



## TÉCNICAS H E P ADAPTATIVAS APLICADAS AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

### H and p adaptive strategies applied to the Generalized Finite Element Method

Murilo Henrique Campana Bento (1) (P); Sergio Persival Baroncini Proença (2)

(1) Mestrando, Departamento de Estruturas (SET), EESC-USP, São Carlos - SP, Brasil.

(2) Prof. Titular, Departamento de Estruturas (SET), EESC-USP, São Carlos - SP, Brasil.

Email para Correspondência: m.bento@usp.br; (P) Apresentador

**Resumo:** O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) tem se apresentado como alternativa eficaz para obtenção de soluções com boa precisão para problemas nos quais o Método dos Elementos Finitos (MEF), em sua versão convencional, requeriria elevado custo computacional. Em relação ao controle sobre a precisão da resposta numérica, a análise de erros de discretização, assim como a implementação de estratégias adaptativas, são temas que já foram amplamente abordados para o MEF e que vêm sendo tratados no contexto do MEFG e suas versões estáveis. Neste trabalho, apresenta-se uma contribuição original que objetiva melhor avaliar a precisão das soluções encontradas, garantindo que elas atendam a limitações pré-especificadas para os erros. Um estimador de erro *a-posterior*, recentemente elaborado, é empregado como guia para os procedimentos adaptativos, sendo utilizado para indicar regiões onde a adaptividade h ou p possa ser aplicada. As estratégias implementadas consideram enriquecimentos polinomiais para conduzir a análise p-adaptativa e reconstrução da malha para a adaptividade h. Exemplos numéricos ilustram a efetividade das versões h e p adaptativas propostas para o MEFG e que proporcionam respostas que atendem a limites de tolerância previamente estabelecidos.

*Palavras chaves:* MEFG; Estimativa de Erro; Adaptividade

**Abstract:** The Generalized Finite Element Method (GFEM) has become an efficient alternative to obtain solutions with good accuracy for problems in which the Finite Element Method (FEM) would require excessively high computational cost. Regarding the control over the numerical solutions' accuracy, discretization error analysis, as well as the implementation of adaptive strategies, are subjects largely studied for the FEM. They are now being addressed in the GFEM and its stable versions context. In this work, an original contribution aiming to better evaluate the solutions' accuracy and ensure that they meet pre-specified limits for the errors is presented. A recently developed *a-posteriori* error estimator is used as guide for the adaptive procedures. It is used to indicate the regions where h or p-adaptivity can be applied. The implemented strategies consider polynomial enrichments to perform the p-adaptivity whereas remeshing is used to perform the h-adaptivity. Numerical examples show the effectivity of the h and p adaptive strategies proposed for the GFEM whilst providing responses that meet pre-specified tolerance limits.

*Keywords:* GFEM; Error Estimation; Adaptivity



# XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018  
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



## 1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é um método direto utilizado para gerar soluções aproximadas para Problemas de Valor de Contorno (PVC). O método se caracteriza pela possibilidade de melhoria da aproximação em regiões específicas do domínio, explorando conhecimentos prévios acerca do resultado esperado para a solução. Essa característica permite obter soluções para o problema analisado que são mais próximas da solução exata, com menor erro associado à discretização e, ainda, com custo computacional reduzido em relação àquele necessário para obtenção de resposta similar utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) em sua versão convencional, por exemplo.

Um passo na direção de avaliar a robustez do método consiste no estudo do erro associado às soluções geradas por ele. Nos casos em que as soluções exatas não são conhecidas, os estimadores de erro desempenham papel importante na avaliação da qualidade dessa solução. A obtenção de estimadores representativos do erro é, portanto, tópico importante de pesquisa e vem sendo desenvolvido há algum tempo para o MEFG. Além disso, dispondo de um bom estimador e conhecendo a distribuição de erro sobre o domínio do problema, pode-se buscar melhorar a discretização original a fim de obter uma nova solução que seja melhor que a anterior. Essa é a ideia principal dos procedimentos adaptativos, que procuram otimizar a busca por soluções aproximadas de modo que essas resultem suficientemente precisas e cujo custo computacional seja condizente sob o ponto de vista prático.

Este trabalho busca explorar técnicas adaptativas que foram inicialmente estudadas no contexto do MEF convencional e tratá-las para a resolução de problemas utilizando o MEFG e suas versões estáveis. Em primeiro lugar, investigam-se técnicas h-adaptativas utilizando um estimador de erro *a-posteriori* recentemente proposto. As análises realizadas mostram que o estimador funciona como um bom indicador das regiões onde melhoria da solução é necessária. Em seguida, o mesmo estimador é empregado na investigação de técnicas p-adaptativas. Nesse caso, busca-se melhorar a solução via enriquecimentos polinomiais, confrontando-se os resultados obtidos ao utilizar diferentes versões do MEFG. A boa eficiência computacional do estimador de erro utilizado, em conjunto com o emprego das técnicas adaptativas apresentadas, resultam em soluções que atendem a erros médios globais com limites pré-especificados e com custo computacional reduzido.

Na seção 2 deste artigo, o MEFG, suas versões estáveis e o modo de construção do espaço de aproximação ampliado que contém a solução aproximada são apresentados. Na seção 3, apresenta-se brevemente o estimador de erro *a-posteriori* baseado em recuperação utilizado neste trabalho como guia para os procedimentos adaptativos. Na seção 4, exemplos numéricos explorando os procedimentos h e p adaptativos são ilustrados e, por fim, na seção 5 são apresentadas as principais conclusões obtidas com o trabalho.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O MEFG (Duarte; Babuška; Oden, 2000; Strouboulis; Copps; Babuška, 2001) é caracterizado como um método de Galerkin, no qual o espaço de aproximação utilizado para

gerar as suas funções de aproximação,  $S_{MEFG}$ , é obtido aumentando-se o espaço de aproximação do MEF convencional,  $S_{MEF}$ , com um espaço  $S_{ENR}$  de funções que apresentam boa qualidade para reprodução da solução local do problema em análise, i.e.

