20, 21, 22 DE OUTUBRO DE 2021
VIII SEMANA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO ICE
A TRANSVERSALIDADE DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES PARA A ÁREA DE EXATAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS UFAM

A aplicação de Gauss de gráficos mínimos no grupo de Heisenberg

Karolline Vitória Soares da Silva[1](IC), Inês Silva de Oliveira Padilha[2](PQ).

**karolspfc12@gmail.com*

in_math@ufam.edu.br

Palavras Chave: Grupo de Heisenberg, aplicação de Gauss e gráficos mínimos.

Introdução

A aplicação de Gauss usual para superfícies orientadas no espaço Euclidiano tridimensional representa um dos conceitos mais importantes em Geometria, uma vez que propriedades analíticas acabam refletindo em propriedades geométricas da superfície. Tal aplicação foi apresentada incialmente por Carl Friedrich Gauss e surgiu como uma ferramenta importante para obtenção de tais propriedades. Uma pergunta natural que surge é avaliar o que ocorre quando modificamos o ambiente ao qual a superfície está imersa e quais as propriedades geométricas que são importantes a considerar. Em 1995, por exemplo, Xiabo Liu[5] apresentou uma abordagem para a aplicação de Gauss de uma subvariedade em um grupo de Lie compacto G. Já em 2007, Isabel Fernández e Pablo Mira[6] estudaram propriedades geométricas de superfícies com projeção vertical regular e curvatura média constante em H^2 x R contida em L^4. Nesta pesquisa buscamos investigar algumas destas propriedades considerando superfícies imersas no grupo de Heisenberg (H^3). Em particular, analisamos a aplicação de Gauss e alguns resultados envolvendo gráficos mínimos neste grupo. Ao longo do desenvolvimento deste projeto, estudamos as ferramentas necessárias para compreender a construção de tais superfícies nesse grupo de Lie, bem como os elementos geométricos associados. Tomamos como referência para este trabalho o artigo de Christiam Figueroa [4], que tem por título "The Gauss map of minimal graphs in the Heisenberg group". Para facilitar o estudo dos resultados nesse novo espaço, foi de suma importância aprender alguns conceitos e teoremas clássicos de Geometria Riemanniana[1,2,3] e Álgebra de Lie.

Material e Métodos

Para o desenvolvimento e acompanhamento da pesquisa foram realizados encontros virtuais semanais com a orientadora através do aplicativo de videoconferência Google Meet. Nestas reuniões discutimos os tópicos propostos no projeto e delimitamos os assuntos que seriam abordados posteriormente. Afim de uma melhor compreensão dos temas da pesquisa, foi sugerido pela orientadora videoaulas do curso de Geometria Riemanniana, ministradas pelo Professor Fernando Codá[3], disponibilizadas no canal do Youtube do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), além um estudo mais intenso das referências clássicas de Geometria Riemanniana[1,2] como base para o aprimoramento do projeto.

Resultados e Discussão

O grupo de Heisenberg, denotado por H_3, é um grupo de Lie nilpotente de step 2, cuja representação matricial é dada por:

$$H_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

A estrutura do grupo de Heisenberg é dada por

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)/2).$$

Definimos uma métrica invariante à esquerda ds^2 em H_3 'fazendo '

$$ds^2(u,v) = < dL_p^{-1} (u), dL_p^{-1} (v)>_{R^3}.$$

Assim, obtemos

$$ds^2(u,v) = <(u_1, u_2, u_3 + 1/2(xu_2 - yu_1)), (v_1, v_2, v_3 + 1/2(xv_2 - yv_1))>_{R^3}.$$

Segue que:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + ((y/2)dx - (x/2)dy + dz)^2.$$

Definição: Seja S uma hipersuperfície orientável em um grupo de Lie G de dimensão n, munido com uma métrica invariante à esquerda. A aplicação

$$\gamma: S \to S^{n-1} = \{v \in \mathbf{g};\ |v| = 1\},$$

onde $\gamma(p) = dL_p^{-1} \circ \eta(p)$, **g** é a álgebra de Lie de G e η o campo de vetores normal unitário de S, é chamada aplicação de Gauss.

