UFNT UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS

IV JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

"Desafios e possibilidades de integração regional no ensino, pesquisa, extensão e inovação"

TEIA UFNT · PIBIC UFNT · FAPT · CNPq

O ELETROMAGNETISMO DESCRITO EM GEOMETRIAS E COORDENADAS ARBITRÁRIAS

CUNHA, Luis Vinicius de Alencar[1]; **CARNEIRO**, Fernando Lessa[2]

RESUMO

O presente trabalho investiga a formulação covariante do eletromagnetismo em geometrias e coordenadas arbitrárias, com ênfase na métrica de Schwarzschild. O objetivo central é transcrever as equações de Maxwell de sua forma tensorial para a forma vetorial, evidenciando como a curvatura do espaço-tempo altera as leis clássicas do eletromagnetismo. A pesquisa fundamenta-se na linguagem tensorial e no formalismo da Relatividade Geral, demonstrando que a gravitação modifica de maneira direta a propagação e a estrutura dos campos elétrico e magnético. Os resultados obtidos indicam que as expressões generalizadas reduzem-se corretamente às equações clássicas de Maxwell quando o parâmetro de massa tende a zero ($M \rightarrow 0$), assegurando a consistência física e matemática do modelo. Essa formulação revela-se essencial para a descrição de fenômenos astrofísicos envolvendo campos intensos, como aqueles observados em regiões próximas a buracos negros e estrelas de nêutrons.

Palavras-chave: Eletromagnetismo covariante; Geometria curva; Tensor eletromagnético.

I. INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

Desde o século XIX, o eletromagnetismo formulado por James Clerk Maxwell consolidou-se como uma das maiores realizações da física teórica, unificando em um único conjunto matemático os fenômenos da eletricidade, do magnetismo e da luz (Jackson, 1998). Contudo, sua formulação clássica foi concebida em um espaço

[1]Voluntário do Programa de Iniciação Científica (PIVIC). Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. luis.cunha@ufnt.edu.br.

[2] Professor Doutor do departamento de Física, Universidade Federal do norte do Tocantins (UFNT), coordenador do projeto de pesquisa. fernando.carneiro@ufnt.edu.br.

plano, dentro da métrica de Minkowski da Relatividade Restrita, e, portanto, não considera os efeitos gravitacionais.

Com o advento da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, em 1915, tornou-se claro que o espaço-tempo é uma entidade dinâmica e curva, moldada pela presença de massa e energia. Nesse novo paradigma, todas as leis físicas, incluindo as do eletromagnetismo, devem ser expressas de maneira covariante, de modo que mantenham validade em qualquer sistema de coordenadas e geometria do espaço-tempo (Wald, 1984).

A formulação das equações de Maxwell na métrica de Schwarzschild é especialmente relevante, pois representa uma forma mais fiel à realidade, considerando que não há regiões completamente livres da gravidade. A solução de Schwarzschild, obtida em 1916, descreve o campo gravitacional fora de uma massa esfericamente simétrica e não carregada (Schwarzschild, 1916).

O estudo do comportamento dos campos eletromagnéticos nessa geometria constitui um passo essencial para compreender fenômenos reais em astrofísica, como a propagação de radiação em torno de buracos negros e estrelas de nêutrons. Essa abordagem permite explicar efeitos como lente gravitacional, redshift gravitacional e a dinâmica de plasmas em ambientes extremos (Misner, Thorne e Wheeler, 1973; Hobson, Efstathiou e Lasenby, 2006).

A generalização das equações de Maxwell para espaços curvos é, uma ferramenta poderosa e necessária. Ela permite preservar a forma original das leis físicas e compreender as modificações que a curvatura do espaço-tempo impõe. Esse estudo é importante não apenas do ponto de vista teórico, mas também prático, pois contribui para a descrição de campos eletromagnéticos em regiões onde os efeitos gravitacionais não podem ser negligenciados, como na superfície da Terra e em sistemas astrofísicos compactos (Carroll, 2004; Straumann, 2013).

