O CÁLCULO FRACIONÁRIO: ASPECTOS HISTÓRICOS E PERSPECTIVAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA

José Roberto Dantas da Silva[1]; **Davidson Martins Moreira**[2]
[1] Vínculo Institucional: Centro Universitário SENAI CIMATEC – (Mestrando em 2019, Bolsista); Tipo de projeto: Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB); dantas.joseroberto@gmail.com
[2] Professor Titular; Centro Universitário SENAI CIMATEC; Salvador - BA; davidson.moreira@fieb.org.br

RESUMO

Este trabalho apresenta alguns aspectos históricos e perspectivas na modelagem matemática envolvendo o surgimento e a aplicação do cálculo fracionário na modelagem de fenômenos físicos. O cálculo de ordem fracionária emerge das correspondências entre L'Hôpital e Leibniz, em 1695. Atualmente, é definido como a generalização do cálculo diferencial e integral e vem ampliando sua formulação conceitual e de aplicação, apesar de ainda apresentar alguns desafios a serem superados. Desta forma, o objetivo deste trabalho é mostrar uma breve introdução histórica, resolvendo um exemplo através do uso de derivada conformável, a qual tem sido aplicada em várias áreas do conhecimento.

PALAVRAS-CHAVE: cálculo fracionário; aspectos históricos; modelagem matemática; derivadas conformáveis.

1. INTRODUÇÃO

A literatura disponível sobre a teoria do cálculo tem como ponto pacífico que o desenvolvimento do cálculo clássico principia com os trabalhos de Newton (cálculo Newtoniano) e Leibniz (cálculo Liebniziano), seguindo princípios distintos, os quais definem as derivadas de ordem inteira. No entanto, o cálculo fracionário ou cálculo de ordem não inteira, segundo Oldham & Spanier (1974), tem origem na troca de correspondências entre L'Hôpital e Leibniz, datada de 1695, final do século XVII. Nesta carta, L'Hôpital argumenta sobre a possibilidade de uma derivada de ordem $\frac{1}{2}$, ou seja, "a ordem inteira de derivadas e integrais pode ser estendida, não apenas a frações, mas para todo número racional, irracional e complexo?" Leibniz, em sua resposta afirmou: "isso leva a um paradoxo, do qual um dia serão tiradas consequências úteis" (MILLER & ROSS, 1993), (BASSALO, 1996). Desta forma, foram postas as bases iniciais do cálculo de ordem não inteira, também conhecido como cálculo fracionário, com uma controversa disputa sobre a autoria de definições, particularmente envolvendo L'Hôpital e Bernouille.

Portanto, de forma bastante sucinta, o objetivo principal deste trabalho é mostrar uma breve introdução histórica e uma formulação mais recente (derivada conformável) sobre este tema antigo, mas que representa o estado da arte em termos de modelagem matemática, o qual tem sido aplicado nas mais diversas áreas do conhecimento.

2. METODOLOGIA

Apesar de ser um tema antigo, o primeiro problema solucionado com a aplicação do cálculo fracionário foi realizado por Niels Henrik Abel, matemático norueguês, em 1823, com a obtenção da solução de uma equação integral que surge na formulação do chamado problema do tautócrona ou isócrona (BARBOSA, 2008), (MACHADO, 2015). Já a primeira monografia voltada para o cálculo fracionário foi publicada em 1968, tendo como foco a aplicação em química, cujos autores Oldham (químico) e Spanier (matemático), a desenvolveram de forma conjunta abordando problemas relacionados a transferência de calor e massa, trazendo uma nova etapa de desenvolvimento para o cálculo fracionário com base na intuição física e na versatilidade matemática (OLIVEIRA, 2010).

A primeira conferência dedicada ao cálculo fracionário ocorreu por intermédio de Bertham Ross, logo após a conclusão de seu doutorado, o qual organizou a "Primeira Conferência sobre Cálculo Fracionário e suas Aplicações", na Universidade de New Haven, em junho 1974 (BARBOSA, 2008). A partir dessa conferência, ampliou-se a publicação de artigos e a realização de outros eventos que impulsionaram as pesquisas e a abrangência do cálculo fracionário na apresentação de soluções mais adequadas nos diversos campos do conhecimento (VALÉRIO et al., 2014). Desde então, a aplicação do cálculo fracionário vem sendo ampliada em várias áreas do conhecimento tais como o problema da viscoelasticidade, os fenômenos hereditários com memória longa, problemas difusivos, difusão em meios com geometria fractal etc. (Caputo, 1969; Nigmatullin, 1986; Carpinteri e Mainardi, 1997; Podlubny, 1999; Hilfer; 2000; West et al., 2003; Kilbas et al., 2006; Mainardi, 2010; Palmeira, 2018; Moreira et al., 2019).

Apesar de uma vasta literatura aplicada ao estudo das derivadas fracionárias, alguns pontos devem ser destacados. Até o momento ainda está em aberto a discussão sobre o significado físico e geométrico das derivadas fracionárias. Além disto, alguns aspectos básicos como regra da cadeia ainda carecem de um maior aprofundamento. No entanto, recentemente foi proposto um trabalho por Khalil et al. (2014), com uma nova definição da derivada fracionária, a chamada derivada conformável, a qual possibilitou transformar um problema complexo em um problema mais simples e conhecido do cálculo tradicional. Esta metodologia será abordada de forma sucinta na próxima seção.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A equação de difusão-advecção bidimensional em um problema de dispersão de poluentes atmosféricos pode ser escrita na seguinte forma:

$$U\frac{\partial^{\alpha} c(x,z)}{\partial x^{\alpha}} = K_z \frac{\partial^2 c(x,z)}{\partial z^2} \quad ; \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{1}$$

onde *U* (velocidade do vento) e K_z (coeficiente de difusão vertical), por simplicidade, são constantes e *c* representa a concentração de poluentes integrada lateralmente (na direção *y*).

