



SÉRIES DE FOURIER E SUAS DIVERSAS APLICAÇÕES

TORRES, Luiz Fernando Setubal¹; **JUNIOR**, José Carlos de Oliveira²;

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo compreender as Séries de Fourier e suas diversas aplicações na Matemática e em áreas afins. As Séries de Fourier, desenvolvidas por Jean-Baptiste Joseph Fourier, permitem representar funções periódicas como somas infinitas de senos e cossenos, constituindo um dos mais importantes instrumentos da Análise Matemática. A pesquisa teve como foco principal o estudo e a demonstração do Teorema de Fourier, o qual afirma que toda função seccionalmente diferenciável e periódica pode ser expressa como uma série trigonométrica convergente. A metodologia utilizada foi qualitativa e bibliográfica, com base em obras de referência como Folland (1992), Lima (2000, 2009) e Figueiredo (2008), além de textos clássicos de análise moderna. Foram estudados conceitos fundamentais como convergência de séries, produto interno, ortogonalidade em espaços de Hilbert e o Teorema de Parseval. Os resultados evidenciam a amplitude das aplicações das Séries de Fourier em problemas físicos e de engenharia, especialmente na resolução da equação do calor, em análise de vibrações, óptica e processamento de sinais. Além disso, como aplicação prática, foi possível determinar o valor exato de algumas séries infinitas por meio da expansão em séries de Fourier, demonstrando o poder analítico da teoria.

Palavras-chave: Séries de Fourier. Teorema de Parseval. Teorema de Fourier.

I. INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

A Matemática, com suas múltiplas aplicações e elevado grau de abstração, desempenha papel fundamental no desenvolvimento científico e tecnológico. Entre suas diversas áreas, destaca-se a Análise, ramo responsável por formalizar conceitos

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica (PIBIC/FAPT). Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. luiz.torres@ufnt.edu.br

2 Professor orientador. Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. jose.junior@ufnt.edu.br.



como limites, derivadas, integrais e séries, que constituem a base para a compreensão de inúmeros fenômenos naturais e tecnológicos. Dentro desse contexto, as Séries de Fourier ocupam posição de destaque por permitirem representar funções periódicas como combinações infinitas de senos e cossenos, estabelecendo uma ponte entre a teoria matemática e suas aplicações práticas.

Este trabalho insere-se na área temática de Ciências Exatas e da Terra, tendo como área secundária a Análise, e tem como principal objetivo estudar as Séries de Fourier e suas aplicações em diferentes contextos. O estudo enfatiza o Teorema de Fourier, que garante que toda função seccionalmente diferenciável e periódica pode ser expressa como uma série trigonométrica convergente.

Além do estudo teórico, a pesquisa aborda a relação entre as Séries de Fourier e outras ciências, bem como suas aplicações na resolução de equações diferenciais, na análise de sinais e na determinação de valores exatos de séries infinitas. Assim, o trabalho busca evidenciar a importância das Séries de Fourier como ferramenta essencial na Matemática Aplicada e em diversas áreas da ciência.

II. BASE TEÓRICA

As Séries de Fourier foram introduzidas por Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) durante o estudo da equação do calor, uma equação diferencial parcial que descreve a propagação da temperatura em um corpo sólido. Segundo Folland (1992), essa teoria permitiu representar funções periódicas como somas infinitas de senos e cossenos, constituindo um marco na Análise Matemática e na formulação de métodos de solução para equações diferenciais.

De acordo com Figueiredo (2008) e Lima (2000, 2009), as Séries de Fourier fundamentam-se em conceitos de convergência de funções, produto interno e ortogonalidade em espaços de Hilbert, elementos essenciais para compreender o



comportamento das séries infinitas e a relação entre suas parcelas e o valor da função representada.