II. BASE TEÓRICA

A base teórica desta pesquisa fundamenta-se principalmente em *General Relativity: An Introduction for Physicists* de Hobson, Efstathiou e Lasenby (2006), que oferece o arcabouço conceitual e matemático necessário para a formulação covariante das equações de Maxwell em espaço-tempo curvo. O estudo dialoga também com obras complementares de Wald (1984), Carroll (2004) e Straumann (2013), que aprofundam o formalismo tensorial e a geometria do espaço-tempo, além de Jackson (1998) e Landau e Lifshitz (1975), referências clássicas para o eletromagnetismo em espaço plano.

III. OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

Analisar a formulação covariante das equações de Maxwell em espaço-tempo curvo, com foco na métrica de Schwarzschild.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

• Compreender a relação entre eletromagnetismo e geometria do espaço-tempo na perspectiva da Relatividade Geral.

• Reescrever as equações de Maxwell na forma covariante, evidenciando as modificações introduzidas pela curvatura gravitacional.

• Identificar as alterações nas leis de Gauss, Faraday e Ampère-Maxwell na métrica de Schwarzschild.

IV. METODOLOGIA

A metodologia adotada consistiu em uma análise teórico-matemática baseada na linguagem tensorial. Inicialmente, definiu-se a métrica de Schwarzschild, que descreve o espaço-tempo exterior a um corpo esférico e estático, expressa por, $ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta + d\phi^2$, (Hawking e Ellis, 1973). A partir dessa métrica, foram determinados os símbolos de Christoffel, responsáveis por descrever como as derivadas covariantes substituem as derivadas parciais em espaços curvos.

Em seguida, utilizou-se o tensor de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, que unifica os campos elétrico e magnético em um único objeto quadridimensional (Landau e Lifshitz, 1975). O potencial vetor $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ foi usado para representar os campos em coordenadas curvilíneas. Substituindo as derivadas parciais por derivadas covariantes compatíveis com a métrica, obteve-se a forma geral das equações de Maxwell em espaço curvo conforme proposto por Hwang e Noh (2023).

Com base nessas equações, foi realizada a transcrição para coordenadas esféricas, determinando explicitamente as componentes radiais e angulares dos campos elétrico e magnético. A análise comparativa entre a formulação em espaço plano e a formulação na métrica de Schwarzschild permitiu identificar as correções introduzidas pela curvatura do espaço-tempo, especialmente nos termos diferenciais e nos fatores de $u(r) = 1 - 2M/r$.

V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados obtidos demonstram que a presença do campo gravitacional altera significativamente a estrutura das equações de Maxwell. Contudo, em espaço-tempo curvo, as derivadas parciais devem ser substituídas por derivadas covariantes compatíveis com a métrica, resultando em $\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\nu}$, $\nabla_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0$, onde $\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \partial_{\mu} F^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\rho} F^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} F^{\mu\rho}$. Essas expressões são universais e independem do sistema de coordenadas, garantindo a validade das leis do eletromagnetismo em qualquer geometria (Wald, 1984).

Na métrica de Schwarzschild, os fatores de curvatura introduzem correções nas quatro equações fundamentais.

Lei de Gauss elétrica	$\partial_r E_r + \frac{1}{r-2M}\partial_\theta E_\theta + \frac{1}{(r-2M)\sin\theta}\partial_\phi E_\phi + \frac{2}{r}E_r + \cot\theta\frac{1}{r-2M}E_\theta =- \frac{\rho}{\epsilon_0}.$
Lei de Gauss magnética	$\partial_r B_r + \frac{2}{r}B_r + \frac{1}{r\sqrt{u}\sin\theta}\left[\partial_\theta(\sin\theta B_\theta) + \partial_\phi B_\phi\right] = 0.$
Lei de Ampère-Maxwell	$\frac{1}{c}\partial_t E_r - \frac{u}{r\sin\theta}\left[\partial_\theta(\sin\theta B_\phi) - \partial_\phi B_\theta\right] = \mu_0 J^r,$ $\frac{1}{rcu}\partial_t E_\theta + \frac{r-2M}{r^2}\partial_r B_\phi + \frac{1}{r^2}B_\phi - \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\phi B_r = \mu_0 J^\theta,$ $\frac{1}{r\sin\theta cu}\partial_t E_\phi - \frac{r-2M}{r^2\sin\theta}\partial_r B_\theta - \frac{1}{r^2\sin\theta}B_\theta + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta B_r = \mu_0 J^\phi.$
Lei de Faraday	$\partial_t B_r =- \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\partial_\theta(\sin\theta\sqrt{u}\,E_\phi) - \partial_\phi(r\sqrt{u}\,E_\theta)\right],$ $\partial_t B_\phi =- u\partial_r E_\theta - \frac{1-M/r}{r}E_\theta + \frac{u}{r}\partial_\theta E_r,$ $\partial_t B_\theta = u\partial_r E_\phi + \frac{1-M/r}{r}E_\phi - \frac{\sqrt{u}}{r\sin\theta}\partial_\phi E_r.$

