



## DISTRIBUIÇÃO DOS NÚMEROS PRIMOS: O TEOREMA DE LUCAS-LEHMER E SUAS CONSEQUÊNCIAS

MENEZES, Jackson da Silva<sup>1</sup>; JUNIOR, José Carlos de Oliveira<sup>2</sup>;

### RESUMO

O projeto teve como objetivo investigar a distribuição dos números primos e compreender resultados clássicos e contemporâneos da Teoria dos Números, com destaque para o Teorema dos Números Primos e o Teorema de Lucas-Lehmer. O estudo abordou conceitos fundamentais como classes residuais, função de Euler, Teorema de Euler-Fermat e diferentes testes de primalidade, além de explorar propriedades de primos especiais, como os primos de Mersenne. Entre os resultados, destacou-se a compreensão da relação entre o crescimento da função  $\pi(x)$ , que conta a quantidade de primos até  $x$ , e a expressão  $x/\log(x)$ , conforme estabelecido pelo Teorema dos Números Primos. O Teorema de Lucas-Lehmer foi analisado como ferramenta eficiente para testar a primalidade de números da forma  $2^p - 1$ , contribuindo para o estudo dos maiores primos conhecidos. O trabalho culminou na formulação e discussão do Teorema Menezes Oliveira, um resultado novo que propõe uma abordagem de existência para a ocorrência de primos com determinadas terminações decimais em certos conjuntos específicos. Assim, o projeto ampliou a compreensão teórica e aplicada sobre a estrutura e distribuição dos números primos, incentivando o raciocínio lógico e o pensamento investigativo na Matemática.

**Palavras-chave:** Números primos; Teorema dos Números Primos; Lucas Lehmer.

### I. INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

A Matemática sempre exerceu um papel essencial no desenvolvimento da ciência e da tecnologia, permitindo compreender, modelar e resolver problemas complexos nas mais diversas áreas do conhecimento. Entre os temas que despertam maior

---

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica (PIBIC). Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. [jackson.menezes@ufnt.edu.br](mailto:jackson.menezes@ufnt.edu.br)

2 Professor orientador. Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. [jose.junior@ufnt.edu.br](mailto:jose.junior@ufnt.edu.br).



interesse e curiosidade está o estudo dos números primos, cuja simplicidade conceitual contrasta com a profundidade de suas propriedades e aplicações.

Um número inteiro diferente de 1 e -1 é chamado de primo quando possui apenas dois divisores positivos: 1 e ele mesmo. Apesar da definição simples, a estrutura e a distribuição dos números primos entre os inteiros continuam sendo um dos maiores desafios da Matemática. Diversos ramos da ciência moderna, como a criptografia, a segurança digital e a teoria da informação, dependem diretamente das propriedades dos números primos para garantir a proteção de dados e sistemas computacionais.

O presente trabalho teve como objetivo investigar a distribuição dos números primos e estudar dois resultados fundamentais da Teoria dos Números: o Teorema dos Números Primos e o Teorema de Lucas-Lehmer. O primeiro estabelece que, quando  $x$  tende ao infinito, a quantidade de números primos menores ou iguais a  $x$ , denotada por  $\pi(x)$ , se comporta de forma aproximada a  $x$  dividido por  $\log(x)$ . Em notação matemática:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1$$

Esse resultado revela que os primos tornam-se mais raros à medida que os números crescem, mas continuam distribuídos de maneira previsível em média.

Já o Teorema de Lucas-Lehmer fornece um critério eficiente para determinar se um número da forma  $2^p - 1$  é primo, sendo amplamente utilizado na busca pelos maiores números primos conhecidos, chamados de primos de Mersenne.

Além de explorar esses dois teoremas, o estudo propôs uma nova análise sobre o comportamento dos primos em determinadas faixas numéricas, culminando na formulação do Teorema Menezes Oliveira, que busca compreender a probabilidade de ocorrência de primos com terminações específicas (1, 3, 7 ou 9) em intervalos definidos.



Assim, esta pesquisa combina teoria e aplicação, proporcionando uma visão abrangente sobre a distribuição dos números primos e destacando a relevância desses resultados no avanço da Matemática.

Esta pesquisa está dentro da área temática CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA (Teoria dos Números como área secundária).

## II. BASE TEÓRICA

A base teórica deste trabalho fundamenta-se em conceitos clássicos da Teoria dos Números, com foco na compreensão da distribuição dos números primos e nos teoremas que descrevem suas propriedades. De acordo com Martinez et al. (2018), os números primos desempenham papel central na estrutura dos inteiros e em aplicações modernas, como a criptografia e a segurança digital.

