



CORRELAÇÕES ENTRE AS TEORIAS DE EULER-BERNOULLI E DE SHI-VOYIADJIS PARA VIGAS: UMA ABORDAGEM TEÓRICA E NUMÉRICA.

Correlations between Euler-Bernoulli's and Shi-Voyiadjis' beam theory: a theoretical and numerical approach

Hilton Marques Souza Santana (1); Fabio Carlos da Rocha (2)

(1) (P) Estudante de Iniciação Científica, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão - SE, Brasil.

(2) Dr. Prof. Fabio Carlos da Rocha, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão - SE, Brasil.

Email para Correspondência: fcrocha@ufs.br; (P) Apresentador

Resumo: Avanços recentes na tecnologia dos materiais têm expandido a aplicação de viga na engenharia como sistema estrutural. No entanto, os efeitos da deformação por cisalhamento tornam-se mais pronunciados em vigas com relação altura/comprimento alta, devido aos baixos módulos de cisalhamento transversal em comparação com o módulo longitudinal no plano, quando sujeitas a cargas transversais. O que justifica a necessidade de uma análise estrutural precisa para vigas. Devido às limitações existentes na teoria clássica de vigas para representar o comportamento conjunto da deflexão por flexão e da deflexão por cisalhamento, foi e vem sendo desenvolvidas novas teorias de vigas que inserem em sua cinemática uma descrição melhorada da variação da deformação cisalhante. Tais teorias são chamadas de teorias refinadas (ou de alta ordem) de vigas. Estas teorias refinadas apresentam a vantagem de não necessitarem da utilização de fatores de correção, presentes na teoria de Timoshenko, além de melhor descrever o campo de variação da tensão de cisalhamento na seção. No entanto, nestas teorias de alta ordem são inseridos novos parâmetros, denominados de alta ordem, e sem uma interpretação física clara, o que dificulta a imposição das condições de contorno ao problema. Dentre as diversas teorias parabólicas de alta ordem existentes, o presente trabalho tem o objetivo de fornecer interpretação física aos parâmetros da teoria parabólica de Shi-Voyiadjis. Este objetivo é alcançado por meio do desenvolvimento da correlação entre os parâmetros de Shi-Voyiadjis e os da teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli. Para a validação das imposições das condições de contorno, via correlação, foi desenvolvida, via problema variacional, a formulação em Elementos Finitos (MEF) para a teoria de Shi-Voyiadjis. Neste trabalho as formulações desenvolvidas são aplicadas à vigas submetidas à diversas combinações de carregamento e vinculações. Os resultados das análises demonstraram excelente concordância entre as abordagens numérica e analítica

Palavras chaves: deformação cisalhante parabólica; vigas espessas; método dos elementos finitos; teoria de viga de Shi-Voyiadjis; teoria de viga de Euler-Bernoulli.



Abstract: Recent advances in materials technology have expanded the use of beams as a structural system in engineering. However, as beams become thicker, the shear effects become more pronounced due to the low transverse modulus of elasticity, compared to the longitudinal modulus when subjected to transverse loads. This justifies the need for a precise structural analysis formulation for beams. Due to the limitations of classical beam theory in representing both flexural and shear deflection behavior, new beam theories have been developed to insert into their kinematics an improved description of the shear strain variation. Such theories are called refined (or high-order) theories of beams. These refined theories have the advantage of not requiring the use of correction factors, present, for example, in Timoshenko's beam theory, in addition to better describing the field of variation of the shear stress in the section. However, in these high-order theories, new parameters are introduced, called high-order parameters, which do not have a clear physical interpretation, hindering the imposition of boundary conditions on the problem. Among the several existing high-order parabolic theories, the present work has the objective of providing physical interpretation to the parameters of the Shi-Voyiadjis theory. This objective was achieved by developing the correlation between the Shi-Voyiadjis parameters and those of the classical Euler-Bernoulli beam theory. For validating the boundary condition impositions, via theoretical correlation, a formulation based on the finite element method (FEM) for Shi-Voyiadjis theory was developed using a variational approach. In this work, the developed formulations were applied to beams subjected to various combinations of loads and boundary conditions (constraints). The results of the analyses demonstrated excellent agreement between the numerical and analytical approaches.

Keywords: *parabolic shear deformation; thick beams; finite element method; Shi-Voyiadjis beam theory; Euler-Bernoulli beam theory.*



1 INTRODUÇÃO

Teorias de vigas são ferramentas importantes para a análise estrutural. Muitas das suas aplicações podem ser encontradas em elementos da construção civil, em modelos de asas de aeronaves, microtúbulos proteicos na biologia e braços robóticos na eletrônica. Dessa forma, faz-se necessária uma compreensão aprofundada da mecânica dos elementos de viga a fim de possibilitar a sua correta, segura e ótima concepção.

Para a análise de vigas unidimensionais duas classes de teorias podem ser encontradas na literatura denominada de clássicas e refinadas. Nas teorias clássicas tem-se a formulação sem consideração da deformação por cisalhamento, denominada teoria de viga de Euler-Bernoulli, e tem-se ainda a teoria com consideração da deformação cisalhante constante denominada teoria de viga de Timoshenko. Já para as teorias refinadas são consideradas cinemáticas não-lineares para consideração do campo de deslocamento longitudinal, sem a necessidade de se utilizar fatores de correção presentes na teoria de Timoshenko.

A Teoria de Euler-Bernoulli (TEB) tem como principal limitação a propriedade de ortogonalidade e planicidade da seção transversal, em relação ao eixo centroidal, após a deformação da viga. Dessa forma, a teoria de Euler-Bernoulli é mais adequada para modelagem de vigas esbeltas e tornando-se menos eficientes quando vigas moderadamente espessas são consideradas. Com intuito de contornar essa limitação da teoria de Euler-Bernoulli, em 1920, Stephen Timoshenko desenvolveu uma nova teoria de vigas, a Teoria de Primeira Ordem (TPO). No entanto, esta teoria de Timoshenko assume um campo de deformação constante ao longo da seção transversal, violando assim a possibilidade de consideração da nulidade da tensão de cisalhamento nas bordas da viga. Sabendo-se que a distribuição de tensão cisalhante proposta pela TPO tem representatividade limitada, e com o intuito de garantir que sua energia de deformação seja consistente com as condições de tensão cisalhante nulas na borda, a teoria de Timoshenko faz uso dos chamados fatores de correção (Timoshenko, 1921). Tanto a TEB quanto a TPO possuem deficiência em capturar efeitos não-clássicos, tal como o empenamento da seção transversal da viga (Reddy, 1984). Diante destas limitações, novas teorias são necessárias para melhor descrever o comportamento do elemento estrutural de viga.

