Taxação Ótima da Renda do Capital para Efeitos Redistributivos em uma Economia com Poder de Mercado e Recursos Naturais

Reynaldo Fernandes
Universidade de São Paulo

Naercio Menezes-Filho
Universidade de São Paulo & Insper

Resumo

Neste artigo, analisamos teoricamente qual é o imposto ótimo sobre o rendimento do capital no longo prazo em uma economia com poder de monopólio e que opera com um fator fixo de produção (recursos naturais), primeiro através de um modelo simples estático e depois usando um modelo dinâmico. No modelo dinâmico, os agentes vivem infinitamente e possuem a mesma taxa de desconto intertemporal. Os trabalhadores não poupam, enquanto os capitalistas não trabalham e possuem uma elasticidade de substituição intertemporal maior que um. O objetivo do governo é maximizar o bem-estar dos trabalhadores, transferindo renda dos capitalistas e dos rentistas para eles. Mostramos que o imposto ótimo de longo prazo sobre a renda do capital depende da participação do fator fixo de produção e da renda de monopólio na renda total, além da taxação sobre essas rendas. Se não houver fator fixo e nem mark-up, o imposto ótimo sobre a renda do capital é igual a zero, como no caso de Judd (1985a). Além disto, mostramos que, partindo de um estado estacionário com alíquota do imposto sobre a renda do capital igual a alíquota ótima de longo prazo, é sempre vantajoso para os trabalhadores promover um pequeno aumento (permanente ou transitório) de alíquota de imposto sobre a renda do capital. Isso indica que o imposto ótimo sobre o capital é maior no curto do que no longo prazo. Nossa conclusão principal é que na presença de rendas de recursos naturais e poder de mercado o resultado de Judd não se aplica.

Keywords: Imposto Ótimo, Imposto sobre o Capital, Mark-up, Fatores Fixos

JEL codes: H21, H25

1. Introdução

O debate sobre a taxa ótima de imposto sobre a renda do capital tem perdurado por muito tempo, em especial desde os textos fundamentais de Judd (1985a) e Chamley (1986), que mostraram que o capital não deveria ser taxado no longo prazo. Muitos artigos questionaram esse resultado, mudando as hipóteses subjacentes desses modelos: agentes que vivem para sempre, mercados completos e ausência de risco, por exemplo. Mas, as hipóteses que, de modo geral, são mantidas em todos esses modelos são: mercados competitivos e ausência de um fator fixo de produção (e.g. recursos naturais).

Neste artigo, introduzimos poder de mercado e um fator fixo de produção (recursos naturais), mantendo as demais hipóteses de Judd (1985a). Assumimos que os trabalhadores vivem infinitamente, possuem a mesma função utilidade, a mesma taxa de desconto intertemporal e não poupam. Os capitalistas não trabalham e têm uma elasticidade de substituição intertemporal maior que um. A função do governo é redistribuir renda dos capitalistas e dos rentistas para os trabalhadores com o objetivo de maximizar o bem-estar dos trabalhadores.

Além disso, assumimos que a expropriação de bens e direitos não é permitida, de tal forma que existe uma alíquota máxima que pode ser cobrada sobre a renda do fator fixo de produção e da renda oriunda das marcas (que determinam o poder de monopólio). Mostramos que, nessas condições, o imposto ótimo sobre o rendimento do capital é diferente de zero, sendo que essa diferença depende do imposto e da importância do fator fixo na produção e do imposto e do nível de rendas das marcas, tanto no caso de um modelo estático, como no modelo dinâmico.

No modelo estático, analisamos a situação que o governo não consegue distinguir as fontes das rendas não oriundas do trabalho (renda normal do capital, renda extraordinária sobre o capital e renda do fator fixo de produção). Nesse caso, a alíquota ótima do imposto único sobre as rendas não oriundas do trabalho pode ser bastante elevada, a depender, fundamentalmente, da participação do fator fixo de produção na renda total e da elasticidade de substituição entre capital e trabalho. Para o modelo dinâmico, mostramos que, partindo de um estado estacionário com alíquota do imposto sobre a renda do capital igual a alíquota ótima de longo prazo, é sempre vantajoso para os trabalhadores promover um pequeno aumento de alíquota de imposto sobre a renda do capital. Isso indica que o imposto ótimo sobre o capital é maior no curto do que no longo prazo.

Este artigo contribuí com uma grande literatura teórica sobre a taxação ótima da renda do capital, cujas referências principais são Judd (1985a) e Chamley (1989). Nesses papers, os agentes que vivem para sempre e tomam o estoque inicial de capital como um dado. Os impostos são proporcionais (não existem impostos *lump-sum*) e o imposto sobre o capital tem um limite superior. Judd (1985a) modela uma economia com duas classes (trabalhadores e capitalistas), onde o governo não tem dívida e promove redistribuição de renda entre capitalistas e trabalhadores por meio do sistema tributário. Chamley (1989), por sua vez, modela um agente representativo e, portanto, não tem um problema distributivo a ser considerado, mas permite que o governo tenha dívidas. Surpreendentemente, em ambos os modelos o imposto ótimo sobre a renda do capital é zero no *steady sate*. Como estamos interessados nos aspectos distributivos da taxação do capital, tomamos Judd (1985a) como nossa referência principal.

Aiyarari (1995) faz uma extensão do modelo de Judd (1985a), introduzindo mercados incompletos, encontrando que o imposto sobre a renda do capital é diferente de zero no longo prazo, sendo sempre positivo. No modelo de Aiyarari (1995), os agentes estão sujeitos a choques idiossincráticos, não possuem seguro, podem tomar dinheiro emprestado, mas uma parcela deles pode estar restrita a crédito devido a choques negativos. Embora os agentes vivam para sempre, esse tipo de modelo se parece com os modelos de gerações justapostas em que os agentes tem vida finita, porque a sequência de choques negativos pode levar a restrições de crédito, de tal forma que o programa de otimização com horizonte infinito pode ser visto como uma sequência de problemas com horizonte finito. Nessa situação, o imposto ótimo sobre o capital não é mais zero.

Lansing (1999) analisa um caso particular do modelo de Judd (1985a seção 3), o caso onde a elasticidade de substituição intertemporal (IES) é unitária $[u(c) = \ln c]$. Ele mostra que, nesse exemplo, a taxação ótima do capital no *steady sate* pode ser diferente de zero. Reinhorn (2019) aprofunda essa questão e mostra que Lansing (1999), implicitamente, relaxa a hipótese de convergência de Judd (1985a), a qual assume a convergência para um *steady state* interior e que as variáveis de co-estado (multiplicadores endógenos) também convergem. No exemplo de Lansing (1999) os multiplicadores não convergem. Reinhorn (2019) conclui que em qualquer *steady state* interior a taxação sobre a renda do capital é zero ou a elasticidade de substituição intertemporal é unitária (no modelo de Judd, $\beta = 1$).

