



Análise de Estruturas de Concreto Armado Considerando Dano e Plasticidade

Analysis of Reinforced Concrete Structures Considering Damage and Plasticity

Mário Henriques Aragão Costa (1); Marcelo Silva Medeiros Júnior (2); Evandro Parente Júnior (3)

(1) Engenheiro Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE, Brasil.

(2) Dr. Prof. Marcelo Silva Medeiros Júnior, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE, Brasil.

(3) Dr. Prof. Evandro Parente Júnior., Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE, Brasil

Email para Correspondência: mariohenriquesac@gmail.com, marcelomedeiros@ufc.br, evandro@ufc.br; (P) Mário Henriques Aragão Costa

Resumo: Existem vários modelos constitutivos, sendo grande parte deles baseados na Teoria da Plasticidade e na Mecânica do Dano Contínuo. O software ABAQUS possui um modelo constitutivo de plasticidade com dano para concreto conhecida como o Modelo Concrete Damaged Plasticity (CDP). O objetivo do presente trabalho consiste em estudar o CDP com o intuito de esclarecer sobre sua utilização e adoção de parâmetros, além de modelar uma viga em concreto armado e comparar os resultados obtidos com resultados experimentais. Para isso, é feita uma revisão bibliográfica acerca do modelo baseando-se na sua formulação teórica a partir de estudos já realizados. Após isso, são modeladas vigas tridimensionais em ensaios de flexão pura. São adotados parâmetros de diferentes autores como dados de entrada para efeito de comparação. Não são encontrados resultados satisfatórios para as vigas. Sugere-se, para trabalhos futuros, a adoção de parâmetros diferentes que se adequem aos resultados experimentais.

Palavras chaves: *Modelo Concrete Damaged Plasticity; Elementos Finitos; Análise Não Linear; Ensaios de 4 pontos de flexão.*

Abstract: There are several constitutive models, most of them based on the Theory of Plasticity and the Continuous Damage Mechanics. ABAQUS software has a concrete damaging plasticity model known as the Concrete Damaged Plasticity Model (CDP). The objective of this paper is to study the CDP with the purpose of elucidating its use and adoption of parameters, besides modeling a beam in reinforced concrete and comparing the results obtained with experimental results. First, a review about the model is carried out based on its theoretical formulation from previous studies. After that, three-dimensional beams are modeled in 4-point bending tests. There are adopted parameters of different authors as inputs to compare. No satisfactory results are found for the beams. It is suggested, for future papers, the adoption of different parameters that are adequate to the experimental results.

Keywords: *Concrete Damaged Plasticity Model; Finite Elements; Non-linear Analysis; 4-point Bending Tests.*



1 INTRODUÇÃO

O comportamento da estrutura depende de seus materiais e das condições de carregamento, por isso a escolha de modelos que representem isso com eficácia é importante. Na literatura existem vários exemplos de modelos constitutivos para concreto, sendo grande parte deles baseados na Teoria da Plasticidade e na Mecânica do Dano Contínuo.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é bastante consagrado e utilizado na Engenharia Civil (FISH; BELYTSCHKO, 2007). Existem diversos softwares de EF para modelagens do concreto armado, como o VecTor2, o DIANA e o ABAQUS. Cada programa se utiliza de um modelo constitutivo próprio. Tanto DIANA quanto VecTor2 possuem modelos de Smeared Crack, que representam as fissuras através de mudanças nas equações constitutivas (MENIN *et al.*, 2009). O primeiro é baseado no método dos deslocamentos para análises não lineares. O segundo possui formulações baseadas na Teoria do Campo de Compressão Modificado (Modified Compression Field Theory – MCFT) (VECCHIO; COLLINS, 1986) e no Modelo de Perturbação do Campo de Tensões (Disturbed Stress Field Model – DTFM) (VECCHIO, 2000).

O ABAQUS® possui um modelo constitutivo de plasticidade com dano para concreto conhecida como Concrete Damaged Plasticity Model (CDP). Há, na literatura, vários estudos que se utilizam dessa plataforma (JANKOWIAK; LODYGOWSKI, 2005; SÜMER; AKTAŞ, 2015; ALFARAH *et al.*, 2017). Devido à disponibilidade do software e a facilidade e eficiência do modelo, opta-se pela utilização do CDP nesse trabalho. Sümer e Aktaş (2015) modelaram 3 vigas com elementos bidimensionais no CDP e compararam com resultados experimentais (SHARIF *et al.*, 1994; ARDUINI *et al.*, 1997; BENJEDDOU *et al.*, 2007) variando parâmetros e obtendo bons resultados.

O objetivo do presente trabalho consiste em estudar o CDP com o intuito de esclarecer sua utilização e metodologias de obtenção de parâmetros. Os estudos foram feitos por meio da modelagem de vigas em concreto armado e comparado com três resultados experimentais encontrados na literatura. Para isso, é feita uma revisão bibliográfica acerca do modelo baseando-se na sua formulação teórica a partir de estudos já realizados. Após isso, são modeladas vigas tridimensionais baseadas no estudo de Sümer e Aktaş (2015).

O Capítulo 2 aborda o modelo proposto por Lee e Fenves (1998), base do CDP. No Capítulo 3, há uma discussão acerca do CDP na qual são expostos seus parâmetros e sua obtenção. No Capítulo 4 são fornecidos dois exemplos numéricos, com conclusão no Capítulo 5.

2 MODELO DE LEE E FENVES (1998)

Há vários modelos de dano sem a consideração de plasticidade (MAZARS; PIJAUDIER-CABOT, 1989; MAZARS *et al.*, 2015). Esses modelos são bastante aplicáveis, porém Lee e Fenves (1998) citam a desvantagem de não possuírem controle da dilatação, ou seja, a expansão volumétrica durante o cisalhamento. Isso é um

fenômeno importante em casos de estruturas de concreto submetidas a cargas multiaxiais.

A incorporação do conceito de tensão efetiva da Mecânica do Dano Contínuo em modelos elastoplásticos se tornou uma solução interessante (MATIAS, 2018). Essa estratégia permite a obtenção de um modelo elastoplástico com dano e é bem vantajosa devido à possibilidade de desacoplar o dano da plasticidade a partir da linearização das equações evolutivas.