Com o objetivo de sanar as deficiências presentes nas teorias clássicas de vigas, novas teorias refinadas (ou de alta ordem) vem sendo desenvolvidas. Muitas das teorias de alta ordem se diferenciam quanto a utilização de funções que modelam a distribuição da deformação cisalhante ao longo da seção transversal. Em Levison (1981) é proposto um campo de deformação cisalhante parabólico que garante a nulidade das tensões de cisalhamento nas bordas da viga. Contudo, segundo Reddy (1984) as equações que descrevem o problema obtidas por Levinson são variacionalmente inconsistentes, por serem obtidas através das equações de equilíbrio da Teoria de Primeira Ordem (TPO). Reddy (1984) afirma ainda, que as formas corretas das equações diferenciais e condições de contorno para qualquer teoria baseada em um dado campo de deslocamento devem ser obtidas consistentemente por meio do princípio dos trabalhos virtuais.



Em Reddy et al (1997) são desenvolvidas as relações exatas entre as deflexões, rotações, esforços cortantes e momentos fletores entre a teoria parabólica e as teorias clássicas de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Estas relações permitem uma melhor compreensão dos parâmetros de alta ordem uma vez que estes não possuem interpretação física óbvia. Por fim, Reddy et al (1997) afirma que essas relações também podem ser utilizadas para o desenvolvimento de um modelo de elementos finitos para a teoria de deformação cisalhante parabólica sem a ocorrência do enrijecimento da estrutura provocada pelo cisalhamento (*shear locking*). Recentemente, Sayyad e Ghugal (2017) realizaram uma vasta revisão crítica da literatura para a análise de flexão, flambagem e vibração sem consideração de amortecimento para vigas isotrópicas, laminadas e sanduíches. No entanto, interpretações físicas dos parâmetros de alta ordem presentes nas teorias refinadas não foram realizadas.

O presente trabalho tem o objetivo de fornecer interpretação física aos parâmetros da teoria com deformação cisalhante parabólica proposta em Shi e Voyiadjis (2011). Este objetivo é alcançado por meio do desenvolvimento da correlação entre os parâmetros da Teoria de Shi-Voyiadjis (TSV) e os da teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli (TEB), com uma metodologia semelhante à adotada por Reddy et al (1997). Para a validação das imposições das condições de contorno, via correlação, foi desenvolvida, via problema variacional, a formulação em Elementos Finitos (MEF) para a teoria estudada (TSV), sem a presença do travamento por cisalhamento (*shear locking*). Para mostrar a eficiência da modelagem, apesar de ter analisado diversos problemas de viga, apenas a viga simplesmente apoiada e submetida a carregamento uniforme é apresentada.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Nesta seção é abordada a cinemática e o desenvolvimento, via Princípio dos Trabalhos Virtuais, da teoria de Shi-Voyiadjis (TSV), juntamente com as suas correlações com a teoria de Euler-Bernoulli (TEB).

2.1 Cinemática da TEB e TSV

As cinemáticas presentes na teoria clássica de vigas (TEB) e na teoria de Shi-Voyiadjis (TSV), são ilustradas na Figura 01. Nesta figura é mostrada uma viga simplesmente apoiada, submetida a um carregamento distribuído constante q_0 e comprimento L . A coordenada x representa o eixo longitudinal da viga, a coordenada z ao longo da altura da viga e a y ao longo de sua largura. Em uma teoria geral de vigas toda carga e geometria fornecem uma função deslocamento (u, v, w) ao longo dos eixos (x, y, z) , respectivamente. No entanto, devido a simetria do problema pode-se simplificar a análise apenas dependente das coordenadas x e z – assume-se que o deslocamento em v é identicamente igual a zero (Wang, Reddy e Lee, 2000).

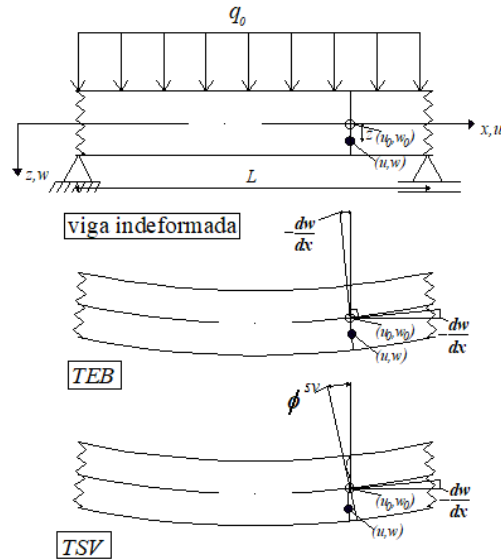


Figura 1: Geometria indeformada e deformada de uma viga submetida a flexão pela teoria clássica de Euler -Bernoulli (TEB) e pela teoria refinada parabólica de Shi-Voyiadjis(TSV)

Fonte: Adaptado de Wang,Reedy e Lee (2000).

O campo de deslocamento para a teoria clássica é dado pelas seguintes expressões

$$u^E(x, z) = -z \frac{dw_0^E}{dx} \quad (1)$$

$$w^E(x, z) = w_0^E(x) \quad (2)$$

em que w_0^E é a deflexão transversal de um ponto no eixo centroidal da viga ($z=0$) e o sobrescrito “E” denota a teoria de Euler-Bernoulli. O campo de deslocamento nas Eqs.(1-2) implica que as seções perpendiculares à linha neutra permanecem planas e perpendiculares depois da deformação, como mostrado na Figura 1. Essas simplificações negligenciam a deformação normal e de cisalhamento, ambas transversais ao eixo centroidal.