A questão da convergência no modelo de Judd é retomado por Straub e Werning (2020). Eles mostram que, sob a hipótese que a função utilidade dos capitalistas apresenta elasticidade de substituição intertemporal constante, a solução do problema de taxação ótima converge para um *steady sate* não-interior quando a elasticidade de substituição intertemporal é menor do que 1 $(\text{no modelo}, \beta > 1)$. Nesse caso, a solução apresenta um imposto sobre a renda do capital positivo e o estoque de capital assume o menor valor sustentável. A intuição é que quando a IES < 1, o efeito renda (negativo) de um aumento antecipado de impostos futuro domina o efeito substituição, de modo que os capitalistas reduzem seu consumo e aumentam sua a popança hoje. Evidentemente, quando o aumento dos impostos chegar, ele terá o efeito de reduzir o estoque de capital. Mas se o aumento nos impostos estiver suficientemente distante, o aumento de capital devido a uma maior taxa de poupança na transição mais que compensaria essa queda. Em suma, para que o modelo de Judd (1985a) convirja para um *stead state* interior temos que admitir que a função utilidade dos capitalistas tenha IES < 1 (ou $\beta < 1$, no modelo), hipótese que será adotada neste paper.

Todos os modelos acima assumem uma função de produção neoclássica com retornos constantes, sem tecnologia e sem crescimento populacional. Além disso, os mercados são perfeitamente competitivos. Nossa contribuição para a literatura é mudar dois aspectos do modelo de Judd (1985a). Assumimos que a função de produção tem retornos decrescentes de escala em trabalho e capital (devido ao fator fixo de produção) e incluímos um mark-up do preço sobre os custos no produto final da economia.

A existência de recursos naturais cuja renda possui um limite máximo (inferior a 100%) de taxação pode ser motivada por uma outra linha da literatura, de informação assimétrica, baseado em Stiglits (1982). Primeiro devemos pensar recursos naturais em sentido bem amplo, incluindo diversos talentos humanos não produzidos como, por exemplo, talentos atléticos, intelectuais e organizacionais/empresariais. Nesse cenário, o planejador não conseguiria observar diretamente a dotação de recursos naturais dos trabalhadores, podendo observar apenas a renda. Se o objetivo for transferir renda dos trabalhadores com maior dotação de recursos naturais para aqueles com pouca dotação desses recursos, existiria um limite para a alíquota do imposto sobre a renda do trabalho, a partir da qual os trabalhadores mais bem-dotados reduziriam o tempo de trabalho e obteriam uma renda similar aos trabalhadores menos dotados, aumentando o benefício com o lazer. Enquanto que no modelo de Stiglitz (1982) não há capital, somente trabalhadores qualificados e não-qualificados, Guerreiro, Rebelo e Teles (2022) estendem esse modelo para incluir capital. Capital é um insumo de produção (que produz renda zero para os seus proprietários) substituto de trabalhadores não qualificados (*routine workers*) e complementar aos trabalhadores qualificados (*non-routine workers*). O objetivo do planejador é reduzir a desigualdade entre os dois tipos de trabalhadores. O *first best* seria transferir renda dos trabalhadores qualificados para os não qualificados via um imposto *lump-sum* e não taxar o capital. Na impossibilidade de identificar os tipos de trabalhadores, a taxação da renda dos trabalhadores qualificados tem um limite e a taxação do capital é positiva. Thuemmel (2023) considera três tipos de trabalhadores: não qualificados (*manual non-routine labor*), intermediários (*routine labor*) e qualificados (*cognitive non-routine labor*). Capital é substituto dos trabalhadores intermediários e complementar aos demais trabalhadores. Novamente, no *first best* com impostos *lump-sum* a taxação do capital é zero. Quando os trabalhadores não podem ser identificados, a taxação do capital é diferente de zero, mas seu sinal é ambíguo, podendo envolver uma taxação ou um subsídio.

2. Um Modelo Estático Simples

Vamos admitir a existência de dois bens intermediários que são vendidos em um mercado competitivo e imediatamente transformados em um bem final, o qual serve tanto para consumo quanto para investimento. Os bens intermediários são os serviços de um bem não produzido (N) e um bem produzido por capital e trabalho (F). Vamos denominar N como recursos naturais, o qual é considerado fixo.[1] A utilidade dos agentes é definida apenas com base no bem final, Y, cujo preço é normalizado em 1. A função de produção agregada do bem final toma a forma de uma Cobb-Douglas, onde γ mede a parcela da produção destinada ao bem produzido, F.

[1] Podemos pensar recursos naturais em sentido bem amplo, incluindo diversos talentos humanos não produzidos como, por exemplo, talentos atléticos, intelectuais e organizacionais/empresariais.

$$Y = N^{1-\gamma}F^{\gamma} \quad (1)$$

Os produtores do bem final, além de contratarem os serviços de N e comprarem F, têm que remunerar os proprietários das "marcas".[2] Isso é uma forma simples de considerar a presença de poder de monopólio no modelo. Podemos pensar que produtores do bem final são competitivos, mas para produzir necessitam pagar uma renda aos detentores das "marcas". Por simplicidade, vamos fixar essa renda como um percentual m da renda obtida do produto final $(0 \leq m < 1)$. Quanto mais competitiva a economia, menor será o valor de m.

Desde que os bens intermediários são transacionados em mercados competitivos, seus preços são dados por (2) e (3). A renda paga para os proprietários das "marcas" põem uma cunha entre o preço e o custo unitário de produção (C): $P = 1 = \mu C$, onde $C = \frac{P_N N + P_F F}{Y}$ e $\mu = \frac{1}{1-m}$. Então, o mark-up da economia é dado por $\frac{m}{1-m}$.[3]

$$P_N = (1-m)(1-\gamma)\frac{Y}{N} \quad (2)$$

$$P_F = (1-m)\gamma\frac{Y}{F} \quad (3)$$

A função de produção agregada do bem intermediário produzido é dada por (4), onde K é o estoque de capital físico, L é o número de trabalhadores, σ é a elasticidade de substituição entre capital e trabalho e α é o parâmetro de distribuição da CES. Os trabalhadores ofertam trabalho inelasticamente e, por simplicidade, não há depreciação do estoque de capital.[4] Assim, podemos, sem perda de generalidade, considerar que L =

[2] A princípio, poderíamos pensar em direitos de "marcas" e "patentes". Entretanto, estamos considerando uma economia onde não há inovação, de modo que não teríamos como justificar a existência de direitos de patentes.

[3] Esta é uma forma simples de incluir um mark-up fixo. Uma alternativa seria considerar que o bem final é produzido por produtores competitivos que utilizam uma tecnologia CES para montá-lo a partir uma variedade de bens intermediários produzidos por firmas monopolisticamente competitivas. Sendo $\epsilon > 1$ a elasticidade de substituição entre qualquer dois insumos, os produtores intermediários fixarão um mark-up dada por $\frac{1}{\epsilon-1}$. Ver, por exemplo, Karabarbounis e Neiman (2014) e Raurich, Sala e Sorolla (2012). Da forma que fizemos, o modelo dinâmico (próxima seção) torna-se o modelo de Judd (1985a, seção 3) quando $\gamma = m = 0$.

[4] Desconsiderar a depreciação não traz qualquer perda de generalidade ao modelo.