Lubliner *et al.* (1989) sugerem uma estratégia para a consideração da degradação da rigidez na qual as variáveis de dano são acopladas às deformações plásticas nas relações constitutivas. Dessa forma, os parâmetros são melhor obtidos a partir de resultados experimentais. O modelo de Lubliner *et al.* (1989) é aprimorado por Lee e Fenves (1998) com a correção de problemas de estabilidade numérica; a adoção do conceito de dano baseado na energia de fratura; e a incorporação de outros fenômenos observados no concreto em carregamento cíclico, como a recuperação da rigidez quando há reversão de deformações.

Lee e Fenves (1998) consideram duas variáveis de dano que evoluem independentemente uma da outra, sendo uma relacionada ao esmagamento (compressão) e outra à fissuração (tração). O modelo se baseia nos princípios da termodinâmica e possui duas variáveis de estado internas: a deformação plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ e a variável de dano $\boldsymbol{\kappa}$. A evolução de $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ é dada pela lei de fluxo

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \Phi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (1)$$

onde $\dot{\lambda}$ é o parâmetro de consistência plástica, Φ é uma função escalar potencial de plasticidade e a evolução de $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ é dada pela relação

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}). \quad (2)$$

Devido ao comportamento diferente do concreto para tração ou compressão, apenas uma variável de dano D não é suficiente. A superfície de escoamento é dada por

$$\tilde{F}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, f_t, f_c) \leq 0. \quad (3)$$

onde f_t e f_c as resistências à tração e à compressão do material. Sendo $\chi = [t, c]$, com t referenciando tração e c compressão, essas resistências são dadas por

$$f_\chi = [1 - D_\chi(\boldsymbol{\kappa}_\chi)] \tilde{f}_\chi(\boldsymbol{\kappa}_\chi). \quad (4)$$

onde \tilde{f}_χ corresponde às resistências efetivas. A variável de dano D é função de $\boldsymbol{\kappa}$ e é representada por

$$D(\boldsymbol{\kappa}) = 1 - (1 - D_t)(1 - D_c). \quad (5)$$

A superfície de escoamento pode ser representada como $\tilde{F}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa})$. Pelas expressões nas Equações 4 e 5, percebe-se que a formulação do modelo gira em torno dos parâmetros $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\boldsymbol{\kappa}$. São apresentadas as condições de Kuhn-Tucker

$$\dot{\lambda} \leq 0, \quad \dot{\lambda} F = 0, \quad \dot{\lambda} \dot{F} = 0. \quad (7)$$

A tensão total é determinada por

$$\boldsymbol{\sigma} = [1 - D(\boldsymbol{\kappa})] \tilde{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (8)$$

Para o caso multiaxial, a evolução da deformação plástica se dá por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \delta_{t\chi} r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\max}^p + \delta_{c\chi} [1 - r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})] \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\min}^p. \quad (9)$$

onde δ é o delta de Kronecker; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\max}^p$ e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\min}^p$ são o máximo e o mínimo autovalor do tensor $\boldsymbol{\varepsilon}^p$; $r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ é o coeficiente de triaxialidade e varia no intervalo $0 \leq r \leq 1$ definido por

$$r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \\ \frac{\sum_{i=1}^3 \hat{\sigma}_i}{\sum_{i=1}^3 |\hat{\sigma}_i|}, & \text{demais casos} \end{cases}. \quad (10)$$

e a evolução do parâmetro $\boldsymbol{\kappa}$ se dá por

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}). \quad (11)$$

onde

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \begin{bmatrix} r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) f_t(\boldsymbol{\kappa}_t) / g_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})) f_c(\boldsymbol{\kappa}_c) / g_c \end{bmatrix}. \quad (12)$$

As matrizes $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ são compostas pela diagonal com autovalores em ordem algébrica e g_χ corresponde à densidade de energia dissipada durante o processo de microfissura e é dada por

$$g_\chi = \frac{f_{\chi 0}}{b_\chi} \left(1 + \frac{a_\chi}{2} \right). \quad (13)$$

onde $f_{\chi 0}$ é o ponto inicial de escoamento, definido como a máxima tensão sem dano; e a_χ e b_χ são constantes.

3 MODELO CONCRETE DAMAGE PLASTICITY – CDP

O CDP é um modelo elastoplástico com dano baseado nas formulações de Lubliner *et al.* (1989) e Lee e Fenves (1998), admitindo também dois mecanismos de falha: ruptura por tração e esmagamento por compressão.

3.1 Parâmetros Constitutivos do Modelo

As deformações plásticas equivalentes de tração e de compressão são definidas por ε_t^{pl} e ε_c^{pl} . Para compressão e tração uniaxiais, a relação constitutiva do concreto se dá por

$$\sigma_c = (1 - d_c) E_0 (\varepsilon_c - \varepsilon_c^{pl}). \quad (14)$$

$$\sigma_t = (1 - d_t) E_0 (\varepsilon_t - \varepsilon_t^{pl}). \quad (15)$$

Para carregamentos cíclicos uniaxiais, assume-se a variável d para um dano efetivo que denota a degradação do módulo de elasticidade inicial E_0 a partir de

$$E = (1 - d) E_0. \quad (16)$$

onde E é o módulo tangente reduzido. O dano efetivo é dado por

$$1 - d = (1 - s_t d_t)(1 - s_c d_c). \quad (17)$$

onde d_c e d_t são os danos na compressão e na tração, respectivamente. O dano efetivo d se diferencia do dano D do Modelo de Lee e Fenves (1998) devido aos coeficientes adimensionais s_c e s_t que se relacionam com o estado de tensões e recuperação de rigidez. Eles são dados por

$$s_c = 1 - h_c (1 - r^*(\sigma_{11})). \quad (18)$$

$$s_t = 1 - h_t r^*(\sigma_{11}). \quad (19)$$

onde σ_{11} é a primeira tensão principal (positiva para tração); r^* é o parâmetro de estado de tensão; e h_c e h_t são fatores peso que variam entre 0 e 1. O fator h_c se relaciona com o fechamento de fissuras após a carga passar de tração para compressão, enquanto que o fator h_t representa a recuperação no esmagamento após a carga passar de compressão para tração. Em outras palavras, se $h_c = 0,90$ representa que 90% das fissuras se fecham após o carregamento reverso. Generalizando para o caso multiaxial, tem-se que