$$S_{MEFG} = S_{MEF} + S_{ENR} \quad (1)$$

A principal diferença entre o MEFG e o MEF convencional está na construção das funções de forma utilizadas em cada um dos métodos. Pelo fato de, no MEFG, o espaço de aproximação ser construído a partir do enriquecimento de uma Partição da Unidade (PU) por um conjunto de funções de enriquecimento, as funções de forma para o método, associadas aos nós da discretização, são obtidas a partir do produto entre essa PU e as funções de enriquecimento atreladas a um dos nós. Essas funções são conhecidas como funções de forma generalizadas e podem ser escritas como

$$\phi_{\alpha i} = \varphi_{\alpha} L_{\alpha i} \quad (\text{sem soma em } \alpha) \quad (2)$$

Na Eq. (2),  $\varphi_{\alpha}$  representa a PU associada ao nó  $\alpha$  da discretização, com suporte  $\omega_{\alpha} = \{\mathbf{x} \in \Omega / \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \neq 0\}$ , e  $L_{\alpha i}$  representa uma das funções de enriquecimento atreladas ao nó  $\alpha$  e reunidas no vetor  $\mathbf{L}_{\alpha}$ . A Fig. (1) ilustra a construção das funções de forma para o MEFG.

A combinação linear das funções de forma apresentadas pela Eq. (2) definem uma aproximação  $\hat{\mathbf{u}}$  para o campo vetorial de deslocamentos. A Eq. (3) apresenta essa aproximação

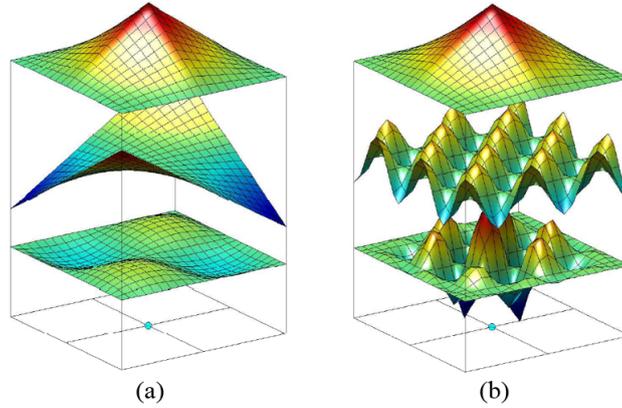
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^{\mathcal{I}(\alpha)} \mathbf{u}_{\alpha i} \phi_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^{\mathcal{I}(\alpha)} \mathbf{u}_{\alpha i} \varphi_{\alpha} L_{\alpha i} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \sum_{i=1}^{\mathcal{I}(\alpha)} \mathbf{u}_{\alpha i} L_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \hat{\mathbf{u}}_{\alpha} \end{aligned} \quad (3)$$

e nela  $\mathbf{u}_{\alpha i}$  refere-se aos parâmetros utilizados para a montagem da aproximação  $\hat{\mathbf{u}}$  como uma combinação linear das funções  $\phi_{\alpha i}$ . Esses parâmetros podem ser entendidos como graus de liberdade generalizados do problema. No caso,  $\mathcal{I}(\alpha) = \text{card}(\mathbf{L}_{\alpha})$  e indica o número de funções de enriquecimento atreladas ao nó  $\alpha$ .

Percebe-se pela Eq. (3) que a aproximação global do problema consiste, portanto, na ‘costura’ das funções de aproximação locais  $\hat{\mathbf{u}}_{\alpha} \in \chi_{\alpha}(\omega_{\alpha}) = \text{span}(L_{\alpha i})_{i=1, \dots, \mathcal{I}(\alpha)}$  feitas exclusivamente pela PU, o que garante também sua conformidade.

Tomando  $L_{\alpha 1} = 1, \forall \alpha$ , o MEFG recupera aproximações do MEF. Nesse caso, como indica a Eq. (1), pode-se convenientemente dividir a Eq. (3) em duas parcelas, uma com a aproximação originalmente proposta pelo MEF e outra com a parcela enriquecida da aproximação.

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{u}_{\alpha 1}^{\text{MEF}} \varphi_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \sum_{i=2}^{\mathcal{I}(\alpha)} \mathbf{u}_{\alpha i}^{\text{ENR}} L_{\alpha i} \quad (4)$$



**Figura 1. Construção da função de forma para o MEFG, usando enriquecimentos (a) polinomial e (b) não polinomial, como o produto entre a PU e o enriquecimento adotado. As funções mais acima representam  $\varphi_\alpha$ , as intermediárias representam  $L_{\alpha i}$  e as mais abaixo a função  $\phi_{\alpha i}$**   
Fonte: Adaptado de (Kim; Duarte; Proença, 2009).

A Eq. (4) exprime a ideia básica do MEFG de ampliar o espaço de aproximação do MEF convencional com um espaço gerado pelas funções de enriquecimento adotadas para o problema. A partir da Eq. (4), os espaços de aproximação constantes na Eq. (1) podem ser expressos por

$$\mathbb{S}_{\text{MEF}} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha \varphi_\alpha, c_\alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad (5)$$

$$\mathbb{S}_{\text{ENR}} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha \chi_\alpha^{\text{ENR}}, \chi_\alpha^{\text{ENR}} = \text{span}(L_{\alpha i})_{i=2, \dots, \mathcal{I}(\alpha)} \right\} \quad (6)$$

## 2.1 Versões estáveis do MEFG

### 2.1.1 Modificação nas funções de enriquecimento

A versão estável do MEFG (MEFG-E) é obtida por uma simples modificação nas funções de enriquecimento a serem utilizadas no problema, fazendo com que o espaço de aproximação gerado por elas,  $\tilde{\mathbb{S}}_{\text{ENR}}$ , se torne quase-ortogonal em relação ao espaço de aproximação do MEF convencional (Babuška; Banerjee, 2012). A função de enriquecimento modificada é obtida a partir da função de enriquecimento original subtraindo-se dela a interpolante linear ou bilinear de seus valores nos nós dos elementos finitos que formam a nuvem  $\omega_\alpha$ , ou seja,

$$\tilde{L}_{\alpha i} = L_{\alpha i} - I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i}), i = 2, \dots, \mathcal{I}(\alpha) \quad (7)$$

Na Eq. (7),  $I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i})$  refere-se à função interpolante linear ou bilinear, definida, por partes, sobre cada elemento que constitui a nuvem  $\omega_\alpha$ . Ela pode ser escrita, aproveitando

a PU já definida sobre os elementos, como

$$I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i})(x, y) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_j, y_j) L_{\alpha i}(x_j, y_j) \quad (8)$$

em que  $(x_j, y_j)$  referem-se às coordenadas do nó  $j = 1, \dots, n$  com  $n$  o número de nós do elemento finito.