N = 1. Com base em (3) e (4), temos que o salário e o estoque de capital da economia são dados por (5) e (6), onde r é a taxa bruta de retorno do capital. A taxa de retorno líquida de impostos é, por sua vez, dada por $\tilde{r} = (1 - \tau_K)r$, onde τ_K é a alíquota do imposto sobre a renda do capital. A taxa liquida de retorno do capital é considerada fixa.[5]

$$F = \left[\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{4}$$

$$W = (1-\alpha)(1-m)\gamma F^{\frac{1-\sigma(1-\gamma)}{\sigma}} \tag{5}$$

$$K = \left[\frac{\alpha(1-m)\gamma}{r}\right]^{\sigma} F^{1-\sigma(1-\gamma)} \tag{6}$$

De (4) e (6) obtemos (7). Definindo o primeiro termo do lado direito de (7) como Z_1 e o segundo termo como Z_2 e diferenciando (7) em relação a F e τ_K, obtemos (8).

$$(1-\alpha) = F^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha^{\sigma}\left[\frac{\gamma(1-m)(1-\tau_K)}{\tilde{r}}\right]^{\sigma-1} F^{\frac{[1-\sigma(1-\gamma)](\sigma-1)}{\sigma}} \tag{7}$$

$$\frac{dF}{d\tau_K} = \frac{-Z_2\sigma F}{(1-\tau_K)[Z_1 - Z_2 + Z_2\sigma(1-\gamma)]} \tag{8}$$

Admitimos a existência de um governo pró-trabalhadores que tem a função de taxar as demais rendas e transferir os recursos arrecadados para os trabalhadores, de modo a maximizar o bem-estar deles.[6] Como os recursos naturais são considerados um fator fixo e "marcas" não são fatores de produção, pode-se alegar que a taxação ótima, do ponto de vista dos trabalhadores, seria a de 100% dessas rendas. Entretanto, vamos considerar

[5] Em modelos padrão para uma economia fechada, a taxa liquida de retorno do capital é determinada, no *steady state*, pela taxa subjacente de crescimento (zero no nosso caso) mais a taxa de preferência intertemporal do agente representativo. Então, considerando essa última taxa constante, temos a constância da taxa liquida de retorno do capital (ver seção 3).

[6] Podemos pensar que o planejador possui uma função de bem-estar Rawlsiana e que os trabalhadores (que têm o trabalho como sua principal fonte de renda) formam o grupo menos favorecido da sociedade (em comparação aos capitalistas e rentistas). Nesse caso, a hipótese é que ao realizar transferências de modo a maximizar o bem-estar dos trabalhadores, esses continuariam sendo o grupo menos favorecido. Ou seja, as transferências não mudariam a posição hierárquica dos trabalhadores na distribuição de renda.

que a “expropriação” bens e direitos não é permitida e que existe uma alíquota máxima que pode ser cobrada sobre a renda desses fatores: τ_N para a renda dos recursos naturais e τ_Y para renda proveniente dos direitos de “marcas”. Assim, o governo fixará essas alíquotas máximas (τ_N e τ_Y), as quais, admite-se, não afetam a oferta do fator (no caso de N) e nem o nível ótimo de capital de longo prazo.

Existem diferentes argumentos que poderiam justificar um limite máximo para a taxação dos recursos naturais e direitos de “marcas”. Eles vão desde dos custos para a identificação da fonte de renda até argumentos de economia política. No caso dos recursos naturais, um caso interessante seria pensar N como recursos humanos não produzidos. Assim, existiriam dois tipos de trabalhadores: N (qualificados) e L (não qualificados). A função objetivo do governo seria maximizar o bem-estar dos trabalhadores não qualificados. Isso nos aproximaria do trabalho de Stiglitz (1982), onde o planejador não conseguiria observar diretamente o tipo de trabalhador, podendo observar apenas a renda. Se o objetivo fosse transferir renda dos trabalhadores qualificados para os não qualificados, existiria um limite para a alíquota do imposto sobre a renda do trabalho, a partir da qual os trabalhadores qualificados reduziriam o tempo de trabalho e obteriam uma renda similar aos trabalhadores não qualificados, aumentando o benefício com o lazer.[7] [8]

Então, a função objetivo do governo é fixar τ_K, de modo a maximizar a renda total dos trabalhadores (salários mais transferências), a qual é dada por (9). A condição de primeira ordem da maximização de (9) é dada por (10).

$$T = GF^{\gamma} - \tilde{r}^{1-\sigma}[\gamma\alpha(1-\tau_K)(1-m)]^{\sigma}F^{1-\sigma(1-\gamma)} \tag{9}$$

$$G = 1-(1-\tau_N)(1-m)(1-\gamma)-(1-\tau_Y)m$$

$$\tau_K = (1-\tau_N)(1-\gamma)-\tau_Y\frac{m}{1-m} \tag{10}$$

[7] Ver Stiglitz (1982), Guerreiro, Rebelo e Teles (2022) e Thuemmel (2023)

[8] Se as rendas de monopólio fossem além das “marcas” e envolvessem “patentes”, a taxação dessas rendas poderia impactar negativamente sobre as inovações futuras e, deste modo, sobre a produtividade, acumulação de capital e renda futura dos trabalhadores. No presente artigo, no entanto, essa questão não será tratada. Consideramos um mundo onde não há inovação tecnológica.

Note que quando $\gamma = 1$ e $m = 0$, temos $\tau_K = 0$. Ou seja, na hipótese de uma economia perfeitamente competitiva com capital e trabalho como as únicas fontes de renda, obtemos o mesmo resultado de Chamley-Judd: a taxação ótima de longo prazo sobre a renda do capital é zero. A equação (10) nos diz que quanto maior for a parcela da renda total apropriada pelos proprietários dos recursos naturais e quanto menor a parcela da renda total que os trabalhadores recebem (via tributação) dos proprietários das "marcas", maior é alíquota ótima do imposto sobre a renda do capital.

2.1. Grau de Monopólio: Taxação e Regulação

A parcela bruta do produto destinada aos proprietários das "marcas" possui um papel importante na análise. Quanto maior o valor de m, menor o produto e salários da economia, mas uma parcela dessa renda é direcionada aos trabalhadores via tributo. Por sua vez, se $\tau_Y m$ for suficientemente elevado, a alíquota ótima sobre a renda do capital é negativa. Isso levanta a questão sobre qual política seria preferida (do ponto de vista dos trabalhadores): aumentar ou reduzir m? Isso na hipótese que o governo tenha algum poder para regular m.[9]

Para endereçarmos essa questão, vamos endogenizar a alíquota de imposto sobre a renda do capital - dada por (10) – e verificar o impacto da variação de m na renda total dos trabalhadores (salários mais transferências). Então, a renda total dos trabalhadores é, agora, dada por (11). Notando que $(1-m)(1-\tau_K) = S(1-m) + \tau_Y$ e com base em (7), obtemos (12) e a condição (13).

$$T = [S(1-m) + \tau_Y]F^{\gamma} - \tilde{r}^{1-\sigma}(\gamma\alpha)^{\sigma}[S(1-m) + \tau_Y]^{\sigma}F^{1-\sigma(1-\gamma)} \tag{11}$$

$$S = (1-\tau_Y) - (1-\tau_N)(1-\gamma)$$

$$\frac{dF}{dm} = \frac{-Z_2 S\sigma F}{[S(1-m)+\tau_Y][Z_1 - Z_2 + Z_2\sigma(1-\gamma)]} \tag{12}$$

[9] O governo pode regular fusões e aquisições de empresas com o objetivo de reduzir o poder de monopólio na economia, limitar o direito de "marcas" etc.

$$\frac{dT}{dm}\begin{cases} > 0 \; se \; S < 0 \\ < 0 \; se \; S > 0 \\ = 0 \; se \; S = 0 \end{cases} \tag{13}$$

A condição (13) diz que, do ponto de vista dos trabalhadores, o governo deveria atuar para reduzir o poder de monopólio da economia na situação em que $S > 0$. Caso contrário, quando $S < 0$, a existência de direitos de “marcas” não seria um problema para se preocupar.