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}). \quad (20)$$

A função de escoamento F (JANKOWIAK; LODYGOWSKI, 2005; ALFARAH *et al.*, 2017) é dada por

$$F = \frac{1}{1-\alpha} (q - 3\alpha p + \beta \langle \sigma_{\max} \rangle - \gamma \langle -\sigma_{\max} \rangle) - \tilde{\sigma}_c = 0. \quad (21)$$

$$\alpha = \frac{(f_{b0}/f_{c0})-1}{2(f_{b0}/f_{c0})-1}, \quad \beta = \frac{\tilde{\sigma}_c}{\tilde{\sigma}_t} (1-\alpha) - (1+\alpha), \quad \gamma = \frac{3(1-K_c)}{2K_c-1}. \quad (22)$$

onde p é a tensão de pressão hidrostática; q é a tensão desviadora; f_{b0} e f_{c0} são as resistências à compressão de escoamento bi e uniaxial, respectivamente, obtidas experimentalmente; σ_{\max} é a máxima tensão principal efetiva; e K_c é a razão entre os segundos invariantes de tensão na tração e compressão. Além disso, vale salientar a notação de Macauley $\langle \cdot \rangle$, na qual $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(|x| + x)$.

O modelo de plasticidade considera um potencial de fluxo não associativo como sendo a seguinte função hiperbólica de Drucker-Prager

$$G = \sqrt{(\epsilon \sigma_{t0} \tan \Psi)^2 + q^2} - p \tan \Psi. \quad (23)$$

onde σ_{t0} é a tensão de tração uniaxial no escoamento; ϵ é a excentricidade da superfície de escoamento; e Ψ é o ângulo de dilatância medido no plano desviador $(p-q)$ em altas tensões de confinamento. De acordo com as Equações 21, 22 e 23, o comportamento do concreto depende de 4 parâmetros constitutivos $(K_c, \Psi, f_{b0}/f_{c0}, \epsilon)$, dados de entrada do CDP. Há valores sugeridos pela literatura (JANKOWIAK; LODYGOWSKI, 2005; ALFARAH *et al.*, 2017), geralmente se baseando em ensaios experimentais (KUPFER *et al.*, 1973). Na falta de ensaios experimentais, há os valores *default* do ABAQUS, que são $K_c = 2/3, f_{b0}/f_{c0} = 1,16, \epsilon = 0,1$. Além disso, o modelo conta com um parâmetro de viscosidade, necessário para ajustar as curvas de comportamento do material. Essa é uma dificuldade do modelo, uma vez que nem sempre os autores deixam claro qual seu valor em seus trabalhos, por exemplo Jankowiak e Lodygowski (2005) e Alfarah *et al.* (2017).

3.2 Cálculo das variáveis de dano

Alguns autores sugerem metodologias para cálculo das variáveis de dano, por exemplo Jankowiak e Lodygowski (2005), Sümer e Aktaş (2015) e Alfarah *et al.* (2017). Alfarah *et al.* (2017) sugerem uma metodologia para cálculo de variáveis de dano que apresentam as seguintes vantagens: baseia-se nos modelos de Lubliner *et al.* (1989) e Lee e Fenves (1998); não necessita de calibração com resultados experimentais; possui implementação simples; e os resultados não apresentam uma sensibilidade de malha (desde que seja empregada uma estratégia para evitar a dependência de malha). Definem-se as variáveis de dano para compressão e tração

$$d_c = \frac{1}{g_c} \int_0^{\varepsilon_c^{ch}} \sigma_c d\varepsilon_c^{ch}, \quad d_t = \frac{1}{g_t} \int_0^{\varepsilon_c^{ck}} \sigma_t d\varepsilon_c^{ck}. \quad (24)$$

onde ε_c^{ch} e ε_c^{ck} correspondem à deformação de esmagamento e fissuração, respectivamente. Os coeficientes normalizadores g_c e g_t representam a dissipação de energia por unidade de volume dissipada pelo dano durante todo o processo de deterioração e são representados na Figura 1 por

$$g_c = \int_0^{\infty} \sigma_c d\varepsilon_c^{ch}, \quad g_t = \int_0^{\infty} \sigma_t d\varepsilon_c^{ck}. \quad (25)$$

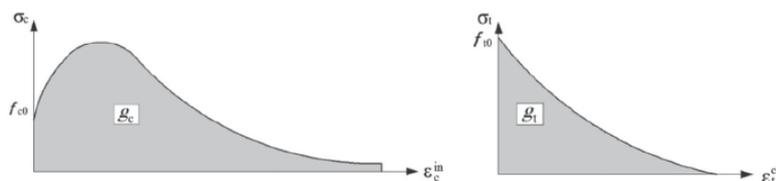


Figura 1. Energias dissipadas pelo dano na (a) compressão e na (b) tração.

Fonte: (ALFARAH *et al.*, 2017)

As energias por unidade de área e de volume se relacionam por $g_c = G_{ch}/l_{eq}$ e $g_t = G_f/l_{eq}$; onde G_{ch} e G_f são parâmetros do material definidos como energias de esmagamento e de fratura e l_{eq} é o comprimento característico do elemento finito. Lubliner *et al.* (1989) relacionam as tensões de compressão e tração com as deformações de esmagamento e fissuração, respectivamente, através de

$$\sigma_c = f_{c0} \left[(1 + a_c) \exp(-b_c \varepsilon_c^{ch}) - a_c \exp(-2b_c \varepsilon_c^{ch}) \right]. \quad (26)$$

$$\sigma_t = f_{t0} \left[(1 + a_t) \exp(-b_t \varepsilon_c^{ck}) - a_t \exp(-2b_t \varepsilon_c^{ck}) \right]. \quad (27)$$

onde f_{c0} e f_{t0} são as tensões de compressão e tração nos pontos sem esmagamento ($\varepsilon_c^{ch} = 0$) e no início da fissuração ($\varepsilon_c^{ck} = 0$), respectivamente. Os parâmetros a_c , b_c , a_t e b_t são coeficientes adimensionais a serem determinados. A partir da substituição das Equações 2.86 e 2.87 na Equação 2.85, chega-se a

$$g_c = \frac{f_{c0}}{b_c} \left(1 + \frac{a_c}{2} \right), \quad g_t = \frac{f_{t0}}{b_t} \left(1 + \frac{a_t}{2} \right). \quad (28)$$