O estudo parte da análise do Teorema dos Números Primos, que estabelece a relação aproximada entre a função  $\pi(x)$  e a expressão  $x/\log(x)$ , indicando o comportamento assintótico da frequência dos primos. Em seguida, aborda-se o Teorema de Lucas-Lehmer, conforme discutido por Morimoto (2014) e Marques (2013), que fornece um critério eficiente para testar a primalidade de números da forma  $2^p - 1$ , conhecidos como primos de Mersenne.

Esses resultados, aliados aos conceitos de classes residuais e à função de Euler apresentados por Lopes (2011), fornecem a base necessária para o desenvolvimento e a formulação do Teorema Menezes-Oliveira, proposto no presente estudo.

## III. OBJETIVOS

O trabalho teve como objetivo compreender a distribuição dos números primos entre os inteiros e estudar teoremas fundamentais da Teoria dos Números, especialmente o Teorema dos Números Primos e o Teorema de Lucas-Lehmer.



Buscou-se analisar suas demonstrações, aplicações e implicações para a criptografia e a segurança digital.

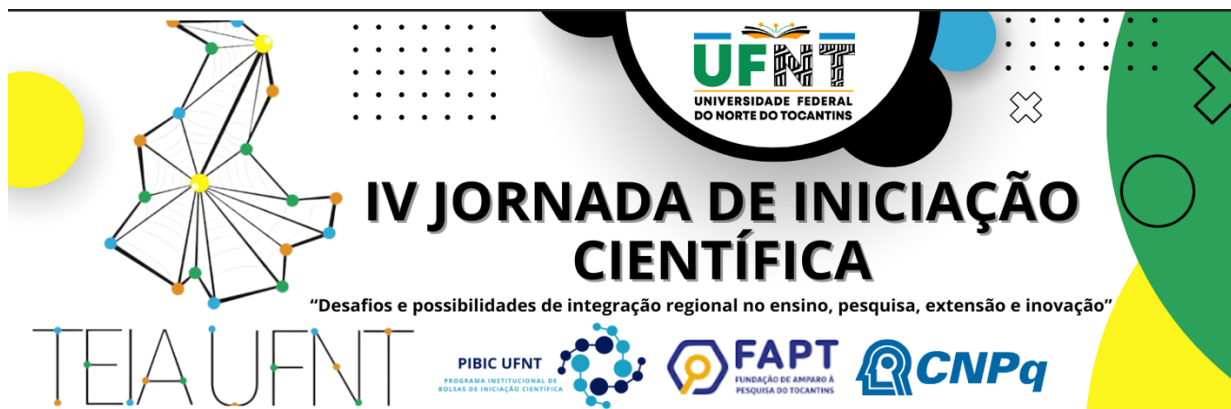
Entre os objetivos específicos, destacaram-se o estudo das classes residuais, da função de Euler e do Teorema de Euler-Fermat, bem como a identificação de diferentes testes de primalidade e de primos especiais, como os de Mersenne. O projeto também propôs e discutiu o Teorema Menezes-Oliveira, que investiga a ocorrência de primos com determinadas terminações em intervalos específicos.

#### **IV. METODOLOGIA**

A presente pesquisa foi desenvolvida sob uma abordagem qualitativa e de caráter bibliográfico. O enfoque qualitativo foi adotado por permitir uma compreensão mais profunda dos conceitos e relações teóricas que envolvem a distribuição dos números primos, privilegiando a interpretação e a análise conceitual em vez da experimentação numérica.

Como pesquisa bibliográfica, o estudo baseou-se em obras clássicas e contemporâneas da Teoria dos Números, selecionadas por sua relevância na compreensão dos teoremas investigados. Entre as principais referências consultadas destacam-se Martinez et al. (2018), Morimoto (2014), Marques (2013), Lopes (2011) e outros autores que tratam de forma detalhada temas como classes residuais, função de Euler, Teorema de Euler-Fermat, Teorema dos Números Primos e Teorema de Lucas-Lehmer.

O desenvolvimento do trabalho seguiu etapas progressivas. Inicialmente, foi realizada uma revisão teórica sobre os conceitos fundamentais da Teoria dos Números e suas aplicações. Em seguida, procedeu-se ao estudo detalhado dos teoremas centrais, com ênfase em suas demonstrações e implicações. Por fim,



analisaram-se as consequências práticas desses resultados, com destaque para o papel dos números primos.