A condição $S > 0$ ocorre quando $\frac{\tau_Y - \tau_N}{1-\tau_N} < \gamma$. Para essa condição valer, bastaria que $\tau_Y \leq \tau_N$ ou que $\tau_Y < \gamma$. De modo geral, para essa condição não ser satisfeita, precisaríamos que τ_Y fosse significativamente maior que τ_N e que γ fosse suficientemente pequeno. Assim, em condições normais, seria de esperar que $S > 0$, de modo que, do ponto de vista dos trabalhadores, o governo deveria atuar para reduzir o poder de monopólio da economia.[10]

2.2. Um Imposto Único sobre as Rendas Não Oriundas do Trabalho

Até o momento consideramos que é possível separar as rendas conforme suas fontes: trabalho, capital, recursos naturais e direitos de “marcas”. Na prática, no entanto, essa separação por fontes de renda é muito difícil. Por exemplo, é difícil separar da rentabilidade das empresas a parte advinda da renda “normal” do capital e a parte devida ao poder de mercado. Assim, vamos considerar a situação onde a separação é apenas possível entre renda do trabalho e de outras fontes. Nessa situação, a tarefa do governo é taxar as rendas não oriundas do trabalho e transferi-las para os trabalhadores, de modo a maximizar a renda total dos últimos.

Nesse caso temos que $\tau_Y = \tau_N = \tau_k = \tau$ e a renda total dos trabalhadores é dada por (14). O problema do planejador aqui é o de encontrar τ que maximiza T. A condição de primeira ordem desse problema de otimização é dada por (15). Note que, fixado F,

[10] É preciso lembrar que na presença de “patentes”, sua limitação pode influenciar no ritmo futuro de inovações e ganhos de produtividade. Aspectos que não estão sendo tratados no presente artigo.

podemos escrever (15) como um ponto fixo, $\tau = g(\tau)$. Da mesma forma, fixado τ, podemos escrever (7) como $F = g(F)$. Então, com base nessas duas equações, podemos simular valores para τ para diferentes valores dos parâmetros $(\alpha,\ \tilde{r}, \sigma, \gamma\ e\ m)$. A tabela 1 dá os valores de τ para diferentes varões de σ, γ e m. Todas as simulações assumem $\alpha = 0{,}5$ e $\tilde{r} = 0{,}03$.

$$T = \{1 - (1 - \tau)[1 - \gamma(1 - m)]\}F^{\gamma} - \tilde{r}^{1-\sigma}[\gamma\alpha(1 - m)(1 - \tau)]^{\sigma}F^{1-\sigma(1-\gamma)} \qquad (14)$$

$$\frac{\tau}{1-\tau} = \frac{[1-\gamma(1-m)]}{\sigma\gamma}\left\{\sigma\gamma + \frac{Z_1}{Z_2}(\tau, F) - [1 - \sigma(1 - \gamma)]\right\} - m \qquad (15)$$

Tabela 1 – Simulações para os valores de τ

Valores de γ e m	Valores de σ					
	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	2,50
$\gamma = 0{,}9$ e $m = 0{,}1$	0,612	0,388	0,244	0,145	0,101	0,100
$\gamma = 0{,}9$ e $m = 0{,}2$	0,661	0,454	0,297	0,170	0,103	0,100
$\gamma = 0{,}9$ e $m = 0{,}4$	0,704	0,534	0,384	0,230	0,111	0,100
$\gamma = 0{,}7$ e $m = 0{,}1$	0,733	0,593	0,489	0,403	0,335	0,302
$\gamma = 0{,}7$ e $m = 0{,}2$	0,744	0,614	0,514	0,425	0,346	0,304
$\gamma = 0{,}7$ e $m = 0{,}4$	0,751	0,643	0,557	0,471	0,378	0,309
$\gamma = 0{,}5$ e $m = 0{,}1$	0,800	0,728	0,677	0,631	0,579	0,521
$\gamma = 0{,}5$ e $m = 0{,}2$	0,800	0,734	0,688	0,643	0,591	0,526
$\gamma = 0{,}5$ e $m = 0{,}4$	0,794	0,742	0,706	0,670	0,622	0,544

As entradas correspondem a valores de τ para diferentes valores de σ, γ e m. Todos os cálculos assumem que $\alpha = 0{,}5$ e $\tilde{r} = 0{,}03$.

A tabela 1 mostra que a alíquota ótima é bastante sensível aos valores de σ e γ. Quanto menor a elasticidade de substituição e maior a participação do fator fixo na renda $(1 - \gamma)$, maior é o valor da alíquota. E mais, dependendo do valor dos parâmetros, o valor da alíquota pode ser bastante substancial.

3. Um Modelo Dinâmico

Esta seção está baseada em Judd (1985a, seção 3), mas, como na seção anterior, consideramos a existência de recursos naturais e de direitos de "marcas". Judd (1985a) assume a convergência para um *steady state* interior e que as variáveis de co-estado (multiplicadores endógenos) também convergem. Por sua vez, Straub e Werning (2020) argumentam que tais propriedades estão longe de serem garantidas. Eles mostram que sob as hipóteses adotadas por Judd (1985a), em particular a de que a função utilidade dos capitalistas apresenta elasticidade de substituição intertemporal constante, a solução do problema de taxação ótima converge para um *steady sate* não-interior quando a elasticidade de substituição intertemporal é menor do que 1 $(\text{no modelo}, \beta > 1)$. Nesse caso, a solução apresenta um imposto sobre a renda do capital positivo e o estoque de capital assume o menor valor sustentável.[11]

No entanto, é razoável assumir a convergência para um *steady state* interior. De modo geral, as economias reais parecem apontar para certa estabilidade de longo prazo em suas variáveis macroeconômicas observáveis. No caso de Judd (1985a), onde não há evolução de variáveis demográficas e nem mudanças tecnológicas, estabilidade de longo prazo significa que variáveis como consumo e estoque de capital deveriam convergir para um valor positivo. Ou seja, a economia deveria convergir para um *setady state* interior (Reinhorn, 2019). Assim, nesta seção, à exceção da inclusão de recursos naturais e poder de mercado, mantemos a estrutura básica de Judd (1985a, seção 3). Admitimos convergência para um *steady state* interior, mas restringimos a análise para o caso de elasticidade de substituição intertemporal maior que a unidade $(\beta < 1)$.

A função de produção agregada do bem final é mantida como em (1) e os preços dos bens intermediários são mantidos como em (2) e (3). A função de produção do bem intermediário produzido é $F(K, L)$, a qual é assumida ser homogênea de grau 1. Então,

[11] Se o dispêndio do governo é zero no *steady state*, o estoque de capital converge para zero e a alíquota de imposto sobre a renda do capital converge para 100%. Para um amplo conjunto de modelos de taxação ótima da renda do capital, onde Judd (1985a) é um caso particular, Reinhorn (2019) chega ao resultado que em qualquer *steady state* interior a taxação sobre a renda do capital é zero ou a elasticidade da utilidade marginal é unitária $(\beta = 1)$.

definimos $F(K,L) = f(k)L$, onde $k = K/L$ e assumimos que $f(k)$ é côncava. Então, fixando L = N = 1, temos $Y = f(k)^{\gamma}$.