As teorias de alta-ordem em especial as que consideram a deformação transversal parabólica. representam a cinemática de forma mais precisa. Isso ocorre, por meio da expansão polinomial da função deslocamento até a terceira-ordem. Neste trabalho será considerado o campo de deslocamento presente em Shi e Voyiadjis (2011), como segue abaixo:

$$u^{SV}(x, z) = z \frac{dw_0^{SV}}{dx} (A_1 - 1) + A_1 z \phi_x^{SV} - A_2 z^3 \left(\phi_x^{SV} + \frac{dw_0^{SV}}{dx} \right) \quad (3)$$

$$w^{SV}(x, z) = w_0^{SV}(x) \quad (4)$$

onde $A_1 = 5/4$ e $A_2 = 5/3h^2$ e x e z são as coordenadas axial e transversal da viga, w_0^{SV} é o deslocamento transversal do eixo centroidal da viga, ϕ_x^{SV} representa a rotação da seção

transversal em relação à linha neutra e o sobrescrito “ SV ” indica a teoria de viga de Shi e Voyiadjis. Note que a seção transversal não permanece plana e não está perpendicular à linha neutra (Figura 1), como supunha a simplificação de Euler-Bernoulli. Dessa forma, é possível capturar efeitos como tensão devido ao cisalhamento nulas nas bordas superior e inferior da viga, sem a necessidade de utilizar fator de correção.

2.2 Fundamentos teóricos para a viga de Shi-Voyiadjis

As relações deformação-deslocamento da TSV são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^{SV}}{\partial x} = z \frac{d^2 w_o^{SV}}{dx^2} (A_1 - 1) + z A_1 \frac{d\phi_x^{SV}}{dx} - A_2 z^3 \left(\frac{d\phi_x^{SV}}{dx} + \frac{d^2 w_o^{SV}}{dx^2} \right) \quad (5.a)$$

$$\gamma_{zx} = \left(\frac{dw_o^{SV}}{dx} + \frac{\partial u^{SV}}{\partial z} \right) = [A_1 - 3A_2 z^2] \left(\phi_x^{SV} + \frac{dw_o^{SV}}{dx} \right) \quad (5.b)$$

Considerando a relação constitutiva linear para material isotrópico, e utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, é possível descrever a equação variacional de Euler para obter as seguintes equações de equilíbrio para a Teoria de Shi- Voyiadjis:

$$-\frac{d\hat{M}_{xx}^{SV}}{dx} + \hat{Q}_x^{SV} = 0 \quad (6.a)$$

$$-\frac{d^2 \hat{M}_{xx}^{SV}}{dx^2} - \frac{d\hat{Q}_x^{SV}}{dx} = q \quad (6.b)$$

onde:

$$\hat{M}_{xx}^{SV} = A_1 M_{xx}^{SV} - A_2 P_{xx}^{SV}, \hat{Q}_x^{SV} = A_1 Q_x^{SV} - 3A_2 R_x^{SV}, \hat{M}_{xx}^{SV} = A_2 P_{xx}^{SV} - (A_1 - 1)M_{xx}^{SV} = M_{xx}^{SV} - \hat{M}_{xx}^{SV}$$

$$M_{xx}^{SV} = \int_A z \sigma_{xx} dA = \hat{D}_{xx} \frac{d\phi^{SV}}{dx} - \hat{F}_{xx} \frac{d^2 w_o^{SV}}{dx^2} \quad (7.a)$$

$$P_{xx}^{SV} = \int_A z^3 \sigma_{xx} dA = \hat{F}_{xx} \frac{d\phi^{SV}}{dx} - \hat{H}_{xx} \frac{d^2 w_o^{SV}}{dx^2} \quad (7.b)$$

$$Q_x^{SV} = \int_A \tau_{xz} dz = \hat{A}_{xz} \left(\phi^{SV} + \frac{dw_o^{SV}}{dx} \right) \quad (7.c)$$

$$R_x^{SV} = \int_A z^2 \tau_{xz} dz = \hat{D}_{xz} \left(\phi^{SV} + \frac{dw_o^{SV}}{dx} \right) \quad (7.d)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_{xx} &= A_1 D_{xx} - A_2 F_{xx}, \hat{F}_{xx} = A_2 F_{xx} - (A_1 - 1)D, \hat{\bar{F}}_{xx} = A_1 F - A_2 H, \hat{H}_{xx} = A_2 H - (A_1 - 1)F, \\ \hat{A}_{xz} &= A_1 A_{xz} - 3A_2 D_{xz}, \hat{D}_{xz} = A_1 D_{xz} - 3A_2 F_{xz} \\ (A_{xx}, D_{xx}, F_{xx}, H_{xx}) &= \int_A (1, z^2, z^4, z^6) E_x dA, (A_{xz}, D_{xz}, F_{xz}) = \int_A (1, z^2, z^4) G_{xz} dA \end{aligned}$$

E_x, G_{xz} são o módulo de Elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente.

As condições de contorno são:

$$\text{Especificado: } \left\{ \begin{array}{l} w_o^{SV} \\ \frac{dw_o^{SV}}{dx} \\ \phi^{SV} \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_x^{SV} = \frac{d\hat{M}_{xx}^{SV}}{dx} + \hat{Q}_x^{SV} \\ -\hat{M}_{xx}^{SV} \\ \hat{M}_{xx}^{SV} \end{array} \right\}$$

onde \hat{V}_x^{SV} é a força cisalhante efetiva, $-\hat{M}_{xx}^{SV}$ e \hat{M}_{xx}^{SV} são momentos de alta ordem da TSV. O total de seis condições de contorno é requerido, uma vez que a teoria é de sexta ordem enquanto as teorias clássicas são de quarta ordem.

2.3 Relações entre a teoria de Euler-Bernoulli com a teoria de Shi-Voyadjis

Nesta seção são desenvolvidas as relações para a análise de flexão entre as teorias de Shi-Voyadjis e a teoria clássica (TEB), de forma semelhante ao realizado por Reddy et al (1997). São explicitados o cortante, momento fletor, rotação e deflexão em função dos termos já difundidos da teoria clássica (TEB). É possível observar que uma equação diferencial adicional de segunda ordem se faz necessária uma vez que TSV é de sexta ordem e TEB de quarta ordem.