Alfarah *et al.* (2017) determinam os coeficiente a_c , b_c , a_t e b_t como sendo

$$a_c = 2 \frac{f_{cm}}{f_{c0}} - 1 + 2 \sqrt{\left(\frac{f_{cm}}{f_{c0}} \right)^2 - \frac{f_{cm}}{f_{c0}}}, \quad a_t = 2 \frac{f_{tm}}{f_{t0}} - 1 + 2 \sqrt{\left(\frac{f_{tm}}{f_{t0}} \right)^2 - \frac{f_{tm}}{f_{t0}}}. \quad (29)$$

$$b_c = \frac{f_{c0} l_{eq}}{G_{ch}} \left(1 + \frac{a_c}{2}\right), \quad b_t = \frac{f_{t0} l_{eq}}{G_{ck}} \left(1 + \frac{a_t}{2}\right). \quad (30)$$

onde os parâmetros f_{cm} e f_{tm} são definidos no Código CEB-FIP (2010). As funções propostas para o dano na compressão e na tração são

$$d_c = 1 - \frac{1}{2 + a_c} \left[2(1 + a_c) \exp(-b_c \varepsilon_c^{ch}) - a_c \exp(-2b_c \varepsilon_c^{ch}) \right]. \quad (31)$$

$$d_t = 1 - \frac{1}{2 + a_t} \left[2(1 + a_t) \exp(-b_t \varepsilon_t^{ck}) - a_t \exp(-2b_t \varepsilon_t^{ck}) \right]. \quad (32)$$

3.3 Comportamento uniaxial do concreto à tração e à compressão

Alguns autores definem diferentes formulações para esse comportamento, com destaque para Kmieciak e Kamiński (2011), que relacionam diferentes curvas tensão-deformação do concreto, a citar Wang e Hsu (2001); Majewski (2003); Arduini *et al.* (2007); Coronado e Lopez (2006); e a parábola de Madrid, muito aceita no CEB-FIP (2010). A Figura 2 representa as curvas de tensão-deformação uniaxiais do concreto quando submetido à compressão e à tração de acordo com o CEB-FIP (2010). O código ainda define os seguintes parâmetros

$$\varepsilon_{cm} = 0,0022; \quad f_{cm} = f_{ck} + 8; \quad f_{tm} = 0.3016 f_{ck}^{2/3}. \quad (33)$$

onde f_{ck} é a resistência característica do concreto à compressão e as tensões são dispostas em MPa.

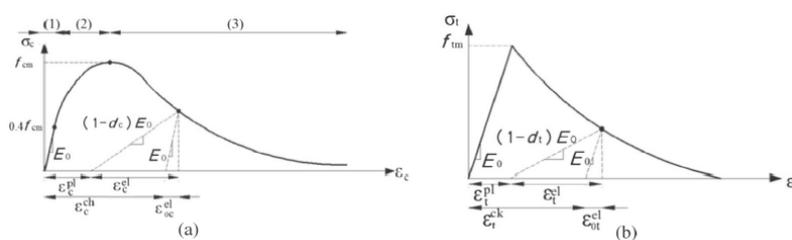


Figura 2. Curva uniaxial do concreto sujeito à (a) compressão e (b) tração.

Na compressão, a curva do concreto apresenta 3 segmentos (Figura 2a). O primeiro é linear e ocorre até σ_{cm} atingir $0,40f_{cm}$

$$\sigma_{c(1)} = E_0 \varepsilon_c. \quad (34)$$

O segundo segmento é quadrático, representa o encruamento do concreto e ocorre entre $0,40f_{cm}$ e f_{cm}

$$\sigma_{c(2)} = \frac{E_{ci} \frac{\varepsilon_c}{f_{cm}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm}} \right)^2}{1 + \left(E_{ci} \frac{\varepsilon_{cm}}{f_{cm}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm}}} f_{cm}. \quad (35)$$

O CEB-FIP (2010) define

$$E_{ci} = 10000 f_{cm}^{1/3}; \quad E_0 = (0,8 + 0,2 f_{cm}/88) E_{ci}. \quad (36)$$

onde E_{ci} e E_0 são os módulos de deformação do concreto para $\sigma=0$ e secante correspondente a $0,40 f_{cm}$, respectivamente.

O terceiro e último segmento corresponde ao amolecimento do concreto e é dado por

$$\sigma_{c(3)} = \left(\frac{2 + \gamma_c f_{cm} \varepsilon_{cm}}{2 f_{cm}} - \gamma_c \varepsilon_c + \frac{\varepsilon_c^2 \gamma_c}{2 \varepsilon_{cm}} \right)^{-1}. \quad (37)$$

$$\gamma_c = \pi^2 f_{cm} \varepsilon_{cm} / \left[2 \left[\frac{G_{ch}}{l_{eq}} - 0,5 f_{cm} \left(\varepsilon_{cm} (1-b) + b \frac{f_{cm}}{E_0} \right) \right]^2 \right]; \quad b = \frac{\varepsilon_c^{pl}}{\varepsilon_c^{ch}}. \quad (38)$$

onde G_{ch} é a energia de esmagamento por unidade de área e o comprimento equivalente do elemento depende do tamanho da malha, do tipo de elemento finito e a direção das fissuras (OLIVER, 1989; KRÄTZIG; PÖLLING, 2004). De acordo com o CEB-FIP (2010), a energia de fratura por unidade de área G_F pode ser calculada por

$$G_F = 0,073 f_{cm}^{0,18}. \quad (39)$$

Oller *et al.* (1990) define que a razão entre as energias de esmagamento e fratura pode ser considerada proporcional ao quadrado da razão entre f_{cm} e f_{tm} , portanto

$$G_{ch} = (f_{cm}/f_{tm})^2 G_F. \quad (40)$$

Quando submetido à tração (Figura 2b), a curva do concreto apresenta 2 segmentos. O primeiro é linear até a tensão σ atingir f_{tm} ($\sigma_{t(1)} = E_0 \varepsilon_t$), enquanto que o segundo representa o amolecimento do material após a abertura das microfissuras. Hordijk (1992) relaciona a tensão no amolecimento com a abertura de fissuras w na seguinte equação

$$\frac{\sigma_{t(2)}(w)}{f_{tm}} = \left[1 + \left(c_1 \frac{w}{w_c} \right)^3 \right] \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2). \quad (41)$$

onde $c_1=3$ e $c_2=6,93$; e w_c é a abertura crítica de fissura. Nota-se que $\sigma_{t(2)}(0)=f_m$ (início da abertura de fissuras) e $\sigma_{t(2)}(w_c)=0$, ou seja, w_c pode ser considerado a fratura do concreto e seu valor é dado por

$$w_c = 5,14G_F / f_m . \quad (42)$$

Alfarah *et al.* (2017) assumem que ocorre uma única fissura por elemento, não considerando o espaço de fissuras real, uma vez que essa premissa, em uma simulação global, é apropriada. Partindo dessa hipótese, é possível relacionar a abertura de fissuras com a deformação no amolecimento pela seguinte relação cinemática $\varepsilon_t = \varepsilon_{tm} + w/l_{eq}$.