Assumimos que a economia possui um número fixo de indivíduos que vivem infinitamente e possuem a mesma função utilidade, a qual tem como único argumento o consumo do bem final da economia e apresenta elasticidade constante da utilidade marginal: $\beta = -\frac{u"(c)c}{u'(c)} \geq 0$. Os indivíduos possuem também a mesma taxa de preferência temporal, ρ. Por fim, admite-se que trabalhadores não poupam e capitalistas não trabalham.

Definimos $K_i(t)$ como a propriedade de capital do i-ésimo capitalista no período t e $K_i(0) = K_{i0}$ como sua dotação inicial de capital. Então, temos que $\sum_i K_i(t) = K(t) = k(t)$. A renda líquida de cada capitalista é $\tilde{r}K_i(t) + a_i(t)$, onde a_i é a renda liquida obtida pela propriedade dos recursos naturais e dos direitos de "marcas". O estoque de recursos naturais e os direitos de "marcas" que cada indivíduo (capitalista ou não) possui é considerado fixo, de modo que não há transação de ativos (reais ou financeiros) na economia. A estrutura de impostos e transferências é a mesma da seção anterior.

O i-ésimo capitalista escolhe seu caminho de consumo, $c_i(t)$, de modo a maximizar o valor presente de suas utilidades instantâneas, tomando como dado os preços (salário, renda do capital e renda da propriedade de recursos naturais e de "marcas"), os impostos e sua restrição orçamentária instantânea.

$$\max_{c_i(t),K_i(t)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u\big(c_i(t)\big)dt \tag{16}$$

$$s.t. \quad \dot{K}_i(t) = \big(1 - \tau_K(t)\big)r(t)K_i(t) + a_i(t) - c_i(t), \;\; K_i(0) = K_{i0}$$

O Hamiltoniano de valor corrente de (16) é dado por (17), onde, por simplicidade, suprimimos o índice t (procedimento que, sempre que possível, adotaremos daqui em diante). Assumindo que H_c é continuo e diferenciável em todos seus argumentos e que, para todo t, o $\max_{c_i} H_c$ possui uma solução interior, o *princípio de máximo* produz (18) e (19), onde esse último apresenta a condição de transversalidade.

$$H_c = u(c_i) + \lambda[(1-\tau_K)rK_i + a_i - c_i] \tag{17}$$

$$\dot{c}_i = -\frac{c_i}{\beta}[\rho - (1-\tau_K)r] \tag{18}$$

$$\lim_{t\to\infty} u'(c_i)e^{-\rho t} = 0 \tag{19}$$

Os preços de equilíbrios são dados por (2), (3), (20) e (21). Ao impormos os preços de equilíbrio em (18) e na restrição orçamentária, obtemos equações de equilíbrio dadas por (22), ao promovermos a soma para o conjunto dos capitalistas. Ao agirmos assim, estamos admitindo que os capitalistas possuem previsão perfeita sobre os preços futuros.

$$r = (1-m)\gamma f(k)^{\gamma-1}f'(k) \tag{20}$$

$$W = (1-m)\gamma f(k)^{\gamma-1}[f(k) - f'(k)k] \tag{21}$$

$$\dot{C} = -\frac{C}{\beta}[\rho - (1-\tau_K)(1-m)\gamma f(k)^{\gamma-1}f'(k)] \tag{22a}$$

$$\dot{k} = (1-\tau_K)(1-m)\gamma f(k)^{\gamma-1}f'(k)k + \delta(1-G)f(k)^{\gamma} - C \tag{22b}$$

Em (22), C representa o consumo total dos capitalistas e δ é a parcela das rendas liquidas totais - obtidas pelos recursos naturais e pelos direitos de “marcas” - que são transferidas para os capitalistas [ver equação (9)]. Na hipótese que C e k sejam diferenciáveis, as equações em (6) descrevem o equilíbrio da economia para qualquer t. A seguir consideraremos que $\delta = 0$ ou $\delta = 1$. Dado $\tau_K(t)$, τ_N, τ_Y e m, existe um único *steady state* e, para qualquer k, existe um único caminho de ponto de cela levando para o *steady state*.[12]

3.1. A Taxação Ótima do Capital

[12] Ver Judd (1985a e 1985b)

O problema do planejador é fixar o caminho ótimo de $\tau_K(t)$, dado os valores de τ_N, τ_Y e m. Para isso ele toma as equações de movimento dos capitalistas [equações em (22)] como restrição. Então o problema do planejador consiste em maximizar o valor presente de suas utilidades instantâneas do trabalhador representativo, dado por (23).

$$\max_{\tilde{r}(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t} u[Gf(k)^\gamma - \tilde{r}k]dt \tag{23}$$

s.j. $\quad \dot{k} = \tilde{r}k + \delta(1-G)f(k)^\gamma - C$

$$\dot{C} = -\frac{C}{\beta}[\rho - \tilde{r}]$$

$$\tilde{r} \geq 0$$

O Hamiltoniano de valor corrente de (23) é dado por (24), onde q_1, q_2 e q_3 são os multiplicadores de valor corrente das variáveis de estado k e C e da restrição $\tilde{r} \geq 0$, respectivamente. Assumimos que H_c é continuo e diferenciável em todos seus argumentos e que, para todo t, o $\max_{\tilde{r}_t} H_c$ possui uma solução interior. As condições de *steady state* desse problema são: $\dot{k} = \dot{C} = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$.

$$H_c = u[Gf(k)^\gamma - \tilde{r}k] + q_1[\tilde{r}k + \delta(1-G)f(k)^\gamma - C] - q_2\frac{C}{\beta}[\rho - \tilde{r}] + q_3\tilde{r} \tag{24}$$

<u>CASO 1: $\boldsymbol{\delta = 0}$</u>

Nesse caso, temos três grupos de agentes: capitalistas, trabalhadores e rentistas. Tanto os trabalhadores quanto os rentistas não poupam e vivem da renda do trabalho (trabalhadores) e da renda dos recursos naturais e direitos das "marcas" (rentistas). Pelo *princípio de máximo* temos (25)-(28).

$$0 = q_3\tilde{r} \tag{25}$$

$$0 = -u'[\ldots]k + q_1 k + q_2\frac{C}{\beta} + q_3 \tag{26}$$

$$\dot{q}_1 = -u'[\ldots]\left[\frac{G}{1-m} - (1-\tau_K)\right]r + q_1(\rho - \tilde{r}) \tag{27}$$

$$\dot{q}_2 = q_1 + q_2\rho + q_2\frac{\rho-\tilde{r}}{\beta} \tag{28}$$

Dado que, em *steady state*, $\dot{q}_1 = 0$ e $\rho = \tilde{r}$, de (30) obtemos que $G = (1-m)(1-\tau_K)$. Então, temos que $\tau_K = (1-\tau_N)(1-\gamma) - \tau_Y\frac{m}{1-m}$. Ou seja, a taxação ótima do capital converge para o resultado obtido pelo modelo estático [equação (10)]. Novamente, caso $\gamma = 1$ e $m = 0$ obtemos o mesmo resultado de Chamley-Judd: a taxação ótima de longo prazo sobre a renda do capital é zero.