Primeiramente, substituindo a Eq. (6.a) em (6.b), tem-se:

$$-\frac{d^2 M_{xx}^{SV}}{dx^2} = q \quad (8)$$

Impondo a equação diferencial da TEB ($-d^2 M_{xx}^E / dx^2 = q$) na Eq. (8) e integrando duas vezes:

$$M_{xx}^{SV} = M_{xx}^E + C_1 x + C_2 \quad (9)$$

em que M_{xx}^E é o momento fletor para a TEB. Substituindo Eq. (7.c) em Eq. (7.a-d), e substituindo P_{xx}^{SV} e R_x^{SV} na Eq. (6.a), obtém-se:

$$\frac{\hat{D}_{xx}}{D_{xx}} \frac{dM_{xx}^{SV}}{dx} = \frac{\bar{A}_{xz} Q_x^{SV}}{\hat{A}_{xz}} - A_2 \left(\frac{F_{xx}}{D_{xx}} \frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} - \frac{\hat{\bar{F}}}{\hat{A}_{xz}} \right) \frac{d^2 Q_x^{SV}}{dx^2} \quad (10)$$

com $\bar{A}_{xz} = A_1 \hat{A}_{xz} - 3A_2 \hat{D}_{xz}$

Substituindo a Eq. (9) em (10), tem-se:

$$A_2 \left(\frac{F_{xx}}{D_{xx}} \frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} - \frac{\hat{F}}{\hat{A}_{xz}} \right) \frac{d^2 Q_x^{SV}}{dx^2} - \frac{\bar{A}_{xz} Q_x^{SV}}{\hat{A}_{xz}} + \frac{\hat{D}_{xx}}{D_{xx}} (Q_x^E + C_1) = 0 \quad (11)$$

Dessa forma, uma equação diferencial de segunda ordem deve ser resolvida a fim de determinar Q_x^{SV} em termos de Q_x^E . Uma vez conhecido o Q_x^{SV} , M_x^{SV} , ϕ^{SV} , e w_0^{SV} poderão ser determinados com as relações que serão mostradas na sequência.

A força cisalhante efetiva V_x^{SV} na teoria unificada pode ser simplificada usando as Eqs. (6.a), (6.b) e (10):

$$\hat{V}_x^T = \frac{d\hat{M}_{xx}^{SV}}{dx} + \hat{Q}_x^{SV} = A_2 \frac{dP_{xx}^{SV}}{dx} - (A_1 - 1) \frac{dM_{xx}^{SV}}{dx} + A_1 Q_x^{SV} - 3A_2 R_x^{SV} = (Q_x^E + C_1) \quad (12)$$

Para determinar ϕ^{SV} , substituímos Eq. (7.c) e (9) em (7.a), e integrando uma vez:

$$D_{xx} \phi_x^{SV}(x) = -D_{xx} \frac{dw_0^E}{dx} + \frac{\hat{F}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} Q_x^T + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (13)$$

Por fim, obtém-se a relação entre w_0^{SV} e w_0^E substituindo (7.c) em (13), e integrando em relação a x:

$$D_{xx} w_0^{SV} = D_{xx} w_0^E + \frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz}} \left(\int Q_x^T(\eta) d\eta \right) - C_1 \frac{x^3}{2} - C_2 \frac{x^2}{2} - C_3 x - C_4 \quad (14)$$

Portanto, essa é a completa derivação das relações entre as soluções da teoria de Euler-Bernoulli e a teoria de Shi-Voyiadjis. As constantes de integração, C_1, C_2, C_3 e C_4 são determinadas a partir das condições de contorno. As condições de contorno para problemas de vigas são:

$$\text{Livre: } \begin{cases} \hat{V}_x^{SV} = 0 = A_2 \frac{dP_{xx}^{SV}}{dx} - (A_1 - 1) \frac{dM_{xx}^{SV}}{dx} + A_1 Q_x^T - 3A_2 R_x^{SV} \\ \hat{M}_{xx}^{SV} = 0 = A_2 P_{xx}^{SV} - (A_1 - 1) M_{xx}^{SV} \\ \hat{M}_{xx}^{SV} = 0 = A_1 M_{xx}^{SV} - A_2 P_{xx}^{SV} \end{cases} \quad \text{Engaste: } \begin{cases} w_0^{SV} = 0 \\ \phi^{SV} = 0 \\ \frac{dw_0^{SV}}{dx} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Apoio: } \begin{cases} w_0^{SV} = 0 \\ \hat{M}_{xx}^{SV} = 0 = A_2 P_{xx}^{SV} - (A_1 - 1) M_{xx}^{SV} \\ \hat{M}_{xx}^{SV} = 0 = A_1 M_{xx}^{SV} - A_2 P_{xx}^{SV} \end{cases}$$

Dessa maneira, as condições associadas ao termo Q_x^{SV} são:

Livre: Impondo as condições de contorno nas Eqs (7.b), tem-se:

$$P_{xx}^{SV} = \left(\frac{\widehat{F}_{xx}}{\widehat{A}_{xz}} - \frac{F_{xx} \widehat{D}_{xx}}{D \widehat{A}_{xz}} \right) \frac{dQ_x^{SV}}{dx} + \frac{F_{xx}}{D} \widehat{M}_{xx}^{SV} \Rightarrow \frac{dQ_x^{SV}}{dx} = 0 \quad (15)$$

Apoio: Fazendo as condições de contorno em (7.b) , tem-se:

$$P_{xx}^{SV} = \left(\frac{\widehat{F}_{xx}}{\widehat{A}_{xz}} - \frac{F_{xx} \widehat{D}_{xx}}{D \widehat{A}_{xz}} \right) \frac{dQ_x^{SV}}{dx} + \frac{F_{xx}}{D} \widehat{M}_{xx}^{SV} \Rightarrow \frac{dQ_x^{SV}}{dx} = 0 \quad (16)$$

Engaste: Fazendo as condições de contorno em (7.c), tem-se:

$$Q_x^{SV} = \widehat{A}_{xz} \left(\phi^{SV} + \frac{d\psi_o^{SV}}{dx} \right) \Rightarrow Q_x^{SV} = 0 \quad (17)$$

Utilizando o método da Variação de Parâmetros é construída a solução da Eq.(11) a qual é apresentada:

$$Q_x^{SV} = \bar{C}_5 \sinh(\lambda x) + \bar{C}_6 \cosh(\lambda x) + Q_P^{SV} \quad (18)$$

Em que:

$$Q_P^{SV} = \left[\frac{-\mu}{2\lambda} \int e^{-x\lambda} (Q^E + C_1) dx \right] e^{\lambda x} + \left[\frac{\mu}{2\lambda} \int e^{x\lambda} (Q^E + C_1) dx \right] e^{-\lambda x} \quad (19)$$

$$\lambda^2 = D_{xx} \bar{A}_{xz} / A_2 (F\widehat{D} - D\widehat{F}) \quad e \quad \mu = \widehat{D}_{xx} \widehat{A}_{xz} / A_2 (F\widehat{D} - D\widehat{F}) \quad (20)$$

2.4 Aplicação das correlações entre a TSV e TEB

Nesta seção será feita uma aplicação da teoria de Shi-Voyiadjis para uma viga isotrópica simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído, mostrada na Figura 1.