Outros autores, como Whittaker e Watson (1920) e Katznelson (1976), destacam a importância do Teorema de Parseval, que estabelece a equivalência entre a energia total de uma função e a soma dos quadrados de seus coeficientes de Fourier, além de oferecer uma ferramenta poderosa para o cálculo exato de séries infinitas.

Assim, a base teórica do trabalho apoia-se na Análise Matemática clássica e moderna, que fornece o suporte necessário para compreender o Teorema de Fourier e suas amplas aplicações em matemática, física e engenharia.

III. OBJETIVOS

O trabalho teve como objetivo compreender as Séries de Fourier e demonstrar o Teorema de Fourier, que afirma que toda função seccionalmente diferenciável e periódica pode ser expressa como uma série infinita de senos e cossenos.

Entre os objetivos específicos, destacaram-se o estudo da convergência de séries de funções, do produto interno e da ortogonalidade em espaços de Hilbert, bem como do Teorema de Parseval e de suas aplicações. O projeto também buscou apresentar exemplos práticos das Séries de Fourier em contextos da engenharia, física e matemática aplicada, além de determinar o valor exato de algumas séries infinitas por meio de sua expansão em séries trigonométricas.

IV. METODOLOGIA

A pesquisa desenvolveu-se sob uma abordagem qualitativa e bibliográfica, buscando compreender as Séries de Fourier a partir de fundamentos teóricos e demonstrações matemáticas. O caráter qualitativo permitiu uma análise aprofundada dos conceitos envolvidos, privilegiando a interpretação e o raciocínio dedutivo,



enquanto a natureza bibliográfica baseou-se no estudo de obras consagradas da Análise Matemática.

Foram consultadas referências clássicas e modernas, como Folland (1992), Figueiredo (2008), Lima (2009), Whittaker e Watson (1920) e Katznelson (1976), que abordam os princípios da análise harmônica, ortogonalidade, convergência de séries e o Teorema de Parseval.

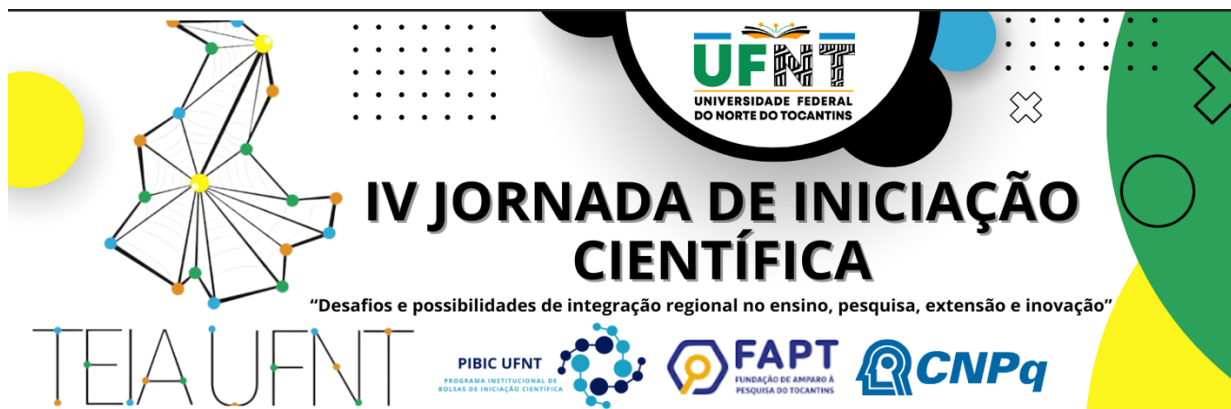
As etapas da pesquisa incluíram o levantamento e leitura das bibliografias selecionadas, o estudo dos conceitos de produto interno e ortogonalidade em espaços de Hilbert, a definição e cálculo dos coeficientes de Fourier e, por fim, a demonstração do Teorema de Fourier. Também foram analisadas aplicações diretas, como o cálculo do valor exato de séries infinitas e a representação de fenômenos físicos periódicos.