A partir das funções de enriquecimento modificadas  $\tilde{L}_{\alpha i} \in \tilde{\chi}_\alpha(\omega_\alpha)$ , as funções de forma generalizadas  $\tilde{\phi}_{\alpha i}$  são dadas por

$$\tilde{\phi}_{\alpha i} = \varphi_\alpha \tilde{L}_{\alpha i} \quad (9)$$

e o espaço de aproximação  $\mathbb{S}_{\text{ENR}}$  do MEF<sub>G</sub>, dado pela Eq. (6), é agora dado por

$$\tilde{\mathbb{S}}_{\text{ENR}} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha \tilde{\chi}_\alpha^{\text{ENR}}, \tilde{\chi}_\alpha^{\text{ENR}} = \text{span}(\tilde{L}_{\alpha i})_{i=2, \dots, \mathcal{I}(\alpha)} \right\} \quad (10)$$

com  $\mathbb{S}_{\text{MEFG-E}} = \mathbb{S}_{\text{MEF}} + \tilde{\mathbb{S}}_{\text{ENR}}$ .

A construção da aproximação  $\hat{u}$  para o campo de deslocamentos é feita de modo similar ao das Eq. (3) e (4), utilizando, entretanto, a função de forma apresentada pela Eq. (9).

## 2.1.2 Modificação na partição da unidade

Uma outra versão estável para o MEF<sub>G</sub>, proposta em Zhang, Banerjee e Babuška (2014), apresenta uma nova modificação para a construção do espaço relacionado às funções de enriquecimento  $\mathbb{S}_{\text{ENR}}$ , em que altera-se, agora, a PU utilizada na geração desse espaço. O objetivo é tornar as funções de forma generalizadas, relacionadas a nó  $\alpha$ , linearmente independentes sobre  $\omega_\alpha$ . Zhang, Banerjee e Babuška (2014) demonstram as altas taxas de convergência alcançadas com o método em experimentações numéricas unidimensionais, que também podem ser percebidas nos experimentos numéricos em abordagens bidimensionais realizados em Sato, Piedade Neto e Proença (2018?).

A modificação adicional sobre  $\tilde{\mathbb{S}}_{\text{ENR}}$  consiste apenas na utilização de uma nova PU, para o aumento do espaço de aproximação. A PU utilizada é conhecida como *flat-top* e é aqui representada por  $\varphi_\alpha^{\text{FT}}$ . Dessa forma, o espaço de aproximação para o MEF<sub>G</sub>-E<sup>FT</sup> é dado por

$$\mathbb{S}_{\text{MEFG-E}^{\text{FT}}} = \mathbb{S}_{\text{MEF}} + \tilde{\mathbb{S}}_{\text{ENR}}^{\text{FT}} \quad (11)$$

com

$$\tilde{\mathbb{S}}_{\text{ENR}}^{\text{FT}} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha^{\text{FT}} \tilde{\chi}_\alpha^{\text{ENR}} \right\} \quad (12)$$

Em Zhang, Banerjee e Babuška (2014) e em Sato, Piedade Neto e Proença (2018?) pode-se encontrar as expressões utilizadas para construção da PU *flat-top* para elementos finitos mestres unidimensionais e bidimensionais quadrilaterais, respectivamente.

### 3 ESTIMADOR DE ERRO ZZ-BD

Nesta seção, o estimador de erro *a-posteriori* baseado em recuperação utilizado como indicador para os procedimentos adaptativos é descrito. O estimador de erro ZZ-BD, recentemente proposto em Lins, Proença e Duarte (2018?), introduz uma generalização dos estimadores utilizados em Prange, Loehnert e Wriggers (2012) para o XFEM e por Lins et al. (2015) para o MEFG-E.

A nova metodologia proposta em Lins, Proença e Duarte (2018?) é baseada em uma projeção  $L^2$  localmente ponderada, analogamente à projeção apresentada em Schweitzer (2013) para a construção de matrizes de massa de problemas da Dinâmica. Basicamente, como o estimador é baseado no erro em tensões, o sistema de equações a ser resolvido para obtenção do campo recuperado de tensões é

$$\tilde{A}_{(\alpha,m),(\beta,n)}^d \cdot \tilde{a}_{(\alpha,m)}^d = f_{(\beta,n)}^d \quad (13)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  referem-se aos nós da discretização,  $m$  e  $n$  referem-se a cada componente dos vetores  $\mathbf{L}_\alpha$  e  $\mathbf{L}_\beta$  de funções de enriquecimento, respectivamente, e  $d = 1, 2, 3$  refere-se a cada componente do campo de tensões.

A metodologia proposta em Lins, Proença e Duarte (2018?) interpreta cada integral que define os termos independentes do sistema apresentado pela Eq. (13) como um produto interno  $L^2$  entre  $\hat{\sigma}^d$  e  $g_n^d$  ponderado pela PU  $\varphi_\beta$ , i.e.

$$f_{(\beta,n)}^d = \int_{\Omega} \hat{\sigma}^d \varphi_\beta g_n^d d\Omega = \int_{\omega_\beta} \hat{\sigma}^d \varphi_\beta g_n^d d\Omega := (\hat{\sigma}^d, g_n^d)_{L^2(\omega_\beta)}^{\varphi_\beta} \quad (14)$$

em que  $\hat{\sigma}^d$  representa as componentes do campo de tensões obtidos pelo MEFG e  $g_n^d$  representa uma função de enriquecimento genérica definida sobre  $\omega_\beta$ .