Os parâmetros de entrada adotados para o CDP são os propostos por Sümer e Aktaş (2015) e Alfarah *et al.* (2017). Entretanto, há um grave problema com a utilização do segundo. Na obtenção das deformações plásticas são encontrados valores decrescentes (ou até mesmo negativos), o que impossibilita a compilação do ABAQUS. Esse problema é corrigido retirando-se os valores de dano que o ocasionam.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 Verificação da dependência de malha

Primeiramente, é realizado um teste para verificação da dependência de tamanho de malha do CDP para um concreto C25. O teste consiste em um cubo com lado de 200 mm sujeito à tração em sua face superior e simplesmente apoiado na face inferior. A aplicação da tração em cima é dada por deslocamento prescrito e é importante salientar que a condição de contorno na face de baixo não gera localização. Porém, em sua grande maioria, problemas de engenharia apresentam localização. Uma forma de simulá-la é utilizar uma tensão de escoamento um pouco menor em alguns elementos das malhas 2 e 3, fazendo com que plastifiquem e entrem no amolecimento (*softening*) antes dos demais. É utilizado o elemento C3D8R e são dispostas 3 malhas: um só elemento com lado de 200mm (malha 1); 64 elementos com lado de 50 mm (malha 2); e 512 elementos com lado de 25 mm (malha 3). A Figura 3 representa os dados de entrada para tensão, deformação e parâmetros de dano na tração e na compressão, fornecidos por Alfarah *et al.* (2017).

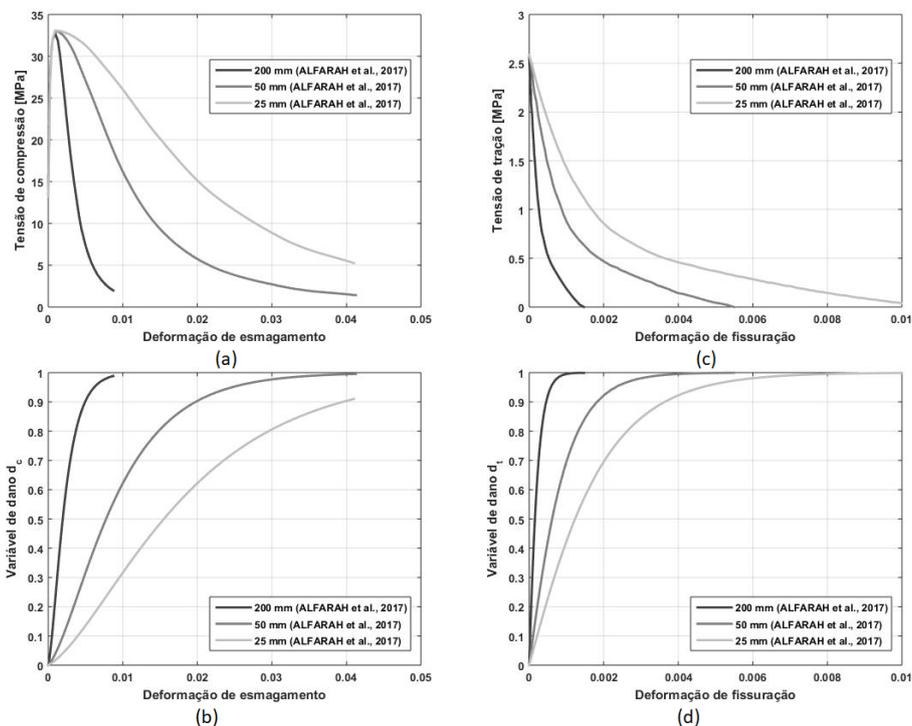


Figura 3. Parâmetros de entrada no ABAQUS® para (a) tensão deformação na compressão, (b) dano da compressão, (c) tensão deformação na tração e (d) dano na tração.

Fonte: adaptado de Alfarah *et al.* (2017).

O problema das deformações plásticas decrescentes (ou negativas) é evidenciado na Figura 4 e gera erro no ABAQUS, não permitindo a compilação do modelo. Para contornar esse problema, os valores de dano que geram essas deformações plásticas indesejadas foram omitidos.

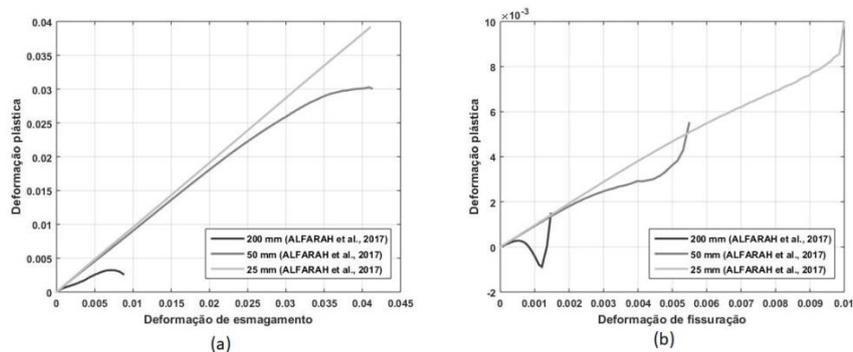


Figura 4. (a) Deformação de esmagamento por deformação plásticas (compressão) e (b) deformação de fissuração por deformação plástica (tração).

Fonte: o autor.