Para solução desta equação, tem-se a condição usual de fluxo nulo de poluentes na superfície e no topo do domínio vertical:

$$K\frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, h \tag{1a}$$

onde h é a altura da camada limite planetária (CLP). Além disso, há uma fonte com taxa de emissão *Q* na altura da fonte, H_S :

$$c(0,z) = \frac{Q}{U}\delta(z - H_S) \tag{1b}$$

onde $\delta(z - H_s)$ é a função delta de Dirac, que pode ser aproximada pela seguinte expressão:

$$\delta(z - H_s) = \frac{1}{h}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(\lambda_n z)\cos(\lambda_n H_s)\right]\right] \tag{1c}$$

onde λ_n são os autovalores. Aplicando-se a derivada conformável na Eq. (1), na variável *x*,

$$CD_{*\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \Rightarrow x^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial x} \tag{2}$$

e a metodologia usada em Moreira et al. (2019), chamada de método da decomposição por Laplace, obtém-se,

$$U\left[s\hat{c}(s,z) - c(0,z)\right] = K_z L_{*\alpha}\left[x^{\alpha-1}\frac{\partial^2 c(x,z)}{\partial z^2}\right] \tag{3}$$

logo,

$$\hat{c}(s,z) = \frac{1}{s}c(0,z) + \frac{K}{Us}L_{*\alpha}\left[x^{\alpha-1}\frac{\partial^2 c(x,z)}{\partial z^2}\right] \tag{4}$$

Aplicando-se a inversa da transforma de Laplace na Eq. (4) resulta,

$$c(x,z) = c_0 + L^{-1}{}_{*\alpha}\left[\frac{K}{Us}L_{*\alpha}\left[x^{\alpha-1}\frac{\partial^2 c(x,z)}{\partial z^2}\right]\right] \tag{5}$$

onde c_0 é dado pela Eq. (1b) combinada com a Eq. (1c). Portanto, para obter-se os outros termos da solução em séries, tem-se a expressão de recorrência dada por:

$$c_{n+1} = L^{-1}_{*\alpha}\left[\frac{K}{Us}L_{*\alpha}\left[x^{\alpha-1}\frac{\partial^2 c_n(x,z)}{\partial z^2}\right]\right] \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{6}$$

Após algumas manipulações algébricas, a solução final é dada por:

$$c(x,z)=\frac{Q}{Uh}+\frac{2Q}{Uh}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\lambda_n z)\cos(\lambda_n H_S)\exp\left(-\frac{K}{U}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\lambda_n^2\right) \qquad (7)$$

Cabe ressaltar, caso não fosse usada a derivada conformável, a solução resultante envolveria a função de Mittag-Leffler (E_α).

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscou-se dar uma visão geral, ainda que breve, dos problemas e alternativas que envolvem as derivadas fracionárias e seu desenvolvimento histórico. A derivada conformável surge como uma formulação que tenta suprir uma lacuna na maioria das definições de derivada, pois quase todas elas não satisfazem as propriedades da derivada do produto de duas funções, do quociente de duas funções, regra da cadeia e a regra da potência. No entanto, alguns autores indicam que esta alternativa nada mais é que uma simples mudança de variável. De fato, a função de Mittag-Leffler é mais geral que a função exponencial tradicional. Enfim, este é um tema desafiador e carece de muita atenção por todos os pesquisadores que usam derivadas e integrais na solução de problemas de engenharia e demais área de aplicação.

.

Agradecimentos

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa da Bahia – FAPESB (BOL 0194/2019) pelo apoio financeiro e ao SENAI-CIMATEC pelo apoio logístico.

5. REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, E. F. **A regra de L'Hôpital: análise histórica da regra de L'Hôpital - a importância da histórica da matemática na disciplina de cálculo**/Everaldo Fernandes Barbosa. Campinas, [s.n.], 2008.

[2] BASSALO, J. M. F. **A Crônica do Cálculo III. Contemporâneos de Newton e Leibniz**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 18, n. 04, p. 328–336, 1996.

[3] KHALIL, Roshdi et al. **A new definition of fractional derivative**. Journal of Computational and Applied Mathematics, v. 264, p. 65-70, 2014.

[4] MACHADO, J. A. Tenreiro; MAINARDI, Francesco; KIRYAKOVA, Virginia. **Fractional calculus: Quo vadimus? (Where are we going?)**. Fractional Calculus and Applied Analysis, v. 18, n. 2, p. 495-526, 2015.

[5] MILLER, K.S. and ROSS, B. **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**. John Wiley and Sons, New York, 1993.

[6] MOREIRA, D.M.; XAVIER, P. H. F. ; PALMEIRA, A. S. ; NASCIMENTO, E. S. . **New approach to solving the atmospheric pollutant dispersion equation using fractional derivatives**. International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 144, p. 118667.

[7] OLDHAM, K.B. and SPANIER, J. **The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order**. Academic Press, New York, 1974

[8] OLIVEIRA, Heron Silva. **Introdução ao cálculo de ordem arbitrária**. Dissertação (mestrado profissional) – UNICAMP, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 122 p. Campinas, SP. 2010.

[9] PALMEIRA, A. S. **Uma solução analítica da equação de difusão advecção fracionária considerando a lei de Fick modificada**/Anderson da Silva Palmeira – Dissertação de mestrado – Centro Universitário SENAI CIMATEC – Salvador, 2018.

[10] VALÉRIO, Duarte; MACHADO, J. A. Tenreiro; KIRYAKOVA, Virginia. **Some pioneers of the applications of fractional calculus.** Fractional Calculus and Applied Analysis, v. 17, n. 2, p. 552-578, 2014.