A mesma estratégia pode ser utilizada para calcular as componentes da matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^d$ , gerando assim uma matriz simétrica, positiva-definida e bloco-diagonal com

$$\tilde{A}_{(\alpha,m),(\beta,n)}^d = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \\ (g_m^d, g_n^d)_{L^2(\omega_\beta)}^{\varphi_\beta} & \text{se } \alpha = \beta \end{cases} \quad (15)$$

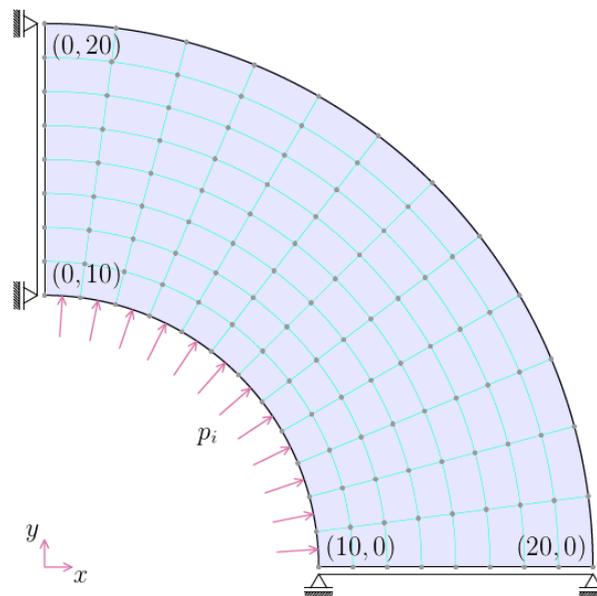
em que

$$(g_m^d, g_n^d)_{L^2(\omega_\beta)}^{\varphi_\beta} := \int_{\omega_\beta} (g_m^d g_n^d) \varphi_\beta d\Omega \quad (16)$$

## 4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, ilustram-se os resultados da resolução de um problema utilizando as técnicas  $h$  e  $p$  adaptativas implementadas. Como dito inicialmente, a técnica  $h$ -adaptativa busca melhorar a solução do problema mediante remalhamento, concentrando elementos finitos em regiões de erro mais elevado. Já a técnica  $p$ -adaptativa busca melhorar a solução do problema mediante enriquecimentos polinomiais sobre as regiões de erro mais elevado.

O exemplo a ser resolvido consiste em um cilindro de parede espessa submetido à pressão interna  $p_i = 1.0$  sob Estado Plano de Tensão (EPT). Sua geometria é definida na Fig. (2) e para as propriedades físicas adotou-se um módulo de elasticidade longitudinal  $E = 100.0$  e um coeficiente de Poisson  $\nu = 0.30$ .



**Figura 2.** Cilindro de parede espessa submetido à pressão interna  $p_i$ .  
Fonte: O próprio autor.

### 4.1 Técnica $h$ -Adaptativa

A técnica  $h$ -adaptativa implementada baseia-se naquelas comumente utilizadas para o MEF convencional e apresentada, por exemplo, em Hinton, Rao e Ozakca (1991). O procedimento adaptativo em questão está, em forma geral, descrito no Alg. (1).

As malhas, tanto inicial quanto as posteriores que se baseiam em malhas de fundo, são construídas utilizando o código computacional Gmsh, conforme Geuzaine e Remacle (2009), e os critérios de otimalidade adotados são baseados em Oñate e Bugada (1993), conforme descritos em seguida.

A malha de fundo no passo  $k$  do procedimento  $h$ -adaptativo é caracterizada por elementos com dimensões características  $h_i^{(k)}$ . Essa malha é utilizada para a geração da próxima malha de elementos finitos composta por elementos com dimensões definidas pelos

valores de  $h_i^{(k+1)}$  sobre  $\Omega$ . O valor de  $h_i^{(0)}$  é definido pelo usuário e normalmente relacionado a uma malha uniforme. Para cada novo nível de malha esse valor é atualizado em função das posições dos nós determinadas pelo gerador de malha empregado. Para tal atualização, realiza-se uma interpolação sobre a malha de fundo anterior (feita pela PU atrelada a cada elemento finito).

Os valores corrigidos de  $h_i^{(k+1)}$  são obtidos conforme apresentados em Oñate e Bugeda (1993), dependendo do critério de otimalidade adotado.

---

**Algoritmo 1: PROCEDIMENTO H-ADAPTATIVO**


---

```

1 início
2   Gerar uma malha uniforme inicial para análise
3   Resolver o problema  $\mathbf{K}^{(0)} \hat{\mathbf{u}}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)}$ 
4   Baseado em  $\hat{\mathbf{u}}^{(0)}$ , estimar o erro sobre cada elemento finito, a norma energia
   do erro global e a energia de deformação  $\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)}$ 
5   enquanto  $\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_G)} / \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} > \bar{\eta}$  faça
6     Baseado no erro sobre cada elemento finito  $\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_i)}$ , no critério de
     otimalidade adotado e no tamanho do elemento finito da análise anterior
      $h_i^{(k)}$ , calcular o tamanho do elemento finito para a análise atual  $h_i^{(k+1)}$ 
7     Gerar uma distribuição de  $h_i^{(k+1)}$  sobre o domínio e utilizar dessa
     distribuição como malha de fundo para geração da malha atual de
     análise
8     Resolver o problema  $\mathbf{K}^{(k+1)} \hat{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k+1)}$ 
9     Baseado em  $\hat{\mathbf{u}}^{(k+1)}$ , estimar o erro sobre cada elemento finito, a norma
     energia do erro global e a energia de deformação
10   fim
11 fim
```

