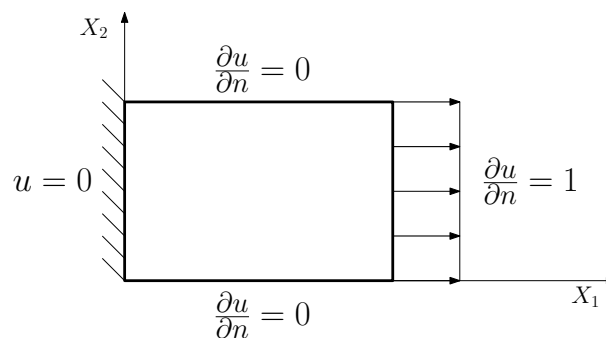


Figura 1: Características geométricas e condições de contorno para o primeiro exemplo
Fonte: (Próprios autores, 2018)

O primeiro exemplo consiste da solução de um problema unidimensional simples, no qual se obtém os valores do potencial $u(X_1)$ para condições de contorno particulares, mostradas na Fig. (1) A equação de governo é dada pela seguinte equação:

$$k^2 \frac{\partial^2 u(X_1)}{\partial X_1^2} = -\omega^2 u(X_1) \quad (31)$$

Neste caso, a solução analítica harmônica é dada por:

$$u(X_1) = \frac{\sin(\omega X_1)}{\omega \cos(\omega)} \quad (32)$$

Para este exemplo o intervalo de frequências analisado é: $\mathbf{I}_{\text{feq}} = [10^{-5}, 8] \text{ Hz}$.

A figura seguinte mostra o comportamento do erro percentual em função do refino da malha para a 7º frequência analisada.

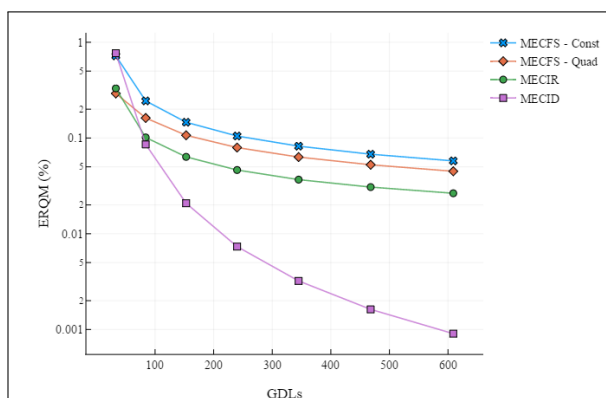


Figura 2: ERQM x GDL para $w^2 = 11.8 \text{ s}^{-2}$
Fonte: (Próprios autores, 2018)

Observa-se um comportamento de declínio no valor do erro em todas as formulações, sendo a formulação MECID aquela que maior influencia recebe do aumento de pontos, obtendo resultados inferiores às demais formulações apenas para as malhas mais pobres. Ressalta-se o fato do erro ser inferior a 1% para todas as formulações até mesmo para os menores níveis de refino.

Abaixo temos a variação do ERQM ao longo do intervalo I_{feq} para dois níveis distintos de discretização.

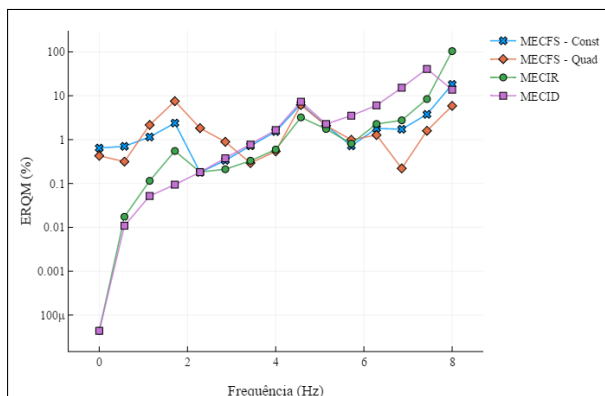


Figura 3: NPI/NPC = 24/9
Fonte: (Próprios autores, 2018)