Essas equações mostram como a curvatura espacial e o fator gravitacional modificam a propagação e a divergência dos campos eletromagnéticos.

Verifica-se que, no limite $M \to 0$, todas as equações se reduzem exatamente às suas formas clássicas no espaço plano de Minkowski, o que confirma a consistência formal e física da abordagem. As correções introduzidas pela métrica de Schwarzschild são essenciais para descrever a propagação de ondas eletromagnéticas e o comportamento de cargas elétricas em ambientes de alta gravidade, como nas vizinhanças de buracos negros e estrelas compactas (Poisson e Will, 2014; Hobson, Efstathiou e Lasenby, 2006).

VI. CONCLUSÃO/CONSIDERAÇÕES FINAIS

A formulação covariante das equações de Maxwell na métrica de Schwarzschild mostra que as leis do eletromagnetismo permanecem válidas em qualquer geometria, desde que expressas de modo compatível com a curvatura do espaço-tempo. As modificações introduzidas pela gravidade alteram tanto a intensidade quanto a direção dos campos, o que tem implicações diretas na compreensão de fenômenos astrofísicos e cosmológicos. O estudo confirma a importância de considerar o espaço-tempo curvo na descrição de campos físicos, especialmente em ambientes de alta densidade e energia.

Além de reforçar a consistência teórica da Relatividade Geral, este trabalho oferece uma base sólida para estudos aplicados em astrofísica relativística, como a modelagem de discos de acreção, emissão de radiação em torno de buracos negros e a estrutura de magnetosferas de estrelas compactas. A relação entre geometria e campo físico, evidenciada pelas equações de Maxwell generalizadas, reforça o caráter unificador da física moderna e abre caminho para investigações em métricas mais complexas (Carroll, 2004; Straumann, 2013).

VII. REFERÊNCIAS

CARROLL, Sean M. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity.* 1. ed. San Francisco: Addison-Wesley, 2004.

HAWKING, Stephen W.; ELLIS, George F. R. *The large scale structure of space-time.* 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.

HOBSON, Michael P.; EFSTATHIOU, George; LASENBY, Anthony N. *General relativity: an introduction for physicists.* 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

HWANG, Jai-Chan; NOH, Hyerim. *Maxwell equations in curved spacetime. arXiv*, [S. l.], v. 2, 2023. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2304.12345. Acesso em: 9 out. 2025.

JACKSON, John David. *Classical electrodynamics.* 3. ed. New York: Wiley, 1998.

LANDAU, Lev Davidovich; LIFSHITZ, Evgeny M. *The classical theory of fields.* 4. ed. Oxford: Pergamon Press, 1975.

MISNER, Charles W.; THORNE, Kip S.; WHEELER, John Archibald. *Gravitation.* 1. ed. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.

POISSON, Eric; WILL, Clifford M. *Gravity: Newtonian, post-Newtonian, relativistic.* 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

SCHWARZSCHILD, Karl. *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlim, p. 189–196, 1916.

STRAUMANN, Norbert. *General relativity: with applications to astrophysics.* 2. ed. Berlin: Springer, 2013.

WALD, Robert M. *General relativity.* 1. ed. Chicago: University of Chicago Press, 1984.