---

O novo tamanho do elemento finito  $h_i^{(k+1)}$  pode ser determinado considerando como critério de otimalidade (OB-01) uma distribuição igualitária do erro global

$$h_i^{(k+1)} = \frac{h_i^{(k)}}{\beta_i^{(k)}}, \quad \beta_i^{(k)} = (h_{\xi_g})^{1/p} (h_{\xi_l}^i)^{2/(2p+d)}, \quad (17)$$

$$h_{\xi_g} = \frac{\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega)}}{\bar{\eta}(\|\hat{\mathbf{u}}\|_{E(\Omega)}^2 + \|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega)}^2)^{1/2}} \quad e \quad h_{\xi_l}^i = \frac{\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_i)}}{\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega)} m^{-1/2}}$$

ou considerando uma distribuição igualitária do erro específico (OB-02):

$$h_i^{(k+1)} = \frac{h_i^{(k)}}{\beta_i^{(k)}}, \quad \beta_i^{(k)} = (h_{\xi_g} h_{\xi_l}^i)^{1/p}, \quad (18)$$

$$h_{\xi_g} = \frac{\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega)}}{\bar{\eta}(\|\hat{\mathbf{u}}\|_{E(\Omega)}^2 + \|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega)}^2)^{1/2}} \quad e \quad h_{\xi_l}^i = \frac{\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_i)}}{\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega)}} \left( \frac{\Omega}{\Omega_i} \right)^{1/2}$$

em que  $h_{\xi_g}$  e  $h_{\xi_l^i}$  representam os parâmetros de refinamento considerando erros globais e locais (sobre o elemento finito  $i$ ), respectivamente.  $\|e^*\|_{E(X)}$  e  $\|\hat{u}\|_{E(X)}$  representam as normas energia calculadas sobre  $X \subseteq \Omega$  do erro estimado e do campo aproximado de deslocamentos, respectivamente.  $p$  representa o grau polinomial sobre os elementos finitos e  $d = 1, 2, 3$  representa a dimensão do problema estudado.

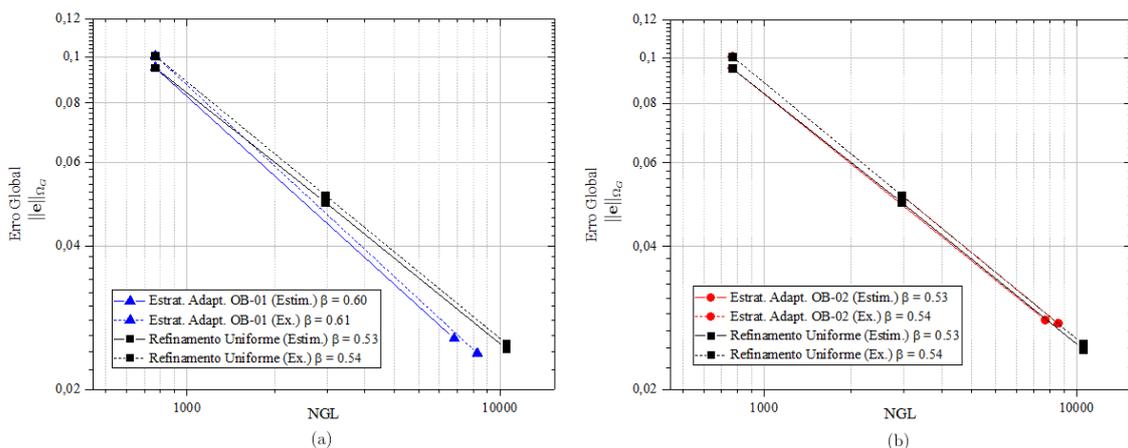
### 4.1.1 Resultados

No exemplo, foram testados ambos os critérios OB-01 e OB-02 de otimalidade. Como a solução exata do problema é conhecida, os procedimentos adaptativos puderam ser guiados tanto pelo erro estimado quanto pelo erro exato (ver Fig. (3)). Isso faz com que se consiga avaliar a resposta do estimador de erro como indicador dos procedimentos adaptativos.

A Fig. (4) ilustra a malha final obtida pelos procedimentos adaptativos utilizando os critérios OB-01 e OB-02 com o erro tanto estimado quanto exato. A malha inicial é aquela mostrada na Fig. (4a) e o erro relativo pré-especificado para o problema foi  $\bar{\eta} = 1.5\%$ .

Nos casos em que se utilizou o critério OB-02, houve uma maior concentração de elementos nas regiões de erro mais elevado (no caso, na região interna do cilindro), permitindo a utilização de elementos maiores nas demais regiões. Esse fato também foi percebido nas simulações feitas em Oñate e Bugeda (1993). Para esse exemplo, esse fato levou a um maior número de graus de liberdade quando utilizado o critério OB-02.

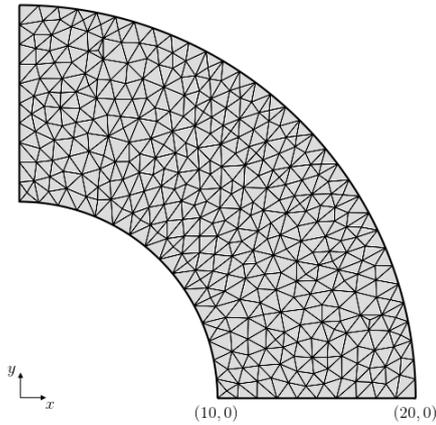
Os gráficos presentes na Fig. (3) apresentam a convergência do erro global para as análises h-adaptativas utilizando os critérios de otimalidade OB-01 e OB-02 e os erros estimados e exato. Além disso, essas análises são comparadas com aquela feita com refinamentos uniformes, em que todo o domínio é refinado igualmente.



**Figura 3.** Comparação da convergência do erro global utilizando erros estimados e exatos durante o procedimento h-adaptativo. Em (a) é utilizado o critério OB-01 e em (b) o critério OB-02. Para os casos de refinamento uniforme, a taxa de convergência  $\beta$  apresentada refere-se à taxa média.

Fonte: O próprio autor.