Conhecido o esforço cortante da teoria de Euler-Bernoulli:

$$Q_x^E = \frac{q_0}{2} (L - 2x) \quad (21)$$

Substituindo a Eq. (21) em (18), e impondo as condições de contorno da Eq. (16):

$$Q_x^{SV} = \frac{\mu q_0}{\lambda^3} \sinh(\lambda h) + \frac{-\mu \left[\tanh\left(\frac{L\lambda}{2}\right) \right] q_0}{\lambda^3} \cosh(\lambda h) + \frac{\mu}{\lambda^2} \left[\frac{q_0(L - 2x)}{2} + C_1 \right] \quad (22)$$

Pelas condições de contorno elencadas anteriormente, tem-se:

$$w^E(0) = w^E(L) = M_{xx}^E(0) = M_{xx}^E(L) = 0$$

$$w^{SV}(0) = w^{SV}(L) = M_{xx}^{SV}(0) = M_{xx}^{SV}(L) = P_{xx}^{SV}(0) = P_{xx}^{SV}(L) = 0$$

Assim, as constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 podem ser obtidas substituindo as condições de contorno na Eq. (9), Eq.(10) e Eq.(14) assim:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = \frac{\hat{D}}{\hat{A}_{xz}} \frac{\mu q_0}{\lambda^4}$$

Por fim, pode-se reescrever a força cisalhante, momento de primeira ordem, rotação e deflexão da TSV:

$$V_x^{SV} = (Q_x^E + C_1) = Q_x^E, \quad M_{xx}^{SV} = M_{xx}^E + C_1 x + C_2 = M_{xx}^E \quad (23)$$

$$\phi_x^{SV} = -\frac{dw_0^E}{dx} + \frac{\hat{F}_{xx}}{\hat{A}_{xz} D_{xx}} Q_x^T + \frac{C_1}{D_{xx}} \frac{x^2}{2} + \frac{C_2}{D_{xx}} x + \frac{C_3}{D_{xx}} = -\frac{q_0(L^3 - 6Lx^2 + 4x^2)}{24D_{xx}} \quad (24)$$

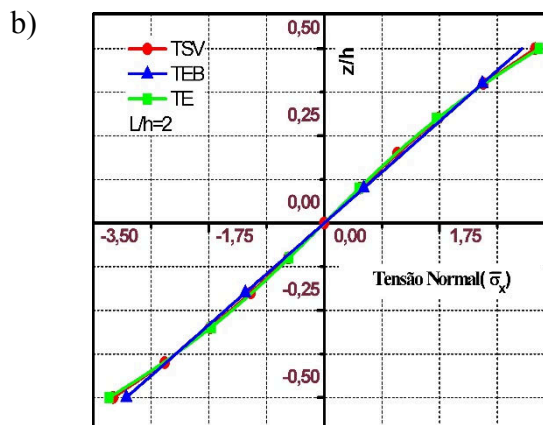
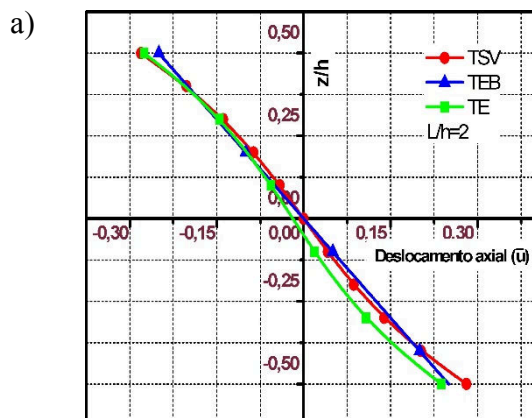
$$w_0^{SV} = w_0^E + \frac{\hat{D}_{xx}}{\hat{A}_{xz} D_{xx}} \left\{ \frac{\mu q_0}{\lambda^4} \left[-\tanh\left(\frac{L\lambda}{2}\right) \sinh(x\lambda) + \cosh(x\lambda) + \frac{\lambda^2 x(L-x)}{2} - 1 \right] \right\} \quad (25)$$

Dessa forma, se observa que os esforços internos e a rotação nesse exemplo são os mesmos apresentados pela teoria de Euler-Bernoulli enquanto que a deflexão é a mesma que apresentada pela teoria de Reddy em Wang, Reddy et al (2000).

O presente trabalho apresenta também o deslocamento axial (Eq. 3), tensão normal, tensão cisalhante e a deflexão transversal (Eq.25) desse mesmo exemplo. Os resultados são obtidos para uma viga moderadamente espessa ($L/h=2$) feita de material isotrópico com coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. Os deslocamentos e tensões são apresentados na forma adimensional para o carregamento distribuído, construído por meio das seguintes relações:

$$\bar{u}(0, z) = \frac{uEbh^2}{q_0L^3}, \quad \bar{\sigma}_x\left(\frac{L}{2}, z\right) = \frac{b\sigma_x}{q_0}, \quad \bar{w}(x, 0) = \frac{10wEbh^3}{q_0L^4}, \quad \bar{\tau}_{zx}(0, z) = \frac{b\tau_{zx}}{q_0}$$

onde \bar{u} é o deslocamento adimensional da seção transversal, \bar{w} é a deflexão adimensional do eixo centroidal, $\bar{\sigma}_x$ é a tensão normal adimensional, $\bar{\tau}_{zx}$ é a tensão de cisalhamento adimensional. Dessa forma, na Figura 2 são feitas comparações entre TSV, TEB e a teoria exata da elasticidade (TE) para uma viga espessa ($L/h=2$). Pode-se constatar (Figura 2) que a TSV apresenta boa aproximação em relação a TE. Já para o deslocamento transversal, a TSV melhor representa a solução da TE quando comparado com a TEB. Chama-se a atenção que todos os erros das análises foram inferiores a 6%, quando comparados entre as teorias TSV e a TE.