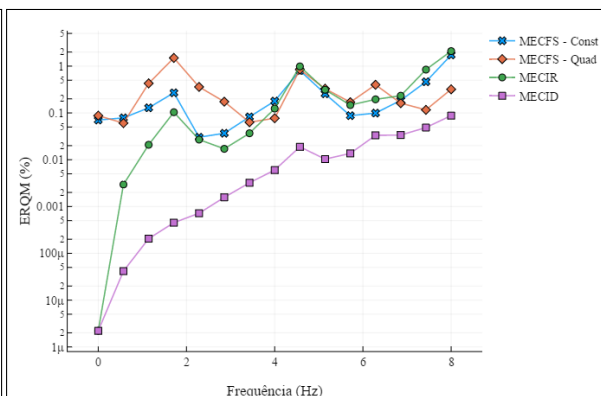


Figura 4: NPI/NPC = 120/225
Fonte: (Próprios autores, 2018)

Em termos gerais observa-se uma tendência de crescimento no valor do erro com o aumento da frequência. As formulações MECFS e MECIR se mantêm próximas, exceto nas primeiras frequências, onde, em termos relativos, o erro MECIR é inferior. Nota-se que para a discretização mais pobre, Fig. (3), os métodos que geram a matriz M , MECIR e MECID, tem uma resposta



com maiores imprecisões, enquanto na Fig. (4) esta é superior aos resultados dependente da frequência para todas as frequências analisadas.

A tabela abaixo compila as medições de tempo na solução do problema para as 15 frequências de I_{feq} em função da discretização.

Tabela 1: Tempo de Computação em Segundos

NPC/NPI	MECSF(Const)	MECSF(Quad)	MECIR	M	MECID	Md
24/9	0.32	0.95	1.95	25.2%	0.29	60.6%
48/36	0.67	1.29	2.85	62.8%	0.37	51.4%
72/81	1.43	2.12	9.47	88.2%	0.47	44.7%
96/144	2.78	3.65	28.70	95.6%	0.67	38.8%
120/225	4.87	6.06	69.99	97.9%	0.91	34.1%
144/324	8.39	9.21	158.80	98.9%	1.33	31.6%
168/441	12.17	14.25	317.07	99.3%	1.80	29.4%

Nota-se um aumento do tempo de computação como crescimento do total de GDLs, fato já esperado uma vez que o acréscimo de pontos implica matrizes de maior ordem no sistema. A formulação MECIR é a mais custosa, sendo até 175 vezes mais dispendiosa quando comparada ao MECID e 25 vezes mais cara se comparada ao MECSF para a maior discretização. Isto se deve principalmente ao tempo de computação da matriz **M** cujo percentual em relação ao tempo total da MECIR é crescente, sendo responsável por até 99.3% deste. Essa diferença no tempo de cálculos das matrizes de inércia se deve aos parâmetros envolvidos na geração destas. Enquanto a matriz **M** depende tanto dos pontos interpolantes quanto dos pontos fontes. A matriz **Md** depende apenas dos pontos de interpolação, o que reduz a ordem do número de operações a serem executadas para a sua geração e consequentemente reduz o impacto do incremento de pontos internos no tempo de computação.

6.4 Exemplo 02: Membrana elástica fixada em três arestas com tração prescrita num dos bordos

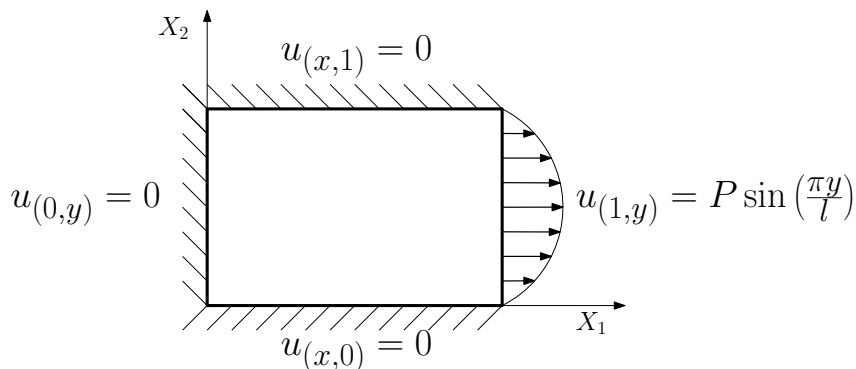


Figura 5: Características geométricas e condições de contorno para o segundo exemplo
Fonte: (Próprios autores, 2018)

Neste segundo exemplo é avaliado o desempenho das formulações prescritas junto à um problema bidimensional onde condições de contorno são todas de Dirichlet, sendo especificadas conforme mostra a Fig. (5). Sua solução é obtida pela solução da seguinte equação de governo:

$$k \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} \right) \right] = -\omega^2 u \quad (33)$$

Para este caso, a solução analítica obtida pelo método de separação de variáveis é dada por:

$$u_{(x,y)} = \frac{\sin(X_1 \sqrt{\omega^2 - \pi^2}) \sin(\frac{\pi X_2}{l})}{\sin(\sqrt{\omega^2 - \pi^2})} \quad (34)$$

Aqui: $\mathbf{I}_{\text{feq}} = [1.5\pi, 4\pi] \text{ Hz}$.