Percebe-se, inicialmente, na Fig. (3), a proximidade entre os gráficos de convergência do erro global considerando o erro estimado e o erro exato. Esse fato pode ser confirmado



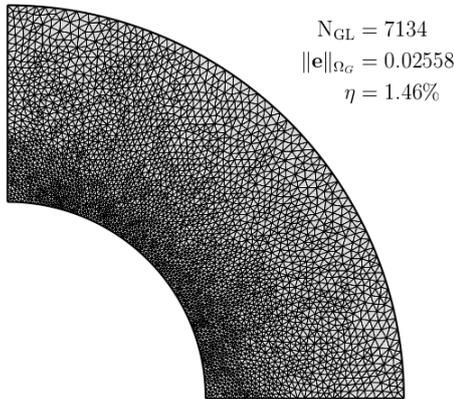
$$N_{GL} = 790$$

$$\|e\|_{\Omega_G} = 0.09485$$

$$\eta = 5.40\%$$

Erro relativo pré-especificado:  
 $\bar{\eta} = 1.50\%$

(a)

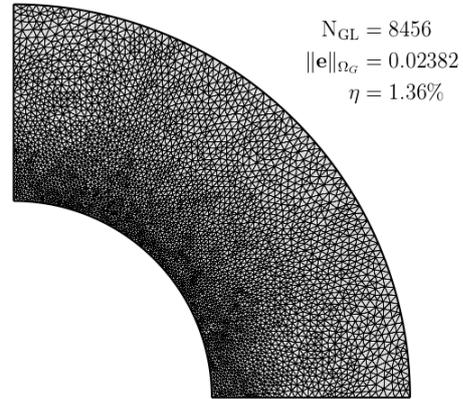


$$N_{GL} = 7134$$

$$\|e\|_{\Omega_G} = 0.02558$$

$$\eta = 1.46\%$$

(b)

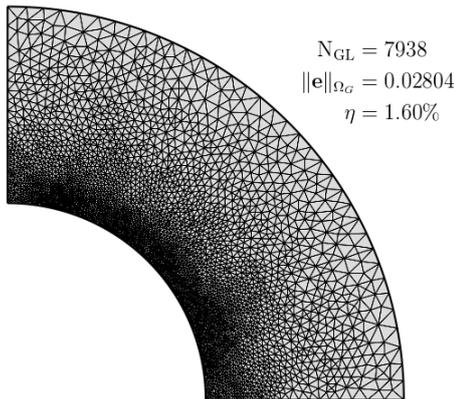


$$N_{GL} = 8456$$

$$\|e\|_{\Omega_G} = 0.02382$$

$$\eta = 1.36\%$$

(c)

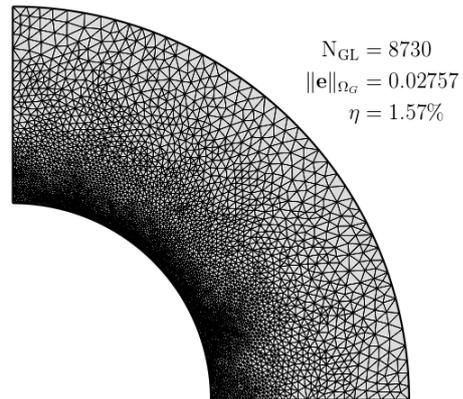


$$N_{GL} = 7938$$

$$\|e\|_{\Omega_G} = 0.02804$$

$$\eta = 1.60\%$$

(d)



$$N_{GL} = 8730$$

$$\|e\|_{\Omega_G} = 0.02757$$

$$\eta = 1.57\%$$

(e)

**Figura 4. Malhas finais obtidas por meio dos procedimentos h-adaptativos. Em (a) ilustra-se a malha inicial utilizada em todas as análises e as malhas finais apresentadas correspondem aos procedimentos utilizando o critério (b) OB-01 com erro estimado, (c) OB-01 com erro exato, (d) OB-02 com erro estimado e (e) OB-02 com erro exato.**

**Fonte: O próprio autor.**

pelos valores próximos das taxas de convergência  $\beta$  obtidas. Isso é uma boa indicação de que o estimador de erro utilizado consegue quantificar bem o erro de discretização da solução e guiar de forma coerente os procedimentos adaptativos.

Além disso, percebe-se que o critério de otimalidade OB-01 apresentou taxas de convergência melhores em relação ao erro global de discretização. Com esse critério, consegue-se obter malhas com níveis reduzidos de erro e menor quantidade de graus de liberdade.

## 4.2 Técnica p-Adaptativa

O critério adotado para a estratégia p-adaptativa baseia-se em Barros, Proença e Barcellos (2004), utilizando, entretanto, o estimador ZZ-BD baseado em recuperação. A estratégia adotada por aqueles autores consiste em obter uma aproximação p ótima para uma malha fixa de tal modo que a norma energia do erro seja distribuída de modo uniforme sobre o domínio. No caso do MEF<sub>G</sub>, o refinamento p é realizado via enriquecimento polinomial nodal. A estratégia segue o Alg. (2).

---

### Algoritmo 2: PROCEDIMENTO P-ADAPTATIVO

---

```
1 início
2   A partir dos dados de entrada, resolver o problema  $\mathbf{K}^{(0)}\hat{\mathbf{u}}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)}$ 
3   Baseado em  $\hat{\mathbf{u}}^{(0)}$ , estimar o erro sobre cada elemento finito, o erro global e a
   energia de deformação  $\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)}$ 
4   enquanto  $\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_G)}/\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} > \bar{\eta}$  faça
5     Calcular o indicador de erro  $\tilde{\epsilon}_{\omega_i} = \sum_{j \in \omega_i} (V_j/V_{\omega_i}) \|\mathbf{e}\|_{E(\omega_j)}$  sobre cada
     nuvem  $\omega_i$  e seu valor máximo  $\tilde{\epsilon}_{\max} = \max_{j=1, \dots, N} \tilde{\epsilon}_{\omega_j}$ 
6     para  $\omega_i = 1, \dots, N$  faça
7       Calcular  $p\xi_L^{\omega_i} = \tilde{\epsilon}_{\omega_i}/\tilde{\epsilon}_{\max}$ 
8       se  $p\xi_L^{\omega_i} > 1$  então
9         Enriquecer a nuvem  $\omega_i$ 
10      fim
11    fim
12  fim
13 fim
```

---

No passo 9 do Alg. (2), o enriquecimento da nuvem  $\omega_i$  é feito de acordo com o número de *layers*  $L$  previamente definido. Exemplificando, para  $L = 0$  apenas o vértice da nuvem  $\omega_i$  é enriquecido, para  $L = 1$  o vértice da nuvem e seus nós vizinhos, ligados a ele por elementos finitos, são enriquecidos, e assim sucessivamente. Essa estratégia foi tomada a fim de garantir a reproduzibilidade nos elementos próximos às nuvens que precisam ser enriquecidas.