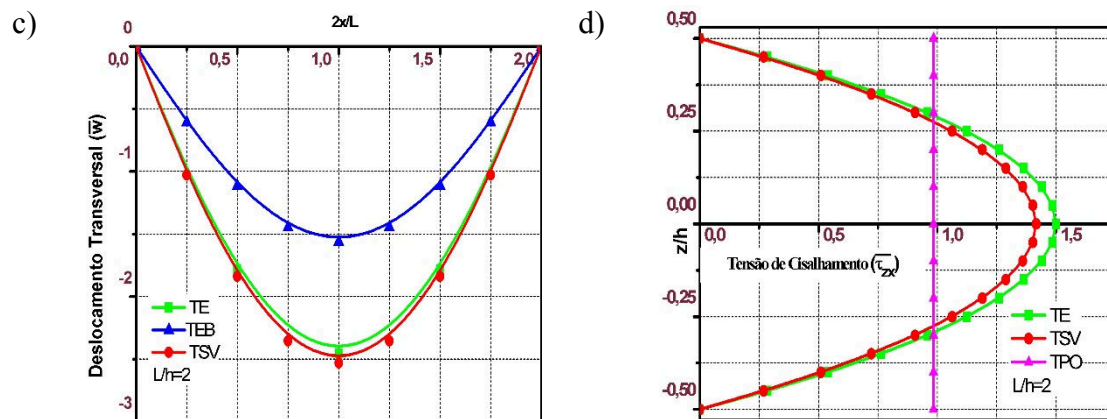


Figura 2. Distribuição dos campos: a) deslocamento \bar{u} , b) tensão normal $\bar{\sigma}_x$, c) \bar{w} deslocamento transversal e d) tensão de cisalhamento transversal $\bar{\tau}_{xz}$.

Fonte: (O autor, 2018)

3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção é abordado o desenvolvimento variacional da formulação fraca, via Método de Ritz, e a utilização das funções interpoladoras cúbica de Hermite para w_0^{sv} e dw_0^{sv} / dx , além da função quadrática de Lagrange para ϕ_0^{sv} .

3.1 Formulação fraca para TSV

Inicia-se a construção da formulação fraca para um elemento de domínio $\Omega^e = (x_a, x_b)$, por meio da multiplicação de ambas as equações que descrevem o problema (6.a e 6.b) por funções arbitrárias $\psi(x)$ e $\nu(x)$ denominadas peso ou ponderadoras, para obter as seguintes equações:

$$\int_{x_a}^{x_b} \psi(x) \left[-\frac{d\hat{M}_{xx}^{sv}}{dx} + \hat{Q}_x^{sv} \right] dx = 0 \quad . \quad (26)$$

$$\int_{x_a}^{x_b} \nu(x) \left[-\frac{d^2\widehat{M}_{xx}^{sv}}{dx^2} - \frac{d\hat{Q}_x^{sv}}{dx} - q \right] dx = 0 \quad . \quad (27)$$

Integrando a Eq.(26) e Eq.(27), tem-se:

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\psi}{dx} \hat{M}_{xx}^{sv} + \psi \hat{Q}_x^{sv} dx - \psi \hat{M}_{xx}^{sv} \Big|_{x_a}^{x_b} = 0$$

$$- \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{d^2\nu}{dx^2} \widehat{M}_{xx}^{sv} - \frac{d\nu}{dx} \hat{Q}_x^{sv} \right) dx - \int_{x_a}^{x_b} (\nu q) dx = \nu \widehat{V}_x^{sv} \Big|_{x_a}^{x_b} - \frac{d\nu}{dx} \widehat{M}_{xx}^{sv} \Big|_{x_a}^{x_b}$$

substituindo os termos definidos nas Eqs. (6), chega-se ao problema variacional:

$$a(v, w) + b(v, \phi) = L_2(v). \quad (28.a)$$

$$c(\psi, w) + d(\psi, \phi) = L_2(\psi). \quad (28.b)$$

onde:

$$a(v, w) = \int_{x_a}^{x_b} \left[T_1 \frac{dv}{dx} \frac{dw_0^{sv}}{dx} - T_6 \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2w_0^{sv}}{dx^2} \right] dx. \quad b(v, \phi) = \int_{x_a}^{x_b} \left[T_1 \frac{dv}{dx} \phi_x^{sv} - T_5 \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d\phi_x^{sv}}{dx} \right] dx$$

$$L_1(v) = \int_{x_a}^{x_b} (vq) dx + v(x_b) \widehat{V}_x^{sv}(x_b) - v(x_a) \widehat{V}_x^{sv}(x_a) - \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x_b} \widehat{M}_{xx}^{sv}(x_b) + \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x_a} \widehat{M}_{xx}^{sv}(x_a)$$

$$Q_1 = -\widehat{V}_x^{sv}(x_a), Q_2 = -\widehat{M}_{xx}^{sv}(x_a), Q_3 = \widehat{V}_x^{sv}(x_b), Q_4 = \widehat{M}_{xx}^{sv}(x_b)$$

$$T_5 = A_2 \widehat{F}_{xx} - (A_1 - 1) \widehat{D}_{xx}, T_6 = \widehat{F}_{xx} (A_1 - 1) - A_2 \widehat{H}_{xx}$$

$$c(\psi, w) = \int_{x_a}^{x_b} \left\{ T_1 \psi \frac{dw_0^{sv}}{dx} - T_2 \frac{d\psi}{dx} \frac{d^2w_0^{sv}}{dx^2} \right\} dx, \quad d(\psi, \phi) = \int_{x_a}^{x_b} \left\{ T_1 \psi \phi_x^{sv} + T_3 \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi_x^{sv}}{dx} \right\} dx$$

$$L_2(\psi) = \psi(x_b) \widehat{M}_{xx}^{sv}(x_b) - \psi(x_a) \widehat{M}_{xx}^{sv}(x_a), \quad Q_5 = -\widehat{M}_{xx}^{sv}(x_a), \quad Q_6 = \widehat{M}_{xx}^{sv}(x_b)$$

$$T_1 = A_1 \widehat{A}_{xz} - 3A_2 \widehat{D}_{xz}, \quad T_2 = A_1 \widehat{F}_{xx} - A_2 \widehat{H}_{xx}, \quad T_3 = A_1 \widehat{D}_{xx} - A_2 \widehat{F}$$