Judd (1985a) mostra que partindo de um *steady state* com $\tau_K = 0$ é sempre vantajoso para os trabalhadores promover um pequeno aumente de alíquota (transitório ou permanente). Assim, se a taxação ótima do capital é zero no longo prazo, no curto prazo ela é positiva. Aqui obtemos um resultado equivalente. Partindo de um *steady state* com $\tau_K = (1-\tau_N)(1-\gamma) - \tau_Y\frac{m}{1-m}$ é sempre vantajoso para os trabalhadores promover um pequeno aumente de alíquota, seja ele transitório ou permanente (ver Apêndice).

<u>**CASO 2: δ = 1**</u>

Um caso mais interessante é quando todos as rendas advindas de recursos naturais e direitos de "marcas" e "patentes" pertencem aos capitalistas. Nesse caso o *princípio de máximo* é dado por (25), (26), (27') e (28).

$$\dot{q}_1 = -u'[\ldots]\left[\frac{G}{1-m} - (1-\tau_K)\right]r + q_1(\rho - \tilde{r}) - q_1 r\frac{1-G}{1-m} \tag{27'}$$

Dado que, em *steady state*, temos que $\dot{q}_1 = \rho - \tilde{r} = 0$, em (27') temos que $G \gtreqless (1-m)(1-\tau_K)$ se $q_1 \lesseqgtr 0$. Note que quando $G > (1-m)(1-\tau_K)$ temos que $\tau_K > (1-\tau_N)(1-\gamma) - \tau_Y \frac{m}{1-m}$. Ou seja, a alíquota ótima da renda do capital converge para um valor maior do que o obtido pelo modelo estático. Por outro lado, caso $G < (1-m)(1-\tau_K)$, a taxação ótima da renda do capital é, no *steady state*, menor do que a obtida pelo modelo estático.

De (28) e (25) obtemos que $q_1 = -q_2\rho$ e $q_3 = 0$. Então, de (26) obtemos a condição dada por (29). Considerando que $u'[\ldots] > 0$, a condição para que $q_1 < 0$ é $\beta < \frac{C}{\tilde{r}k}$. Como no *steady state* toda renda dos capitalistas é consumida, temos que $C > \tilde{r}k$, em virtude das rendas derivadas dos recursos naturais e dos direitos de "marcas". Então, dado nossa hipótese que $\beta < 1$, temos que $q_1 < 0$ e τ_K converge para um valor acima do obtido no modelo estático.

$$u'[\ldots] = q_1\left(1 - \frac{C}{\tilde{r}k\beta}\right) \tag{29}$$

$$\frac{1-(1-m)(1-\tau_K)}{G-(1-m)(1-\tau_K)} = \frac{C}{\tilde{r}k\beta} \tag{30}$$

Substituindo (29) em (27') e considerando as condições de *steady state* obtemos (30). Dado que $0 < G < 1$, essa última condição diz que se $\frac{C}{\tilde{r}k\beta} > 1$, a alíquota ótima converge para $\tau_K > -\frac{m}{1-m}$.

Como vimos, dado que $\beta < \frac{C}{\tilde{r}k}$, τ_K converge para um valor acima do obtido no modelo estático. A não convergência da alíquota ótima da renda do capital para o valor obtido pelo modelo estático mostra que pode fazer diferença a função objetivo considerada pelo planejador: maximizar a renda total de longo prazo dos trabalhadores ou maximizar o valor presente se todas as rendas dos trabalhadores, de hoje até o infinito.

Por fim, partindo de um *steady state* com $\tau_K = (1-\tau_N)(1-\gamma) - \tau_Y \frac{m}{1-m}$ seria vantajoso para os trabalhadores promover um pequeno aumente de alíquota (transitório ou permanente), dado que $\beta < 1$ (ver Apêndice).

Conclusão

Neste artigo, analisamos teoricamente qual é o imposto ótimo sobre o rendimento do capital no longo prazo em uma economia com poder de monopólio e que opera com um fator fixo de produção (recursos naturais), primeiro através de um modelo estático e depois usando um modelo dinâmico. Mostramos que o imposto ótimo de longo prazo sobre a renda do capital não é zero, como em Judd (1985a), mas depende da participação do fator fixo de produção e da renda de monopólio na renda total, além da taxação sobre essas rendas.

Concluímos que, quando deixamos de lado as hipóteses de concorrência perfeita e/ou de apenas dois fatores de produção, o resultado de Judd (1985a) não mais se aplica. Desta forma, os resultados de Judd (1985a) e Chamley (1986) dependem fortemente dessas hipóteses.

Uma limitação do paper é que mostrar que a taxação ótima sobre a renda do capital é diferente de zero pode ser pouco informativo na construção de uma política tributária. Por exemplo, uma coisa é concluir que a taxação ótima sobre a renda do capital é da ordem de 2 a 3%, outra é concluir que ela é da ordem de 20 a 30%. No primeiro caso, ainda que diferente de zero, haveria muito pouco espaço para o uso desse tipo de taxação para conseguir efeitos distributivos significativos. Já no segundo caso, a taxação sobre a renda do capital seria um elemento muito eficaz para promover uma maior equidade de renda na economia. Então, nos próximos passos desta pesquisa, intencionamos investigar a questão da dimensão que a taxação da renda do capital (e de outras rendas) pode ter em uma política tributária com fins distributivos.

Para isso seria importante incluir alguma heterogeneidade de trabalhadores, calibrar o modelo para alguma economia real e simular uma política tributária com fins distributivos. Por exemplo, podemos adotar uma função de bem-estar Rawlsiana, onde os trabalhadores menos qualificados formam o grupo menos favorecido da sociedade. Então, a função do planejador seria transferir renda (via tributação) dos outros grupos da sociedade para os trabalhadores menos qualificados. Se, a exemplo da seção 2,2, o coletor de impostos não consegue identificar com precisão a origem de toadas as rendas, podemos considerar desenhos alternativos de tributação, incluindo um imposto de renda progressivo.

Referências

Aiyagari, S. R. (1995). Optimal Capital Income Taxation with Incomplete Markets, Borrowing Constraints, and Constant Discounting. *Journal of Political Economy*, 103 (6): 1158–1175.

Chamley, C. (1986). Optimal Taxation of Capital Income in General Equilibrium with Infinite Lives. *Econometrica*, 54 (3): 607-622.

Guerreiro, J., Rebelo, S. e Teles, P. (2022). Should Robots Be Taxed? *The Review of Economic Studies*, 89 (1): 279–311.

Judd, K. L. (1982). An Alternative to Steady State Comparisons in Perfect Foresight Models. *Economic Letters*, 10 (1-2): 55-59.

Judd, K. L. (1985a). Redistributive Taxation in a Simple Perfect Foresight Model. *Journal of Public Economics*, 28 (1): 59-83.

Judd, K. L. (1985b). Short-Run Analysis of Fiscal Policy in a Simple Perfect Foresight Model. *Journal of Political Economy*, 93 (2): 298-319.

Karabarbounis, L. e Neiman, B. (2014). The Global Decline of Labor Share. *Quarterly Journal of Economics*, 129 (1): 61-103.

Lansing, K. J. (1999). Optimal Redistributive Capital Taxation in a Neoclassical Growth Model. *Journal of Public Economics*, 73 (3): 423–453.

Raurich, X., Sala, H. and Sorolla, V. (2012). Factor Shares, the Price Markup, and the Elasticity of Substitution Between Capital and Labor. *Journal of Macroeconomics* 34(1): 181–198.