Apesar de sua maior complexidade este exemplo obteve resultados em consonância com o exemplo anterior. A figura abaixo mostra a curva do erro percentual em função do número de Graus de Liberdade para a 4º e a 9º frequência computadas.

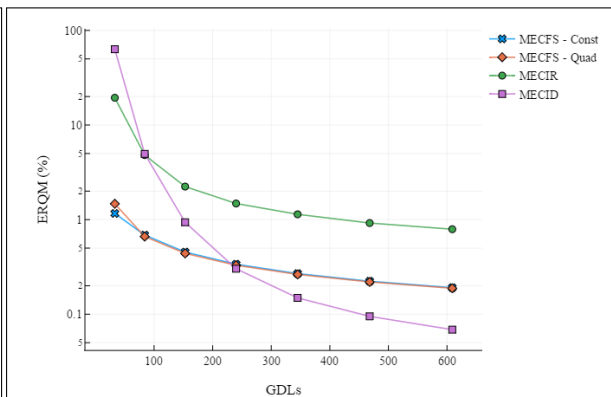
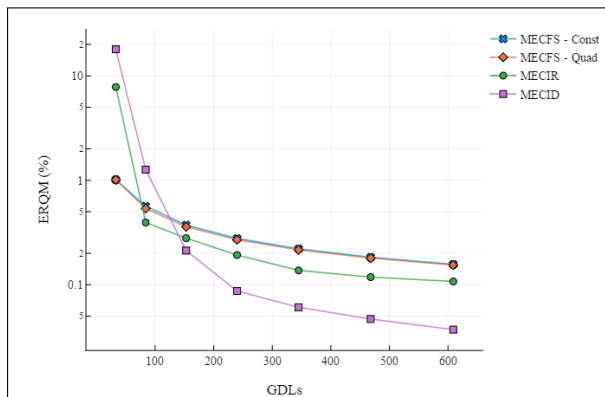


Figura 6: ERQM x GDL para $w^2 = 40.9 \text{ s}^{-2}$
Fonte: (Próprios autores, 2018)

Figura 7: ERQM x GDL para $w^2 = 84.6 \text{ s}^{-2}$
Fonte: (Próprios autores, 2018)

Nota-se que a formulação MECFS obteve valores de erro bem próximos em ambas as frequências para todas as discretizações. Já as formulações MECIR e MECID tiveram maior dificuldade em tratar a frequência mais alta para as malhas mais escassas, mas obtiveram bons resultados nas malhas mais densas.

Abaixo temos a curva do ERQM ao longo do intervalo I_{feq} para dois níveis distintos de discretização.

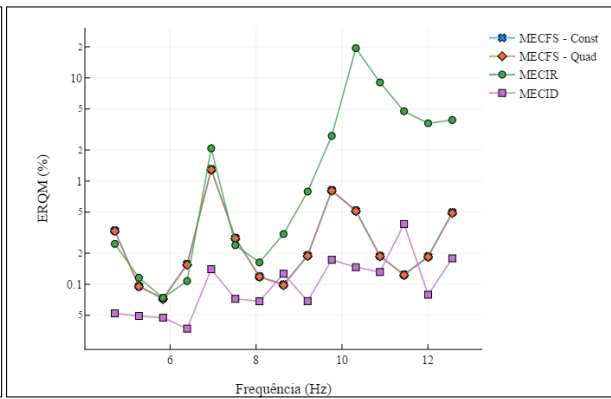
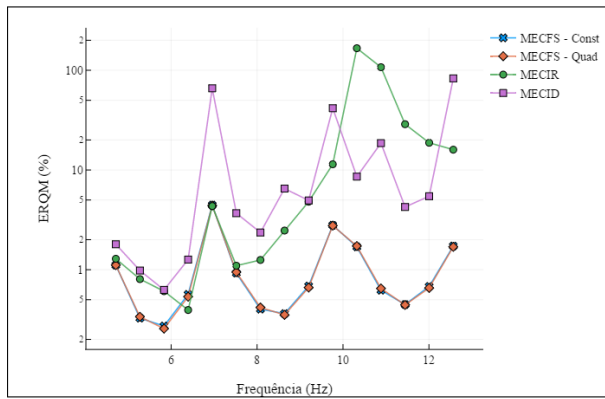


Figura 8: NPI/NPC = 48/36
Fonte: (Próprios autores, 2018)

Figura 9: NPI/NPC = 168/441
Fonte: (Próprios autores, 2018)

Em conformidade com os resultados anteriores nota-se um aumento significativo da precisão dos métodos MECIR e MECID para a maior discretização. Destaque para a relativa dificuldade da formulação MECIR em tratar as frequências mais elevadas e para a acentuada melhora no resultado MECID.