3.2 Formulação do MEF aplicado à TSV (MEF-SV)

Para o desenvolvimento do MEF em conjunto com a teoria de Shi- Voyiadjis, aqui denominado de MEF-SV, são consideradas as aproximações para $w_0^{sv}(x)$ e $\phi_x^{sv}(x)$ da seguinte forma:

$$w_0^{sv}(x) \approx \sum_{j=1}^m d_j \varphi_j^{(1)}(x), \quad \phi_x^{sv}(x) \approx \sum_{j=1}^n p_j \varphi_j^{(2)}(x)$$

onde $\varphi_j^{(1)}$ e $\varphi_j^{(2)}$ são funções interpoladoras polinomiais, d_j são os valores nodais constituídos por $w_0^{sv}(x)$ e p_j são os valores nodais constituídos por $\phi_x^{sv}(x)$. Pelo Método de Galerkin, faz-se $v \approx \varphi_i^{(1)}$ e $\psi \approx \varphi_i^{(2)}$ na formulação fraca das Eqs. 28 para obter:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

onde:

$$K_{ij}^{11} = a(\varphi_i^{(1)}, \varphi_j^{(1)}), \quad K_{ij}^{12} = b(\varphi_i^{(1)}, \varphi_j^{(2)}), \quad K_{ij}^{21} = c(\varphi_i^{(2)}, \varphi_j^{(1)}), \quad K_{ij}^{22} = d(\varphi_i^{(2)}, \varphi_j^{(2)})$$

$$F^1 = L_1(\varphi_i^{(1)}), \quad F^2 = L_2(\varphi_i^{(2)})$$

Para contornar o problema de *shear locking*, neste trabalho foi considerado funções aproximadoras para ϕ_0^{sv} de um grau a menos que w_0^{sv} . Nesse sentido, foi realizada a

interpolação cúbica de Hermite para os parâmetros (w_0^{SV} e dw_0^{SV}/dx), além de uma interpolação quadrática para ϕ_0^{SV} . Assim, obtém-se a seguinte equação para o modelo em elementos finitos:

$$\bar{K} \begin{bmatrix} 12 & L(1+5\Theta) & -12 & L(1+5\Theta) & L(-1+5\Theta) & -8L & L(-1+5\Theta) \\ L(1+5\Theta) & \frac{4}{L^2}(1+2\Theta) & -L(1+5\Theta) & \frac{1}{L^2}(-1+7\Theta) & \frac{1}{L^2}(7+11\Theta) & -\frac{2}{L^2}(1+5\Theta) & \frac{1}{L^2}(-1+3\Theta) \\ -12 & \frac{3}{L}(1+5\Theta) & 12 & \frac{3}{L}(1+5\Theta) & \frac{6}{L}(-1+5\Theta) & \frac{3}{8L} & \frac{2}{L}(-1+5\Theta) \\ L(1+5\Theta) & \frac{1}{L^2}(-1+7\Theta) & -L(1+5\Theta) & \frac{4}{L^2}(1+2\Theta) & \frac{1}{L^2}(-1+3\Theta) & -\frac{2}{L^2}(1+5\Theta) & \frac{1}{L^2}(7+11\Theta) \\ L(-1+5\Theta) & \frac{3}{L^2}(7+11\Theta) & -L(-1+5\Theta) & \frac{1}{L^2}(-1+3\Theta) & \frac{1}{L^2}(4+591\Theta) & -\frac{2}{L^2}(-1+341\Theta) & \frac{1}{L^2}(-1+86\Theta) \\ -8L & -\frac{2}{L^2}(1+5\Theta) & 8L & -\frac{2}{L^2}(1+5\Theta) & -\frac{2}{L^2}(-1+341\Theta) & \frac{16}{L^2}(1+84\Theta) & -\frac{2}{L^2}(-1+341\Theta) \\ L(-1+5\Theta) & \frac{1}{L^2}(-1+3\Theta) & -L(-1+5\Theta) & \frac{1}{L^2}(7+11\Theta) & \frac{1}{L^2}(-1+86\Theta) & -\frac{2}{L^2}(-1+341\Theta) & \frac{1}{L^2}(4+591\Theta) \end{bmatrix} \cdot (30)$$

$$\times \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_c \\ Q_6 \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\bar{K} = 1/84L^3, \Theta = D_{xx}/\Omega, \Omega = D_{xx} + 7AL^2G_{xz}, q_i = (L/2)\int_{-1}^1 \phi_i^{(1)} q(\xi) d\xi, (i = 1, 2, 3, 4)$$

A e L são a área e o comprimento do elemento, respectivamente. $Q_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

são as forças generalizadas definidas nas Eqs. 28 e Q_c é obtida como combinação linear de Q_5 e Q_6 .

3.3 Aplicação numérica

A matriz de rigidez da Eq. (30) pode ser usada para a resolução dos mais variados problemas de vigas. A seguir é mostrado sua aplicação para a viga simplesmente apoiada e moderadamente espessa ($L/h=2$), apresentada na Figura 1. Nesse exemplo foram analisados (Figura 3) o comportamento dos campos de respostas (deslocamentos axial e transversal; tensões normal e cisalhante) da MEF-SV em comparação com a TE, à medida que é elevada a quantidade de elementos (2,4,8,16 e 32). Em todos os campos de respostas presentes na Figura 3 é observado uma boa concordância entre os resultados obtidos pelo MEF-SV e a TE. Observação adicional é realizada para destacar que os campos de deslocamento (Figura 3a e c) ficam inalterados, e com erro em relação a TE, inferiores a 3%, à medida que o número de elementos é aumentado. Já para os campos de tensão (Figura 3b e d), há alteração em suas curvas de respostas para atingir a convergência com erro máximo, em relação à TE, inferior a 5,6% para a tensão de cisalhamento e 1,87 para a tensão normal.