## 4.2.1 Resultados

O exemplo resolvido consiste no mesmo caso anterior utilizado para a simulação h-adaptativa. Inicialmente, uma análise de convergência do erro e uma análise do número de condição foi realizada utilizando o MEFG e suas versões estáveis. O número de condição é definido pela razão entre o máximo e o mínimo autovalor da matriz de rigidez escalonada e aponta para a estabilidade do procedimento numérico, ou seja, quanto maior esse número mais erros de arredondamento são inseridos. Os resultados encontram-se na Fig. (5) e Tab. (1).

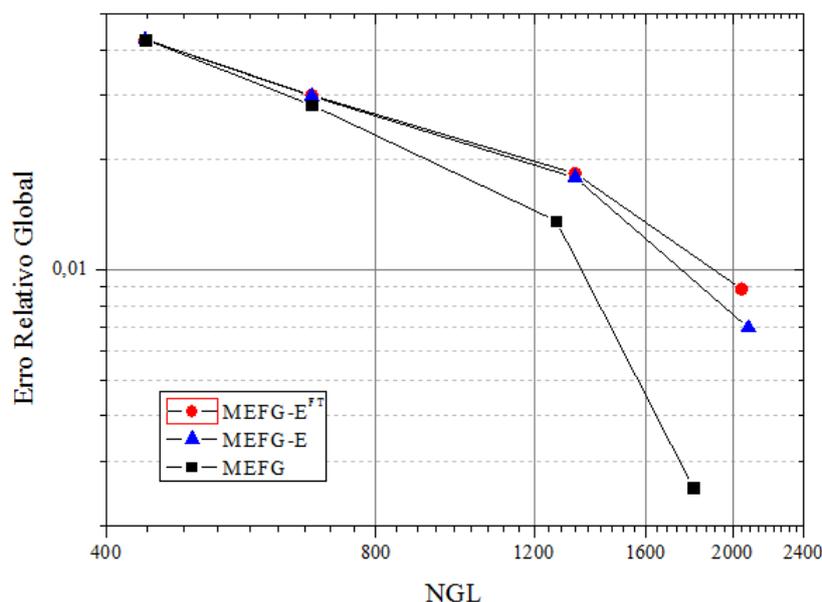


Figura 5. Comparação sobre a convergência do erro relativo global para o MEFG e suas versões estáveis

Fonte: O próprio autor.

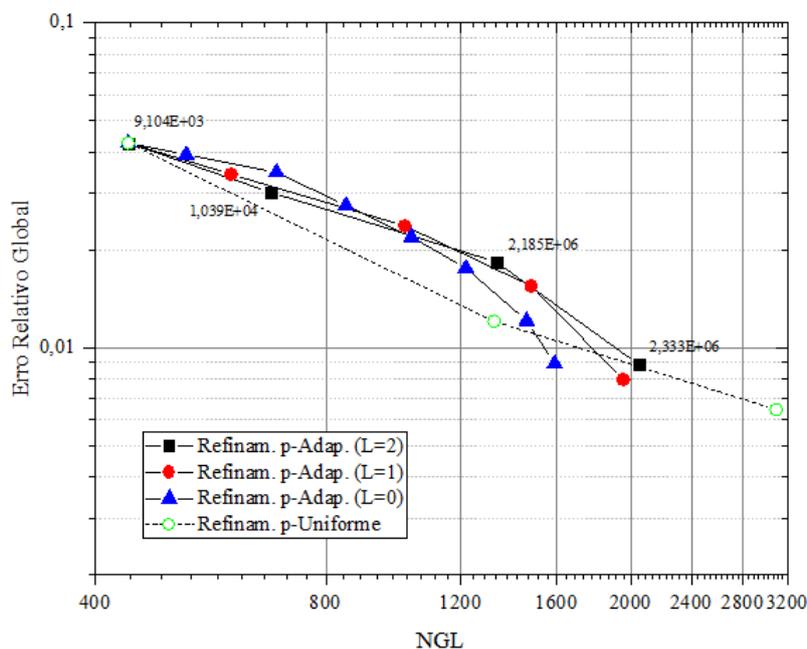
Tabela 1. Números de Condição obtidos durante a estratégia p-adaptativa para o MEFG e suas versões estáveis.

Método	1ª Iteração	2ª Iteração	3ª Iteração	4ª Iteração
MEFG	9.10E + 03	1.91E + 18	3.07E + 18	2.63E + 18
MEFG-E	9.10E + 03	1.16E + 04	1.27E + 13	1.97E + 18
MEFG-E <sup>FT</sup>	9.10E + 03	1.04E + 04	2.17E + 06	2.31E + 06

A Fig. (5) evidencia que o MEFG convencional tem melhor taxa de convergência, neste caso provavelmente acentuada em razão da solução exata ser polinomial. Por outro lado, seu emprego na estratégia adaptativa pode gerar erros de arredondamento importantes, pois o número de condição da matriz do sistema se eleva rapidamente já com o primeiro nível de enriquecimento. De fato, como se pode perceber pela Tab. (1), o número de

condição mostrou-se melhor controlado quando o MEEG- $E^{FT}$  foi utilizado. Mesmo com erro maior em relação aos demais métodos, em razão de seu melhor condicionamento ele foi o método escolhido nas análises que seguem.