Ao longo do desenvolvimento desta pesquisa de iniciação científica destacamos três resultados importantes:

Teorema: O plano vertical é a única superfície conexa em H_3 com a propriedade de que sua aplicação de Gauss é constante.

Prova: Seja S uma superfície parametrizada como o gráfico de uma função suave f(x,y). Considere uma base do espaço tangente de S dada por

$$X_x = E_1 + (f_x + y/2) \quad X_y = E_2 + (f_y - x/2)E_3.$$

Se existe $p \in S$ tal que $d\gamma_p \equiv 0$, então $dL_P^{-1}(T_P S)$ é uma subálgebra de Lie, o que é uma contradição, pois

$$[dL_p^{-1}(X_x), dL_p^{-1}(X_y)] = e_3.$$

Isto nos diz que $e_3 \in dL_p^{-1}(T_pS)$. Logo, existe $u \in T_pS$ tal que $dL_p^{-1}(u)=e_3$. Mas se $u=aX_x + bX_y$, então

$$dL_p^{-1}(u) = ae_1 + be_2 + e_3(a(f_x+y/2) + b(f_y-x/2))$$

Assim a= b = 0, o que é uma contradição pois e_3 é diferente de 0. Logo, não existem gráficos em H_3 de tal forma que a aplicação de Gauss seja constante.

Considere agora S sendo uma superfície vertical. Neste caso podemos considerá-la como uma superfície regrada dada pela parametrização

$$X(t,s) = (t, a(t), s), (t,s) \in U \subset R^2,$$

e sejam

$$X_t = (1, a'(t), 0) = E_1 + a'E_2 + (a - a't)E_3$$
$$X_s = (0,0,1) = E_3$$

a base associada a tal parametrização.

Temos que o campo normal unitário é dado por

$$\eta = (X_t \times X_s)/(||X_t \times X_s||) = (a'E_1 - E_2)/(\sqrt{(1 + a'^2)}) = (a'/(\sqrt{(1 + a'^2)})E_1 - (1/\sqrt{(1 + a')^2})E_2.$$

Observe que η é constante quando $a'(t)$ também o é, ou seja, $a(t)$ é uma função afim. Neste caso, S é um plano. Como $\gamma(p) = dL_p^{-1} \circ \eta\ (p)$ temos que γ é constante se, e somente se, η é constante.

Proposição: Seja S uma superfície em H_3. Então para todo $p \in S$, temos que S é vertical em p ou é, localmente em p, o gráfico de uma função diferenciável f.

Prova: Seja S uma superfície em H_3 e $p \in S$. Se f for localmente um gráfico em p, não há nada a fazer.

Suponha agora que S é, localmente, da forma $G_1(f)$. Ou seja, sua parametrização é dada por

$$X(t,s) = (f(t,s),t,s),$$

sendo,

$$X_t = (f_t, 1, 0) = f_tE_1 + E_2 + (tf_t/2 - f/2)E_3$$
$$X_s = (f_s, 0,1) = f_sE_1 + (1 + (tf_s/2)E_3).$$

Considerando o ponto p da forma $p = (f(t_0,s_0), t_0,s_0)$, temos que $E_3(p) \in T_pS$ se, e somente se, $f_s(t_0,s_0) = 0$. Se S não é vertical em p, então $f_s(t_0,s_0)$ diferente de 0.

Se definirmos $F(t, x,s) = f(t,s) - x$, temos que se $x_0= f(t_0, s_0)$ então $F_s\ (t_0,\ x_0,\ s_0) = f_s\ (t_0,\ s_0)$ é diferente de 0. Pelo teorema da função implícita, existe uma função diferenciável g definida em B que está contido em R^2 tal que $F(t,x,g(x,t))=0$ no aberto B, sendo assim, $f(t,g(x,t))=x$ para todo $(x,t) \in B$. Se $(x,t) \in B$ e $s= g(x,t)$, temos que

$$(f(t,s), t,s) = (f(t, g(x,t)), t,s) = (x,t, g(x,t)).$$

Portanto, S é localmente o gráfico de g.

Teorema: Não há nenhuma superfície mínima compacta em H_3 (isto é, limitada e fechada).