Alfarah *et al.* (2017) fornecem os seguintes parâmetros de entrada: $f_{b0}/f_{c0} = 1,16$, $K_c = 0,7$, $\Psi = 13^\circ$ e $\epsilon = 0,1$. Entretanto, não deixam claro o parâmetro de viscosidade. É realizado, então, um estudo da influência desse parâmetro, variando-o entre 0 e 0,01. Como na Malha 1 não há localização, apenas são dispostos os resultados das malhas 2 e 3. Assim, é possível plotar os gráficos da Figura 5. Percebe-se que, mesmo utilizando-se da metodologia proposta por Alfarah *et al.* (2017), as respostas não convergem.

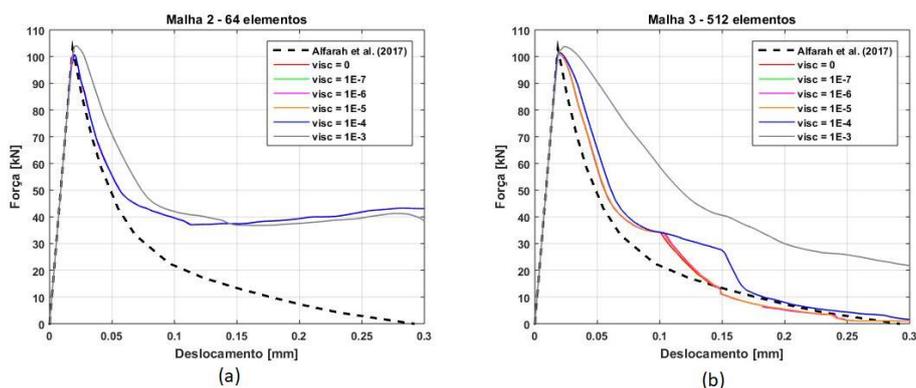


Figura 5. Força deslocamento com localização com diferentes parâmetros de viscosidade para (a) Malha 2 e (b) Malha 3.

4.2 Modelos de vigas tridimensionais

São modeladas vigas tridimensionais no ABAQUS utilizando os parâmetros propostos por Sümer e Aktaş (2015) e Alfarah *et al.* (2017). Essas vigas pertencem a estudos de ensaios de flexão pura realizados por Arduini *et al.* (1997), Benjeddou *et al.* (2007) e Sharif *et al.* (1994) e possuem dimensões de acordo com Figura 6.

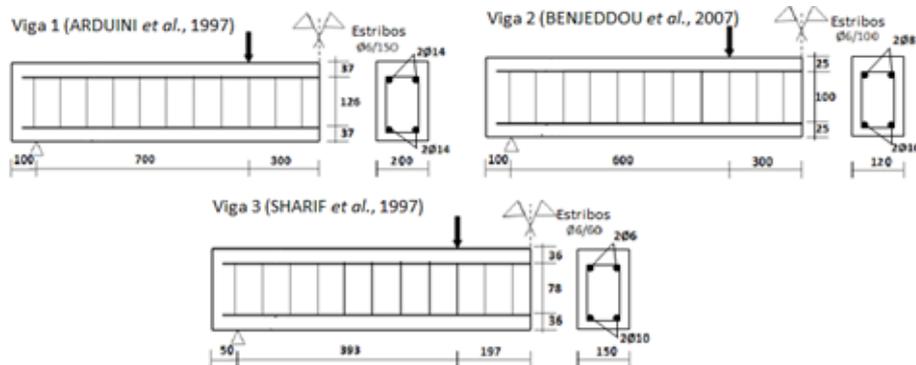


Figura 6. Geometria das vigas.

Fonte: adaptado de Sümer e Aktaş (2015).

Na análise em 2 dimensões são utilizados os elementos de deformação plana lineares com integração reduzida CPE4R. Na análise tridimensional, elementos



hexaédricos C3D20R. Além disso, são utilizados elementos lineares T2D2 (2D) e T3D3 (3D) para modelagem do aço, que entram como elemento embutido (*embedded element*) no concreto. O aço é considerado linear elástico e perfeitamente plástico, com limite de escoamento em f_y . São consideradas duas malhas, a Malha 1 com elemento médio de lado 50 mm e a Malha 2 25 mm. A Tabela 1 mostra os coeficientes de cada ensaio (onde não há registro, adotam-se as metodologias); são usados os valores *default* do ABAQUS para f_{b0}/f_{c0} , K_c e ϵ , sendo $\Psi = 30^\circ$ e o parâmetro de viscosidade 10^{-3} . Com isso, são plotados os gráficos das Figuras 7 e 8.

Tabela 1. Coeficientes de acordo com Sümer e Aktaş (2015) (CDP1)

Viga	E (MPa)	f_{ck} (MPa)	f_y (MPa)	f_{ct}
1	25000	33	400	2,60
2	30000	21	400	1,80
3	27000	37,7	450	–

Percebe-se que, para a Viga 1, o refinamento da malha e a adoção de uma análise tridimensional aproximaram os resultados obtidos do experimental. A metodologia de Alfarah *et al.* (2017) apresentou melhores resultados, entretanto, nenhum resultado pode ser considerado satisfatório. Entretanto, as respostas obtidas por Sümer e Aktaş (2015) são bastante semelhantes. Na Viga 2, os resultados foram mais divergentes após refinamento da malha, enquanto que a metodologia de Sümer e Aktaş (2015) se aproxima mais dos resultados experimentais. Os resultados obtidos pelo autor são próximos. Os resultados em 2D se assemelham mais e nessa viga os resultados se mostram mais satisfatórios. Para finalizar, na Viga 3 há uma aproximação dos resultados com o refinamento de malha para as modelagens bidimensionais, principalmente nos resultados de Sümer e Aktaş (2015), mas o mesmo não ocorre para as vigas tridimensionais. A metodologia de Sümer e Aktaş (2015) se mostra novamente mais eficaz, entretanto as análises tridimensionais não são satisfatórias. Esses resultados não tão bons podem ser creditados à dificuldade de obtenção de parâmetros dos ensaios, como tensão de tração, ângulo de dilatância e diâmetro máximo de agregado utilizado no traço do concreto. Além disso, os resultados obtidos adotando a metodologia de Sümer e Aktaş (2015) não são idênticos aos resultados obtidos pelos autores e isso pode ser justificado por eles não terem deixado claros alguns parâmetros que adotaram, como o de viscosidade.