Essa metodologia possibilitou a compreensão teórica e prática das Séries de Fourier, consolidando sua importância na Matemática e em diversas áreas das Ciências Exatas e da Terra.

V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Durante o desenvolvimento da pesquisa, foi estudado todo o aparato teórico necessário para compreender o Teorema de Fourier, incluindo os conceitos de convergência de séries de funções, produto interno, ortogonalidade em espaços de Hilbert e o Teorema de Parseval. Esses fundamentos permitiram compreender com rigor a estrutura das Séries de Fourier e suas propriedades analíticas.

A partir dessa base, foi possível compreender o Teorema de Fourier, que estabelece que toda função seccionalmente diferenciável e periódica pode ser representada por uma série infinita de senos e cossenos. O estudo aprofundado das condições de convergência e da interpretação geométrica dos coeficientes de Fourier



possibilitou relacionar a teoria com aplicações concretas em problemas de física e engenharia.

Além disso, utilizando-se das propriedades das Séries de Fourier e do Teorema de Parseval, conseguimos determinar o valor exato de algumas séries infinitas, como a série $\sum(1/n^2)$, cujo somatório é $\pi^2/6$, entre outras de natureza semelhante. Esses resultados reforçaram a eficácia da teoria de Fourier como ferramenta analítica para a resolução de problemas que envolvem funções periódicas e séries numéricas.

VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo desenvolvido permitiu compreender de forma ampla e fundamentada as Séries de Fourier e o Teorema de Fourier, evidenciando sua importância teórica e prática dentro da Matemática e das Ciências Exatas e da Terra. A pesquisa mostrou que é possível representar funções periódicas como somas infinitas de senos e cossenos, o que estabelece uma ponte entre a Análise Matemática e fenômenos reais, como ondas, vibrações e propagação de calor.

Ao longo do trabalho, foi estudado todo o aparato teórico necessário à demonstração do teorema, envolvendo conceitos de convergência, produto interno, ortogonalidade e o Teorema de Parseval. Esses fundamentos possibilitaram a determinação do valor exato de séries infinitas, como a série de $1/n^2$ e $1/n^4$, demonstrando o poder da teoria de Fourier na resolução de problemas clássicos da Análise.

Conclui-se que as Séries de Fourier constituem uma ferramenta essencial para a Matemática Aplicada, com aplicações que ultrapassam o campo teórico e se estendem à engenharia, física e tecnologia. O estudo reafirma a relevância dessa teoria como base para a compreensão e modelagem de fenômenos periódicos e para o avanço da Análise moderna.



VII. REFERÊNCIAS

FIGUEIREDO, D. G., **Análise I**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

FOLLAND, G. B., **Fourier Analysis and its Applications**, The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematical Series, Belmont, California, EUA, 1992.

KATZNELSON, Y., **An Introduction to Harmonic Analysis**, segunda edição corrigida, Dover Publications, Inc., Nova Iorque, EUA, 1976.

LIMA, E. L., **Curso de análise**. Volume 1, Projeto Euclides, SBM, Rio de Janeiro, 2009.

LUCENA, Antônio Eduardo Sena de. **FUNÇÕES PERIÓDICAS E QUASEPERIÓDICAS**. 2020. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Programa de Pós-Graduação em Matemática Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG). Universidade Federal da Campina Grande, Campina Grande. 2020.

PEREIRA, Renato Silva; HOLANDA, Angelo Roncalli F. **INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES DA FÍSICA MATEMÁTICA**. CNPq. Campina Grande. VI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA CAMPINA GRANDE. 10 p, 2009.

WHITTAKER, E. T., WATSON, G. N., **A Course of Modern Analysis**, 3ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1920.

VIII. AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Universidade Federal do Norte do Tocantins, campus de Araguaína, pela estrutura disponibilizada para a realização desta pesquisa. Agradecemos a FAPT pelo apoio financeiro.