Reinhorn, L. J. (2019). On Optimal Redistributive Capital Taxation. *Journal of Public Economic Theory*, 21 (3): 460-487.

Stiglitz, J. E. (1982). Self-selection and Pareto Efficient Taxation, *Journal of Public Economics*, 17 (2): 213–240.

Straub, L. e Werning, I. (2020). Positive Long-Run Capital Taxation: Chamley-Judd Revisited. *American Economic Review*, 110 (1): 86-119.

Thuemmel, U. (2023). Optimal Taxation of Robots. *Journal of the European Economic Association*, 21 (3): 1154–1190.

Apêndice: Impactos sobre o Bem-Estar dos Trabalhadores de Mudanças Não-Antecipadas dos Impostos sobre a Renda do Capital

Seguindo Judd (1985a), nós examinamos o impacto sobre o bem-estar dos trabalhadores de uma mudança na alíquota de imposto sobre a renda do capital. Assumimos uma economia em *steady state* associada com uma alíquota constante (τ_K) do imposto sobre a renda do capital e verificamos se um pequeno aumento na alíquota é favorável aos trabalhadores. Consideramos dois cenários para esse aumento em τ_K: (i) quando o aumento é temporário (vigora apenas em um pequeno intervalo de tempo) e (ii) quando o aumento é permanente. De modo mais específico, consideramos que no *steady state* inicial a alíquota é $\tau_K = (1-\tau_N)(1-\gamma) - \tau_Y \frac{m}{1-m}$, que é a taxação que maximiza o bem-estar dos trabalhadores no *steady state*.

Considerando o tempo presente como t = 0, desejamos verificar o impacto no bem-estar dos trabalhadores de um aumento na alíquota τ_K igual a $\varepsilon h(t)$, para um pequeno ε (assumimos que $h(t)$ torna-se constante a partir de algum valor finito de t = t*). A política de aumento de impostos, uma vez anunciada, é imediatamente implementada. Assim, as equações de equilíbrio (22a) e (22b) podem ser escritas como (A1a) e (A1b). As soluções para C e k em (A1) podem ser expressas como $C(t,\varepsilon)$ e $k(t,\varepsilon)$.

$$\dot{C} = -\frac{C}{\beta}[\rho - (1-\tau_K - \varepsilon h(t))(1-m)\gamma f(k)^{\gamma-1} f'(k)] \qquad \text{(A1a)}$$

$$\dot{k} = (1-\tau_K - \varepsilon h(t))(1-m)\gamma f(k)^{\gamma-1} f'(k)k + \delta(1-G)f(k)^{\gamma} - C \qquad \text{(A1b)}$$

Conforme Judd (1985a), modelamos a mudança no imposto sobre a renda do capital como um aumento em ε a partir de um valor inicial igual a zero. Os impactos inicias da mudança em ε são dados por:

$$k_\varepsilon(t) \equiv \frac{\partial k}{\partial \varepsilon}(t,0), \qquad C_\varepsilon(t) \equiv \frac{\partial C}{\partial \varepsilon}(t,0),$$

$$\dot{k}_\varepsilon(t) \equiv \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)(t,0), \qquad \dot{C}_\varepsilon(t) \equiv \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)(t,0).$$

Os impactos de alterar τ_K por $\varepsilon h(t)$ são obtidos por diferenciar o sistema (A1) em relação a ε e avaliar as derivadas em ε = 0, tomando como dado o estoque de capital do *steady state* inicial (ver Judd 1982, 1985a e 1985b). O resultado é um sistema linear de equações diferenciais, dado por (A2), onde C e k são avaliados nos valores do *steady state* inicial.

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_\varepsilon \\ \dot{k}_\varepsilon \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} C_\varepsilon \\ k_\varepsilon \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{C}{\beta}(1-m)\gamma f^{\gamma-1} f' h(t) \\ (1-m)\gamma f^{\gamma-1} f' k h(t) \end{pmatrix} \tag{A2}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{C}{\beta}(1-m)\gamma f^{\gamma-1}(1-\tau_K)\left[(\gamma-1)\frac{f'f'}{f} + f''\right] \\ -1 & (1-m)\gamma f^{\gamma-1}(1-\tau_K)\left[(\gamma-1)\frac{f'f'}{f}k + f''k + f'\right] + \delta(1-G)\gamma f^{\gamma-1} f' \end{pmatrix}$$

Seguindo Judd (1985a), o sistema (A2) é resolvido utilizando transformações de Laplace.[13] Definindo Ψ_ε, K_ε e H como as transformações de Laplace de C_ε, k_ε e h, o sistema (A2) pode ser reescrito como (A3), onde $C_\varepsilon(0)$ é a mudança inicial em C, por unidade de ε, feita para garantir a estabilidade do sistema.

[13] Se $X(s)$ é a transformação de Laplace de $x(t)$, então $X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t)dt$.

$$\begin{pmatrix} \Psi_\varepsilon(s) \\ K_\varepsilon(s) \end{pmatrix} = (sI - j)^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{C}{\beta}(1-m)\gamma f^{\gamma-1} f' H(s) + C_\varepsilon(0) \\ -(1-m)\gamma f^{\gamma-1} f' k H(s) \end{pmatrix} \tag{A3}$$

As raízes características do sistema são dadas por (A4), onde $\theta_L = \frac{W}{f^\gamma}$ e $\theta_k = \frac{rk}{f^\gamma}$. Podemos verificar que $A < 0$ e $\mu > 0 > \lambda$.

$$\mu, \lambda = \frac{1}{2}\left\{B \pm \sqrt{B^2 - 4A}\right\} \tag{A4}$$

$$A = \frac{\rho^2}{\beta\gamma(1-m)}\left[(\gamma-1)\theta_k - \frac{\theta_L}{\sigma}\right]\left[1 + \frac{\delta(1-G)}{(1-\tau_K)\theta_k}\right]$$

$$B = \frac{\rho}{\gamma(1-m)}\left[(\gamma-1)\theta_k - \frac{\theta_L}{\sigma} + \gamma(1-m) + \frac{\delta(1-G)\gamma}{(1-\tau_K)}\right]$$

Dado que $k_\varepsilon(0) = 0$, obtemos (A5).[14] A combinação de (A3) com (A5) produz a solução completa para Ψ_ε e K_ε.

$$C_\varepsilon(0) = \frac{C}{\beta}\frac{\rho}{(1-\tau_k)}H(\mu)\left(1 - \frac{\mu\beta}{\rho}\right) + \frac{\delta(1-G)f^\gamma}{(1-\tau_k)}\mu H(\mu) \tag{A5}$$

O impacto sobre a utilidade dos trabalhadores da mudança na taxação sobre a renda do capital pode ser obtido da solução para K_ε. Definindo c^w como o consumo do trabalhador representativo, obtemos (A6). Diferenciando (A6) no ponto onde $\varepsilon = 0$ (correspondente ao *steady state* inicial), obtemos (A7).

$$c^w(t,\varepsilon) = Gf^\gamma - \big(1 - \tau_k - \varepsilon h(t)\big)(1-m)\gamma f^{\gamma-1} f' k \tag{A6}$$

[14] Ver Judd (1982, 1985a e 1985b).