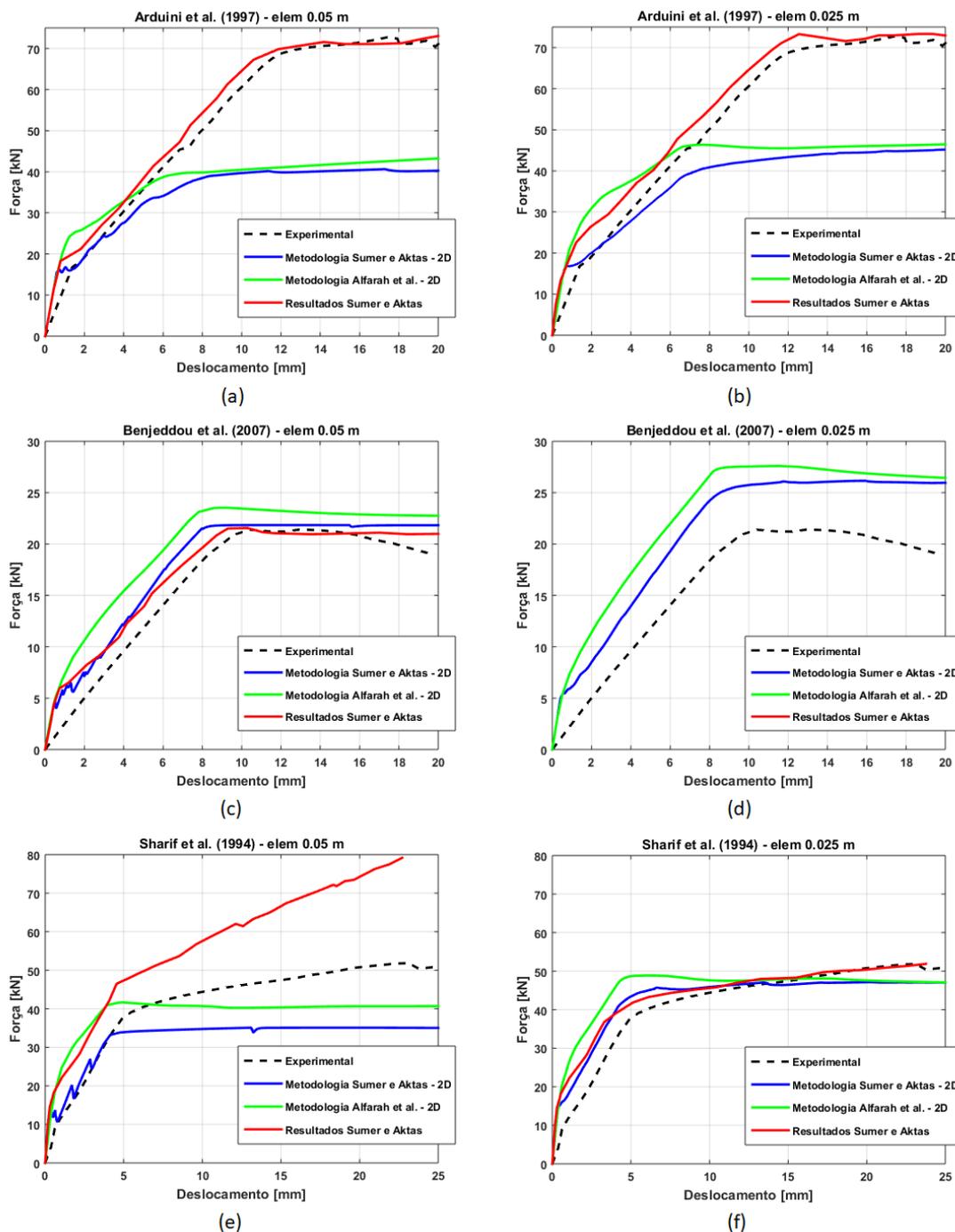


Figura 7. Gráficos de força x deslocamento das análises 2D para (a) Viga 1 (malha 1), (b) Viga 1 (malha 2), (c) Viga 2 (malha 1), (d) Viga 2 (malha 2), (e) Viga 3 (malha 1) e (f) Viga 3 (malha 2).

Fonte: o autor.