Prova: Suponha que exista uma superfície S mínima e compacta (com bordo) em H_3. Considere a aplicação π_3: $S \to R$ como projeção na terceira coordenada, ou seja, $\pi_3(x,y,z) = z$ para todo $(x,y,z) \in S$. Temos que π_3 é contínua e como S é compacta, π_3 atinge seu máximo em S. Seja $p \in S$ um ponto de máximo para π_3 e P o plano dado como gráfico da função $g: R^2 \to R$ com $g(x,y) = c$ para todo $(x,y) \in R^2$. Sabemos que tal superfície é mínima, pois sua curvatura é identicamente nula ($g_{xx} = g_{yy} = g_{xy} = 0$).

Além disso, afirmamos que S está abaixo de P. De fato, como S é compacta, temos que $S \cap P$ é um fechado de P e consequentemente um fechado de H_3. Mas $p \in S \cap P$ o que significa que $S \cap P \neq \varnothing$. Se existir outro ponto $q \in S \cap P$, então S não é vertical em q e neste caso por resultados provados nesta teoria só pode então ser dada como gráfico de uma função diferenciável $f: \Omega \to R$.

Vamos definir $F: \gamma \to R$ com

$$F[u] = (1 + (u_y - x/2))u_{xx} - 2(u_y - x/2)(u_y+y/2)u_{xy} + (1+(u_x +y/2)^2)u_{yy}).$$

Observe que F não depende de u. Sendo assim $\partial F/\partial u =0$. Se considerarmos

$$u_1 = u_x + y/2 \ \text{ e } u_2 = u_y - x/2,$$

obtemos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\right) = \begin{pmatrix} 1+u_2^2 & -u_1u_2 \\ -u_1u_2 & 1+u_1^2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que P e S são superfícies mínimas, então F[f] = F[g]=0. Por hipótese, S está abaixo de P e assim $f \le g$. Se $f(q) = g(q)$, segue pelo princípio do máximo que S coincide com P em Ω. Logo, existe uma vizinhança V do ponto q tal que V está contido em $S \cap P$. Mas isto significa que $S \cap P$ também é um aberto de P e como P é conexo, segue que $P = S \cap P$. Entretanto P não é limitado, o que gera uma contradição, pois S é compacta. Dessa forma, a prova está completa e de fato mostramos que não existe superfície mínima compacta em H_3.

Conclusões

Para a etapa inicial do projeto, fez-se necessário um estudo mais aprofundado sobre alguns conceitos e resultados envolvendo grupos de Lie, visando à compreensão da estrutura diferenciável de H_3. Analisamos resultados relacionados a superfícies não-paramétricas neste espaço, calculando sua curvatura. Posteriormente, verificamos de modo geral como a aplicação de Gauss pode ser definida para uma hipersuperfície em um grupo de Lie e como o principio do máximo geométrico pode ser aplicado para mostrar que não existem superfícies mínimas compactas em H_3. Todas as técnicas utilizadas nas demonstrações foram essenciais para o bom desenvolvimento do projeto e consequentemente para uma melhor consolidação na minha formação acadêmica.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, pela saúde e sustento. À minha orientadora que nunca mediu esforços, seja para a melhoria deste projeto ou até mesmo para a vida pessoal, aconselhando, orientando e até puxando a orelha. À minha família e amigos que sempre incentivaram e apoiaram.

---

[1]BIEZUNER, Rodney Josué. *Notas de aula de Geometria Riemanniana*, 2017. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~rodney.

[2]CARMO, Manfredo P. do.. *Geometria Riemanniana*. IMPA, RJ, 2015.

[3]CODÁ, Fernando. *Programa de Doutorado: Geometria Riemanniana.* 2016. Disponível em: https://bit.ly/3dX2MUb.

[4]FIGUEROA, Christian. *The Gauss map of Minimal graphs in the Heisenberg group,* Journal of Geometry and Symmetry in Physics, junho, 2011.

[5]LIU, Xiabo. *Rigidity of the Gauss map in compact Lie group, Duke Math.* J.,1995.

[6]FERNANDÉZ, Izabel. MIRA, Pablo. *Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in H^2 x R*, Amer. J. Math,2007.