A metodologia adotada permitiu consolidar os fundamentos teóricos do tema, favorecendo uma análise crítica e reflexiva sobre a estrutura e a distribuição dos números primos, bem como sobre o alcance dos teoremas estudados.

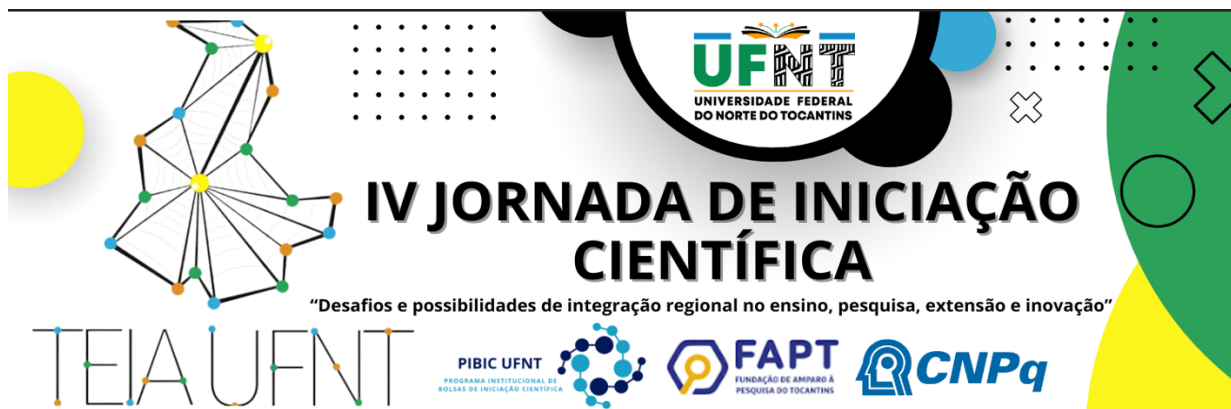
## V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados obtidos ao longo da pesquisa permitiram aprofundar a compreensão sobre a distribuição dos números primos e confirmar a relevância dos teoremas estudados para a Teoria dos Números. O estudo do Teorema dos Números Primos evidenciou que a função  $\pi(x)$ , que representa a quantidade de primos menores ou iguais a  $x$ , cresce aproximadamente como  $x$  dividido por  $\log(x)$ . Esse resultado expressa que, embora os números primos se tornem mais raros à medida que  $x$  aumenta, eles continuam se distribuindo de forma regular em larga escala.

O Teorema de Lucas-Lehmer também foi analisado como um método eficiente para determinar a primalidade de números da forma  $2^p - 1$ . Esse teorema, amplamente utilizado em algoritmos modernos, é responsável pela verificação dos maiores primos conhecidos atualmente, conhecidos como primos de Mersenne.

Durante o desenvolvimento do trabalho, foi proposto e formulado o Teorema Menezes-Oliveira, que busca descrever o comportamento probabilístico das terminações decimais dos números primos em determinados intervalos. O enunciado do teorema é o seguinte:

**Teorema Menezes-Oliveira:** Para qualquer  $n \geq 2$  e para todo inteiro  $k \geq 0$ , é possível determinar a ocorrência de números primos com terminações 1, 3, 7 ou 9 no conjunto de números compreendidos em intervalos específicos.



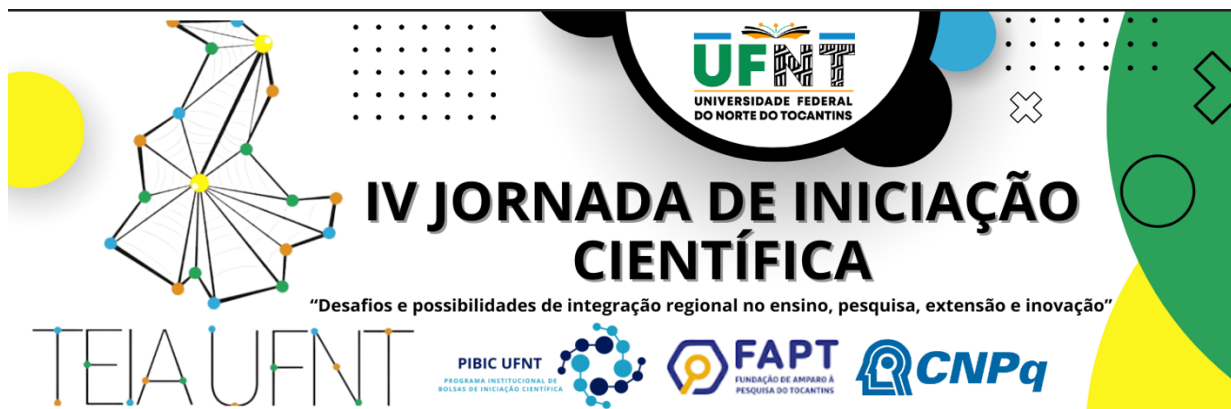
Em termos práticos, o teorema estabelece que, quando se considera uma sequência suficientemente grande de números inteiros consecutivos, os números primos se distribuem de modo quase uniforme entre as terminações 1, 3, 7 e 9, apresentando pequenas variações locais que tendem a se estabilizar conforme o intervalo cresce.