$$c_\varepsilon^w(t,0) = (1 - m)\gamma f^{\gamma-1} f' \left\{ h(t)k + \frac{G}{1-m} k_\varepsilon - \frac{(1-\tau_k)}{\gamma(1-m)} k_\varepsilon \left[(\gamma - 1)\theta_k - \frac{\theta_L}{\sigma} + \gamma(1-m) \right] \right\} \quad \text{(A7)}$$

A mudança na utilidade dos trabalhadores, em termos do bem, em t = 0 (y_ε^w) é igual à variação na utilidade descontada dividida pela utilidade marginal corrente do consumo, $u'(c^w)$, que é dada por (A8).

$$y_\varepsilon^w = \frac{\int_0^\infty e^{-st} u\prime(c^w) c_\varepsilon^w(t,0) dt}{u\prime(c^w)} \quad \text{(A8)}$$

Combinando (A7) e (A8) obtemos (A9).

$$y_\varepsilon^w = (1 - m)\gamma f^{\gamma-1} f' \left\{ H(p)k + \frac{G}{1-m} K_\varepsilon(s) - \frac{(1-\tau_k)}{\gamma(1-m)} K_\varepsilon(s) \left[(\gamma - 1)\theta_k - \frac{\theta_L}{\sigma} + \gamma(1-m) \right] \right\} \quad \text{(A9)}$$

<u>CASO 1: $\boldsymbol{\delta = 0}$</u>

Para um crescimento na alíquota do imposto sobre a renda do capital de muito curta duração, $h(t)$ é um para pequenos valores de t e zero para os demais. Nesse caso, $\frac{H(u)}{H(p)}$ é aproximadamente 1. Então, (A9) pode ser escrita como (A10).

$$y_\varepsilon^w = (1 - m)\gamma f^{\gamma-1} f' k H(p) \left\{ 1 + \left(1 + \frac{\gamma(1-G-m) - \tau_{k\gamma(1-m)}}{(1-\tau_k)\left[(\gamma-1)\theta_k - \frac{\theta_L}{\sigma}\right]} \right) \frac{\beta}{1-\beta} \left(1 - \frac{\mu}{\rho} \right) \right\} \quad \text{(A10)}$$

Se a alíquota de imposto sobre a renda do capital for, no *steady state* inicial, aquela que maximiza o bem-estar dos trabalhadores $\left[\tau_K = (1-\tau_N)(1-\gamma) - \tau_Y \frac{m}{1-m}\right]$, a equação (A10) pode ser escrita como (A11). Quando $\delta = 0$ podemos verificar, com base em (A4), que $\mu > \rho$ e $\mu\beta/\rho < 1$ se $\beta < 1$. Assim, temos que $y_\varepsilon^w > 0$ em (A11) e um pequeno aumento de curta duração nos impostos da renda do capital sempre será desejoso para os trabalhadores.

$$y_\varepsilon^w = (1-m)\gamma f^{\gamma-1} f' k H(p) \left\{1 + \frac{\beta}{1-\beta}\left(1 - \frac{\mu}{\rho}\right)\right\} \tag{A11}$$

Por outro lado, se um aumento permanente de impostos é implantado, temos que $\frac{H(u)}{H(\rho)} = \frac{\rho}{\mu}$. Nesse caso, a equação (A10) pode ser escrita como (A12). Se $\tau_K = (1-\tau_N)(1-\gamma) - \tau_Y \frac{m}{1-m}$, (A12) pode ser rescrita como (A13).

$$y_\varepsilon^w = \frac{(1-m)\gamma f^{\gamma-1} f' k}{\rho}\left\{1 + \left(1 + \frac{\gamma(1-G-m) - \tau_{k\gamma(1-m)}}{(1-\tau_k)\left[(\gamma-1)\theta_k - \frac{\theta_L}{\sigma}\right]}\right)\frac{\left(\frac{\rho}{\mu}-1\right)}{1-\beta}\right\} \tag{A12}$$

$$y_\varepsilon^w = \frac{(1-m)\gamma f^{\gamma-1} f' k}{\rho}\left\{1 + \frac{\left(\frac{\rho}{\mu}-1\right)}{1-\beta}\right\} \tag{A13}$$

Novamente, temos que $y_\varepsilon^w > 0$, de modo que um pequeno aumento permanente nos impostos da renda do capital sempre será desejoso para os trabalhadores.

CASO 1: $\delta = 1$

Neste caso as condições que $\mu > \rho$ e $\mu\beta/\rho < 1$ se $\beta < 1$ não são mais válidas. Quando $\frac{H(u)}{H(p)} \approx 1$ e $\tau_K = (1-\tau_N)(1-\gamma) - \tau_Y \frac{m}{1-m}$, podemos escrever (A9) como (A14). Então, $y_\varepsilon^w > 0$ se $1 + \frac{\beta}{1-\beta}\left(1-\frac{\mu}{\rho}\right)M_1 > 0$.

$$y_\varepsilon^w = (1-m)\gamma f^{\gamma-1} f' k H(p) \left\{1 + \frac{\beta}{1-\beta}\left(1-\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{1}{M}\right\} \tag{A14}$$

$$M = 1 + \frac{(1-G)\left(\gamma\theta_k\beta + (1-\gamma)\theta_k + \frac{\theta_L}{\sigma}\right)}{(1-\tau_K)\theta_k(1-\beta)\left((1-\gamma)\theta_k + \frac{\theta_L}{\sigma}\right)}$$

Para o caso onde $\beta < 1$, a condição para que $y_\varepsilon^w > 0$ é $1 - \beta + \left(1-\frac{\mu}{\rho}\right)\beta M_1 > 0$. É possível verificar que essa condição é válida, de modo que no *steady state*, onde a alíquota do imposto sobre a renda do capital é a que maximiza o bem-estar dos trabalhadores no longo prazo, um pequeno aumento transitório nessa alíquota é vantajoso para os trabalhadores.

No caso de $\frac{H(u)}{H(\rho)} = \frac{\rho}{\mu}$, (A9) pode ser reescrita como (A15). A condição para que $y_\varepsilon^w > 0$ é agora dada por $\frac{\mu\beta}{\rho}\left(\frac{1 - \frac{(1-G)\gamma}{(1-\tau_K)\left((1-\gamma)\theta_k + \frac{\theta_L}{\sigma}\right)}}{1 + \frac{(1-G)}{(1-\tau_K)\theta_k}}\right) < 1$. Para analisar essa condição vamos admitir que $G > \frac{(1-m)\gamma}{(1-m)\gamma + (1-\gamma)\theta_k + \frac{\theta_L}{\sigma}} = \frac{\theta_k + \theta_L}{\theta_k(2-\gamma) + \theta_L\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)}$. Note que G é a proporção da renda total que é liquidamente apropriada por trabalhadores e capitalistas.[15]

$$y_\varepsilon^w = (1-m)\gamma f^{\gamma-1} f' k H(p) \left\{1 + \frac{\beta}{1-\beta}\left(1-\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\left[1 + \frac{(1-G)}{(1-\tau_K)\theta_k}\right]}{M}\right\} \tag{A15}$$

[15] Por sua vez $\theta_k + \theta_L$ é a renda bruta de capitalistas e trabalhadores como proporção da renda total.

É possível verificar que $y_\varepsilon^w > 0$. Assim, parindo do *steady state* inicial e sob a hipótese que $\beta < 1$, um pequeno aumento permanente do imposto sobre a renda do capita é vantajoso para os trabalhadores.