Uma análise de convergência considerando  $L = 0, 1, 2$  foi realizada a fim de avaliar a influência do fator  $L$  no procedimento p-adaptativo. Na Fig. (6), o procedimento p-adaptativo é ainda confrontado com um caso de enriquecimento uniforme.



**Figura 6. Convergência da estratégia p-adaptativa apresentada para  $L = 0, 1, 2$  e de uma análise utilizando enriquecimento uniforme.**

**Fonte: O próprio autor.**

Percebe-se, na fase inicial do processo adaptativo, que as taxas de convergência são menores que a convergência proporcionada pelo enriquecimento uniforme. Esse fato se deve principalmente à existência de elementos de mistura quando os enriquecimentos locais são feitos. O erro associado a esse tipo de elemento é detectado pelo estimador e afeta consideravelmente a convergência do procedimento. Entretanto, próximo a atingir a tolerância pré-especificada, as taxas das respostas adaptativas passam a superar largamente aquelas do enriquecimento uniforme. Por outro lado, a Fig. (6) mostra que, com o aumento de  $L$ , diminui-se o número de etapas de refinamento (na análise com  $L = 0$  foram necessários 7 níveis de refinamento para alcançar o erro relativo adotado).

Mesmo com uma taxa inicial de convergência menor, os procedimentos adaptativos apresentados retornam um erro relativo  $\bar{\eta} \leq 1.0\%$  com número menor de graus de liberdade em relação à análise feita com enriquecimento uniforme. Observa-se que essa análise necessita de enriquecimento cúbico em todos os nós da malha para alcançar a tolerância pré-especificada.

Além disso, os valores indicados junto às curvas do gráfico da Fig. (6) referem-se ao número de condição para a análise adaptativa com  $L = 2$ . Nota-se que a versão adotada



para o MEFG nesta análise produziu valores considerados reduzidos para esse parâmetro. A solução é, portanto, pouco afetada pelo condicionamento da matriz de rigidez do problema.

## 5 CONCLUSÕES

As técnicas adaptativas implementadas para este trabalho buscaram obter respostas para problemas de modo que a precisão da solução fosse compatível com a tolerância pré-especificada para o erro médio global a ela associado. Nesse sentido, as técnicas adaptativas permitiram obter distribuições  $h$  (refinamento da malha de elementos finitos) e  $p$  (no sentido de enriquecimentos ao longo do domínio) ótimas. Observou-se que esse critério, aliado à rapidez de análise proporcionada pelo estimador de erro utilizado, não onerou o custo computacional exigido para obter boas soluções com o MEFG.

A técnica  $h$ -adaptativa mostrou-se eficaz, atendendo rapidamente o erro relativo pré-especificado, no exemplo apresentado, que não possui singularidades. Além disso, pôde-se, com a análise  $h$ -adaptativa realizada, validar o estimador de erro como um bom indicador das regiões que necessitam de melhora da solução, fato fundamental em qualquer procedimento adaptativo.

A técnica  $p$ -adaptativa também se mostrou eficaz para resolver problemas mediante enriquecimentos polinomiais que visam melhorar a solução em regiões específicas do domínio. Como esperado, ela é, particularmente, mais válida na solução de problemas que apresentam solução suave, como é o caso do exemplo apresentado. Pôde-se ainda comparar com o último exemplo os diferentes resultados gerados pelo MEFG e suas versões estáveis. Percebe-se claramente, pelos números de condição resultantes, a melhora na estabilização do método quando utilizado, em especial, o MEFG- $E^{FT}$ .

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Departamento de Estruturas (SET-EESC-USP) pelo suporte prestado. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## REFERÊNCIAS

- Babuška, I., & Banerjee, U., 2012. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 201-204, pp. 91–111.
- Barros, F. B., Proença, S. P. B., & Barcellos, C. S., 2004. On error estimator and  $p$ -adaptivity in the generalized finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, pp. 2373–2398.
- Duarte, C. A., Babuška, I., & Oden, J. T., 2000. Generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems. *Computer & Structures*, vol. 77, pp. 215–232.



# XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018  
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



- Geuzaine, C., & Remacle, J. F., 2009. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, pp. 1309–1331.
- Hinton, E., Rao, N. V. R., & Ozakca, M., 1991. Mesh generation with adaptive finite element analysis. *Advances in Engineering Software*, vol. 13, pp. 238–262.
- Kim, D. J., Duarte, C. A., & Proença, S. P. Generalized finite element method with global-local enrichments for nonlinear fracture analysis. In: MECHANICS OF SOLIDS IN BRAZIL, 2., 2009, Rio de Janeiro. *Proceedings...* ABCM, 2009. pp. 317–330.
- Lins, R. M., Ferreira, M. D. C., Proença, S. P. B., & Duarte, C. A., 2015. An a-posteriori error estimator for linear elastic fracture mechanics using the Stable Generalized/Extended Finite Element Method. *Computational Mechanics*, vol. 56, pp. 947–965.
- Lins, R. M., Proença, S. P. B., & Duarte, C. A., 2018? Efficient and accurate stress recovery procedure and a-posteriori error estimator for the Stable Generalized/Extended Finite Element Method. *Computational Mechanics*. No prelo.
- Oñate, E., & Bugeda, G., 1993. A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. *Engineering Computations*, vol. 10, pp. 307–321.
- Prange, C., Loehnert, S., & Wriggers, P., 2012. Error estimation for crack simulations using the XFEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, pp. 1459–1474.
- Sato, F. M., Piedade Neto, D., & Proença, S. P. B., 2018? Numerical experiments with the Generalized Finite Element Method based on a flat-top Partition of Unity. *Latin American Journal of Solids and Structures*. No prelo.
- Schweitzer, M. A., 2013. Variational mass lumping in the Partition of Unity Method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 35(2), pp. A1073–A1097.
- Strouboulis, T., Copps, K., & Babuška, I., 2001. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp. 4081–4193.
- Zhang, Q., Banerjee, U., & Babuška, I., 2014. Higher order stable generalized finite element method. *Numerische Mathematik*, vol. 128, pp. 1–29.