A tabela abaixo compila as medições de tempo para o exemplo 2.



Tabela 2: Tempo de Computação em Segundos

NPC/NPI	MECSF(Const)	MECSF(Quad)	MECIR	M	MECID	Md
24/9	0.41	0.87	1.23	54.8%	0.25	59.2%
48/36	0.70	1.24	2.71	62.7%	0.37	51.4%
72/81	1.52	2.17	9.07	88.2%	0.46	45.7%
96/144	2.98	3.83	27.92	95.6%	0.65	38.5%
120/225	5.26	6.06	70.35	97.8%	0.90	34.4%
144/324	8.52	9.48	152.44	98.9%	1.25	31.2%
168/441	13.56	13.94	298.52	99.3%	1.82	29.1%

Os resultados acima são semelhantes aos obtidos no exemplo 01 e reforçam a noção do quão mais custosa é a formulação MECIR quando comparada às demais.

7 Conclusões

A formulação dependente da frequência, MECSF, se mostrou numericamente eficiente, apresentando baixos valores de erro e principalmente, estabilidade, mesmo para as frequências mais elevadas. As formulações independentes da frequência, MECIR e MECID, apresentaram valores de erro mais altos para as menores discretizações. Contudo, obtiveram bons resultados nas malhas mais densas, principalmente a formulação MECID que mostrou a maior precisão para os maiores valores de GDL. Vale ressaltar que essas formulações dependem dos da quantidade de pontos internos enquanto o MECSF resolve o problema somente com a discretização do contorno. Os casos analisados onde a frequência é muito baixa a equação a ser resolvida fica muito próxima da equação de Laplace e por isso é esperado que os métodos que usam a solução fundamental desse problema tenham um bom desempenho, que pôde ser observado nos casos analisados.

No aspecto computacional a formulação MECIR se mostrou a mais custosa, apresentando tempos de computação demasiadamente elevados quando comparados ao tempos das demais formulações. A troca do termo a ser integrado mostra-se computacionalmente eficiente, uma vez que a formulação MECID apresentou os menores valores de tempo em todas as simulações. O fato das matrizes serem independentes da frequência tornam esses métodos interessantes para problemas de varredura na frequência já que as mesmas matrizes são utilizadas enquanto o MECSF tem de recalculá-las para cada nova frequência analisada, motivo esse que o tornou significativamente mais custoso que o método proposto.



REFERÊNCIAS

BREBBIA, C.; TELLES, J.; WROBEL, L. a. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1984. ISBN 9783540124849.

BREBBIA, C.; WALKER, S. *Boundary Element Techniques in Engineering*. [S.l.]: Newnes-Butterworths, 1980. ISBN 9780408003407.

BUHMANN, M. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics). ISBN 9781139435246.

DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements in Dynamics*. [S.l.]: Computational Mechanics Publications, 1993. (Computational Engineering). ISBN 9781853122583.

GAO, X.-W. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 26, n. 10, p. 905–916, 2002.

GRAFF, K. *Wave Motion in Elastic Solids*. [S.l.]: Dover Publications, 1975.

KYTHER, P. *An Introduction to Boundary Element Methods*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1995. (Symbolic & Numeric Computation). ISBN 9780849373770.

LOEFFLER, C. F.; CRUZ, Á. L.; BULCÃO, A. Direct use of radial basis interpolation functions for modelling source terms with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 50, p. 97–108, 2015.

RAMACHANDRAN, P. *Boundary element methods in transport phenomena*. [S.l.]: Computational Mechanics Publications, 1994. (International series on computational engineering). ISBN 9781562521844.

SARRA, S. A.; KANSA, E. J. Multiquadric radial basis function approximation methods for the numerical solution of partial differential equations. *Advances in Computational Mechanics*, v. 2, n. 2, 2009.

ZIENKIEWICZ, O. et al. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2013. (Butterworth-Heinemann, v. 1). ISBN 9781856176330.