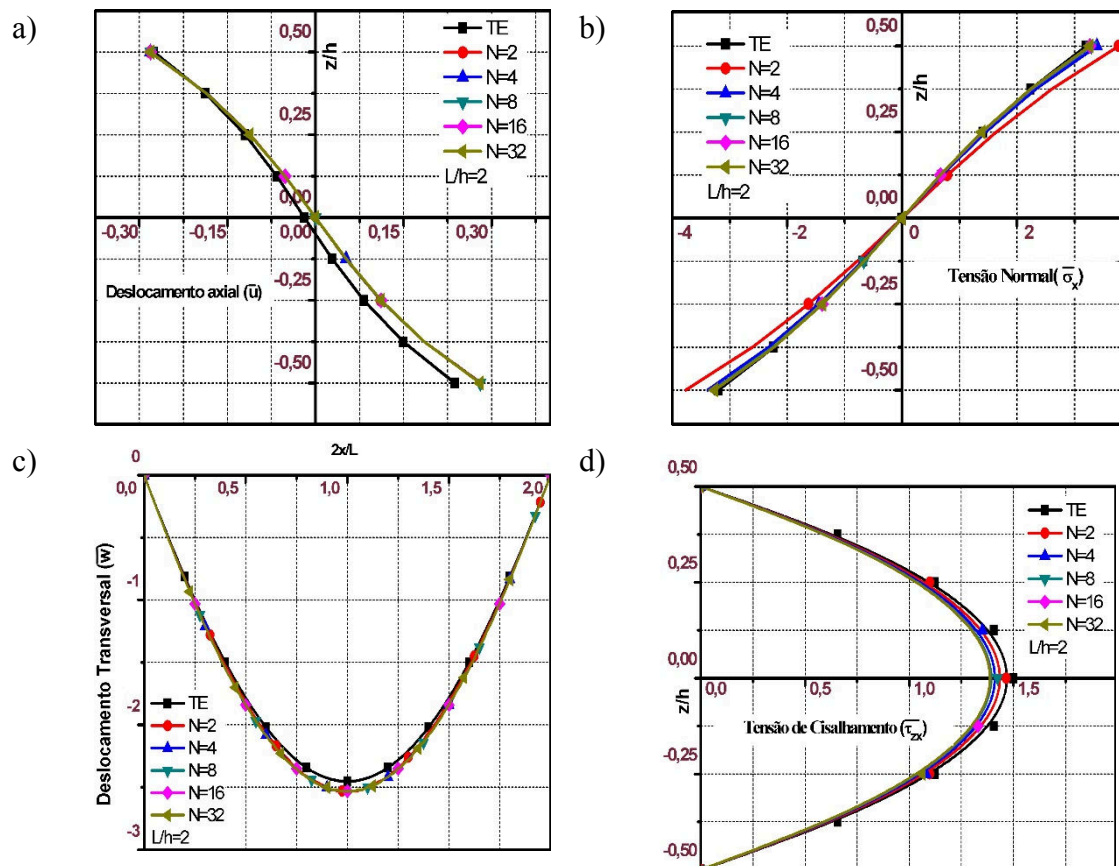


Figura 3. Distribuição dos campos de resposta do MEF-SV em comparação com a Teoria da Elasticidade (TE) conforme se eleva a quantidade de elementos (N).

Fonte: (O autor, 2018)

Uma vez estabilizado os campos de resposta para o MEF-SV com 8 elementos, é realizada a análise, para a máxima deflexão, do efeito do travamento por cisalhamento (shear locking), à medida que a relação L/h é aumentada (ver Figura 4).

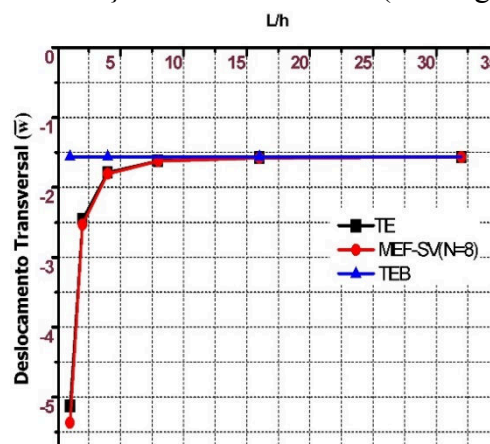


Figura 4. Análise de travamento devido ao aumento de esbeltez (shear locking)

Fonte: (O autor, 2018)

Por meio da Figura 4, é observado que o campo de resposta do deslocamento transversal obtido pelo MEF-SV é concordante com a solução da teoria da Elasticidade,



evidenciando o não-shear locking. No entanto, quando a resposta é obtida pela teoria clássica de Euler-Bernoulli (TEB), os resultados tornam-se discrepantes da TE, à medida que a relação L/h é pequena (espessa).

4 CONCLUSÕES

O presente trabalho abordou diversos aspectos da teoria de Shi- Voyiadjis. Primeiramente foram desenvolvidas correlações entre a TEB e a TSV, uma vez que a teoria de Shi- Voyiadjis apresenta parâmetros de alta ordem e com interpretação física não óbvia. Na sequência foi realizada a construção do modelo em elementos finitos para a TSV, aqui denominada de MEF-SV. Para a construção do MEF-SV foi utilizado o método variacional de Ritz, apresentando as condições de contorno, essenciais e naturais, para a construção do campo aproximador. Para a aproximação de $(w_0^{sv}$ e $dw_0^{sv} / dx)$ foi utilizado o polinômio cúbico de Hermite e para a rotação (ϕ_0^{sv}) polinômio quadrático de Lagrange. Essa ordem inferior da aproximação de Lagrange em relação à de Hermite proporcionou a ausência do travamento devido ao cisalhamento, à medida que a relação L/h aumenta. A partir da construção do MEF-SV é explicitada sua matriz de rigidez e seu vetor de carregamento, os quais podem ser de fácil implementação computacional. Por fim, os resultados numéricos do MEF-SV apresentaram boa aproximação com relação à teoria da elasticidade, com erro máximo inferior a 6% para todas as análises.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal de Sergipe, por meio do programa institucional PICVOL pelo apoio para a realização do presente trabalho.

REFERÊNCIAS

- Levinson, M., 1981. A new rectangular beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 74, pp. 81–87.
- Reddy J.N., 1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME Journal Applied Mechanics*, vo51, pp. 745–52.
- Reddy, J.N., Wang C.M., & Lee K.H., 1997. Relationships between bending solutions of classical and shear deformation theories. *International Journal of Solids and Structures*, vol.34, pp. 3373–3384.
- Sayyad, A. S., & Ghugal, Y. M., 2017. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature. *Composite Structures*, vol. 171, n. 10, pp. 486–504.
- Shi, G., & Voyiadjis, G. Z., 2011. A Sixth-Order Theory of Shear Deformable Beams with Variational Consistent Boundary Conditions. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 78, n. 2, pp. 21019-1-10.
- Timoshenko, S. P., 1921. On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars. *Philosophical Magazine*, series 6, vol. 41, pp. 742–746.
- Wang C.M, Reddy J.N, & Lee K.H., 2000. Shear deformable beams and plates: relationships with classical solutions. Elsevier Science Ltd.