Como conclusão geral, o trabalho permitiu consolidar o conhecimento teórico sobre a distribuição dos números primos e aprofundar a análise de teoremas clássicos e contemporâneos da Teoria dos Números. Além disso, a formulação do Teorema Menezes-Oliveira representa uma contribuição original, ao propor uma nova forma de compreender a frequência e o comportamento dos primos dentro de padrões numéricos definidos.

O estudo reforça a importância da pesquisa teórica em Matemática como base para o avanço da ciência e da tecnologia, evidenciando que mesmo temas milenares, como os números primos, continuam a oferecer desafios e oportunidades para novas descobertas.

## VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo aprofundou a compreensão de conceitos da Teoria dos Números e da Análise Matemática, com foco na investigação do Teorema de Lucas-Lehmer e suas implicações. Os objetivos do trabalho foram alcançados por meio de uma revisão bibliográfica detalhada, estudo conceitual aprofundado e a sistematização dos resultados. O Teorema de Lucas-Lehmer revelou-se uma ferramenta poderosa e eficiente para identificar os primos de Mersenne, um subconjunto significativo na distribuição dos números primos. A busca por esses primos continua a ser uma área de interesse na matemática pura e em aplicações práticas, como testes de desempenho computacional.



As proposições demonstradas, que confirmam as observações de Menezes e Oliveira, mostram que a ausência de certos primos em intervalos específicos não é uma coincidência, mas uma certeza matemática. A presença do fator comum 30k nas progressões garante que a divisibilidade por 3 dos números base seja preservada para todos os termos subsequentes da sequência. Desse modo, este trabalho serve como um exemplo de como regras elementares de divisibilidade podem gerar padrões previsíveis na distribuição de números primos, fornecendo uma base sólida para futuras pesquisas, especialmente no estudo sobre a distribuição dos primos e na análise de outros testes de primalidade.

## VII. REFERÊNCIAS

ANDRADE, Ricardo Pereira de. Testes de primalidade : uma análise matemática dos algoritmos determinísticos e probabilísticos. 38 - 49 p. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.

BRAGA, B. D. R. Algoritmo aks - primalidade de um número em tempo polinomial. Chemistry and Physics of Lipids - CHEM PHYS LIPIDS, v. 2003, p. 217–222, 2002. FELIPE, Henrique. Teste de primalidade via divisão por tentativa. 2018. Disponível em: <<https://www.blogcyberini.com/2018/04/teste-primalidade-divisao-por-tentativa.html>>. Acesso em 07 de 06 de 2024. GIMPS. GIMPS History. 1996. Disponível em: <<https://www.mersenne.org/various/history.php>>. Acesso em 10 de outubro de 2024.

HEFEZ, Abramo. Aritmética. 144 p. Rio de Janeiro: SBM, 2016 LOPES, M. A. Introdução à Teoria dos Números e dos Números Primos. 38 p. Dissertação (Monografia ( Curso de especialização em matemática )) — Centro de Ciências Humanas e Exatas- CCHE da Universidade Estadual da Paraíba, Monteiro, 2011.



MARTINS, Marlon Maiko Barros. Testes de primalidade: dos métodos tradicionais aos computacionais. 45 - 59 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Curso de Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2021.

MARTINEZ, F. a. a. Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. [S.l.]: IMPA, 2018. ISBN 978-85-244-0447-4.

MORIMOTO, R. M. Introdução à Teoria dos Números e dos Números Primos. 65 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

MUNIZ, M.; COSTA, S. I. Labelings of lee and hamming spaces. Discrete Mathematics, v. 260, n. 1, p. 119–136, 2003. ISSN 0012-365X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X02004545>>.

## VIII. AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Universidade Federal do Norte do Tocantins, campus de Araguaína, pela estrutura disponibilizada para a realização desta pesquisa, bem como pela bolsa de estudo fornecida durante os 12 meses de desenvolvimento.