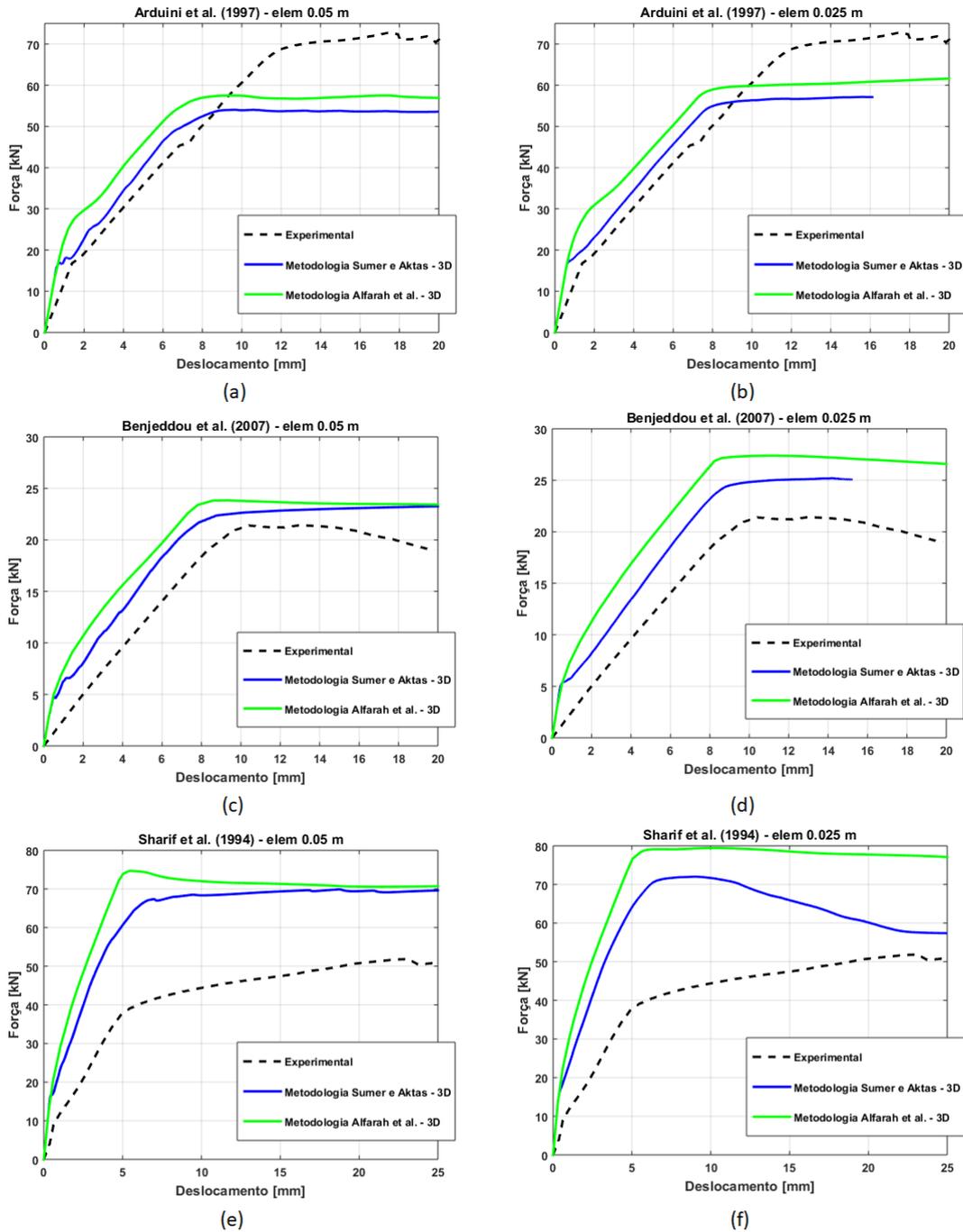


Figura 8. Gráficos de força x deslocamento das análises 3D para (a) Viga 1 (malha 1), (b) Viga 1 (malha 2), (c) Viga 2 (malha 1), (d) Viga 2 (malha 2), (e) Viga 3 (malha 1) e (f) Viga 3 (malha 2).

Fonte: o autor.

5 CONCLUSÃO

Conclui-se que o CDP é um modelo que pode ser muito útil para a obtenção do comportamento do concreto, porém deve ser cuidadosamente utilizado. Atinge-se o objetivo de deixar clara a utilização do modelo e o funcionamento de seus parâmetros, bem como maneiras de obtê-los. É necessário que todos os parâmetros estejam condizentes para que o programa forneça resultados semelhantes aos da realidade.

Os parâmetros adotados por Sümer e Aktaş (2015) e Alfarah *et al.* (2017) não parecem suprir completamente o esperado do comportamento experimental de uma viga de concreto armado. Na Viga 2, eles se mostram eficientes tanto na análise 2D quanto na 3D. No caso da Viga 3, apenas na análise 2D, enquanto que na Viga 1 nenhuma análise apresenta resultados satisfatórios. Isso pode ser explicado devido à dificuldade de obtenção de parâmetros dos ensaios, como ângulo de dilatação.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

REFERÊNCIAS

- Alfarah, B.; López-Almansa, F.; Oller, S., 2017. New methodology for calculating damage variables evolution in Plastic Damage Model for RC structures. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 132, p. 70–86.
- Arduini, M.; Di Tommaso, A.; Nanni, A., 1997. Brittle failure in FRP plate and sheet bonded beams. *ACI Structural Journal*, v. 94, n. 4, p. 363-370.
- Benjeddou, O.; Ouezdou, M. B.; Bedday, A., 2007. Damaged RC beams repaired by bonding of CFRP laminates. *Construction and building materials*, v. 21, n. 6, p. 1301-1310.
- CEB-FIP. *CEB-FIP Model Code 2010*. London, LDN, UK: Thomas Telford, 2010.
- Fish, J.; Belytschko, T., 2007. *A first course in finite elements*. John Wiley.
- Hordijk, D. A., 1992. Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experiments, modelling and analyses. *Heron*, v. 37, n. 1.
- Jankowiak, T.; Lodygowski, T., 2005 Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model. *Foundations of civil and environmental engineering*, v. 6, n. 1, p. 53-69.
- Krätzig, W. B.; Pölling, R., 2004. An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. *Computers & structures*, Elsevier, v. 82, n. 15-16, p. 1201–1215.
- Kupfer, H.; Hilsdorf, H. K.; Rusch, H., 1969. Behavior of concrete under biaxial stresses. In: *ACI Journal*. p. 656-666.
- Lee, J.; Fenves, G. L., 1998. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 124, n. 8, p. 892–900.



- Lubliner, J.; Oliver, J.; Oller, S.; Onate, E., 1989. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of solids and structures*, Elsevier, v. 25, n. 3, p. 299–326.
- Matias, B. S. *Modelos constitutivos para o estudo de colapso progressivo de estruturas de concreto via análise dinâmica não linear*. 2018. 154 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil, 2018.
- Mazars, J.; Hamon, F.; Grange, S., 2015. A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. *Materials and Structures*, RILEM, v. 48, n. 11, p. 3779–3793.
- Mazars, J.; Pijaudier-Cabot, G., 1989. Continuum damage theory - application do concrete. *J. Eng. Mech.*, v. 115, n. 2, p. 345–365.
- Menin, R. C. G.; Trautwein, L. M.; Bittencourt, T. N., 2009. Smearred crack models for reinforced concrete beams by finite element method. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 2, n. 2, p. 166-200.
- Oliver, J., 1989 A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. 461–474.
- Oller, S.; Onate, E.; Oliver, J.; Lubliner, J., 1990. Finite element nonlinear analysis of concrete structures using a “plastic-damage model”. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 35, n. 1-3, p. 219–231.
- Sharif, A.; Al-Sulaimani, G. J.; Basunbul, I. A.; Baluch, M. H.; & Ghaleb, B. N., 1994. Strengthening of initially loaded reinforced concrete beams using FRP plates. *Structural Journal*, v. 91, n. 2, p. 160-168.
- Sümer, Y.; Aktaş, M., 2015. Defining parameters for concrete damage plasticity model. *Challenge Journal of Structural Mechanics*, v. 1, n. 3, p. 149-155.
- Vecchio, F., 2000. Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation, *ASCE, Journal of Structural Engineering*, v.126, n.9; p.1070-1077.
- Vecchio, F.J. e Collins, M.P., 1986. The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subject to Shear, *ACI Journal*, v.83, n.2; pp. 219-231.