

# Previsão de Risco para Bitcoin e Ethereum: Uma Comparação Usando Função Score

Daniel Francisco Scolaro Cordeiro\*      Fernanda Maria Müller †

Fevereiro, 2024

## Resumo:

Este estudo aborda a previsão de risco do *Value at Risk* (VaR) e *Expected Shortfall* (ES) nas maiores criptomoedas, Bitcoin e Ethereum. Aplicamos o método univariado paramétrico AR-GARCH em diversas distribuições de probabilidade e não paramétrico *Historical Simulation* para fazer a previsão e descrição de risco em diferentes níveis de significância e janelas de estimação. A avaliação da qualidade das medidas previstas foi realizada por meio das funções escores específicas para VaR e ES. Em geral, os resultados destacam o melhor desempenho das distribuições t de Student e t assimétrica para ambos os ativos e métricas analisadas. Adicionalmente, observamos que a distribuição normal apresenta uma melhor performance para janela rolante com maior número de observações considerada. Dessarte, os achados indicam que em condições específicas, há uma mudança de desempenho das distribuições e procedimentos examinados, evidenciando a importância da escolha de distribuições e métodos na gestão de risco em um mercado tão dinâmico e especulativo como o de criptoativos.

**Palavras-Chave:** Criptomoedas, Bitcoin, Ethereum, Previsão de Risco e Função Score.

## Abstract:

This study addresses the risk forecasting of Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES) in the major cryptocurrencies, Bitcoin and Ethereum. We applied the parametric univariate AR-GARCH method to various probability distributions and the non-parametric Historical Simulation to forecast and describe risk at different significance levels and estimation windows. The evaluation of the predicted measures quality was conducted through specific score functions for VaR and ES. Overall, the results highlight the superior performance of Student's t and skewed Student's t distributions for both assets and analyzed metrics. Additionally, we observed that the normal distribution performs better for a rolling window with a larger number of observations considered. Thus, the findings indicate that under specific conditions, there is a shift in the performance of the examined distributions and procedures, emphasizing the importance of choosing distributions and methods in risk management in such a dynamic and speculative market as cryptocurrencies.

**Keywords:** Cryptocurrencies, Bitcoin, Ethereum, Risk forecasting and Score Function.

**JEL:** C22, C52, C53, C58, G17

---

\*Mestrando em Economia Aplicada (PPGE/UFRGS). E-mail: daniel.scolaro@ufpr.br

†Docente em Economia Aplicada (PPGE/UFRGS). E-mail: fernanda.muller@ufrgs.br

# 1 Introdução

A década de 2010 presenciou a ascensão da *blockchain*, uma tecnologia disruptiva que transformou o armazenamento e a transmissão de dados. A *blockchain* é uma base de dados distribuída que permite registros compartilhados e verificados sem intermediários (Küfeoglu e Özkuran, 2019). Sua aplicação principal gerou as criptomoedas, ativos digitais protegidos por essa tecnologia, sendo o Bitcoin (BTC), a primeira em data e em valor de mercado, criada em 2008 (Nakamoto, 2008). O criptoativo, se propôs a ser uma nova alternativa financeira de utilizar a internet para transacionar e armazenar o dinheiro (Giungato et al., 2017). Diferentemente da moeda fiduciária que detém lastro governamental e é regulado por uma autoridade centralizada que mantém a estabilidade cambial, o BTC funciona com base em um sistema de rede ponto a ponto de modo descentralizado que pode ser acessado por qualquer pessoa livremente, já que seu código fonte é aberto. Isto é, não há um órgão controlador ou intermediário – como um sistema bancário –, sendo regido por código computacional em redes de computadores (Meynkhart, 2019).

Além do BTC, outros ativos digitais utilizam a tecnologia blockchain, como o Ethereum (ETH), com seu próprio sistema, criado em 2013, tornou-se a segunda maior força no mercado de criptoativos e dentro das *altcoins*<sup>1</sup>, a maior em capitalização (Coinmarketcap, 2023). O ETH é uma plataforma que viabiliza contratos inteligentes, expande seu uso em áreas como finanças descentralizadas (DeFi) e aplicativos descentralizados (DApps), destacando-se como uma plataforma multifuncional (Buterin, 2013). Pesquisas de Metcalfe et al., 2020 e Kushwaha et al., 2022 destacam o Ethereum como uma plataforma pioneira na aplicação de contratos inteligentes. Esses contratos programáveis têm o potencial de revolucionar os modelos de negócios, reduzindo a dependência de intermediários e automatizando processos, resultando em eficiências significativas nos setores financeiro, jurídico e logístico. Pedrosa Díez (2021) ressalta o papel do Ethereum na promoção da descentralização. Essa descentralização não só desafia modelos convencionais de governança, mas também oferece oportunidades para a inclusão financeira em regiões desfavorecidas, onde o acesso aos serviços bancários é limitado. Os trabalhos de Fenu et al. (2018) e Garg (2022) exploram os impactos financeiros do Ethereum, desde a criação de novos modelos de financiamento, como os ICOs (*Initial Coin Offerings*), até os desafios regulatórios enfrentados por sistemas financeiros baseados em criptomoedas. Com uma capitalização de mercado que já superou em fevereiro de 2024 US\$ 1 trilhão e US\$0.35

---

<sup>1</sup>Altcoin refere-se a qualquer criptomoeda alternativa ao Bitcoin.

trilhão (Coinmarketcap, 2024), respectivamente, o Bitcoin e o Ethereum são inovações capazes de mobilizar cenários econômicos, tecnológicos e financeiros globais.

Contudo, por serem ativos digitais e não possuírem valor intrínseco ou ter o governo como um auxiliar para manter seu valor, o preço das criptomoedas é formado sobretudo por sua alta especulação, o qual gera volatilidade e interesse dos investidores, especialmente como um ativo com propriedades diferentes do dinheiro e investimentos tradicionais, que pode oferecer grandes recompensas, bem como alto risco (Liu et al., 2020). O mercado de criptoativos é conhecido por sua volatilidade excepcionalmente alta, um fenômeno que se manifesta em flutuações de preço substanciais em curtos períodos. A volatilidade é um problema importante para os investidores porque pode levar a perdas significativas. Por exemplo, se os retornos do ETH forem negativos em um determinado período, os investidores podem perder dinheiro, e, por extensão, a confiança no ativo como uma forma viável de transação e investimento. Dentro das análises financeiras, a volatilidade, ou desvio padrão dos retornos, é a principal métrica de risco, entretanto se os dados financeiros não forem normalmente distribuídos, a sua utilização como medida de risco pode levar a conclusões enganosas que subestimam sistematicamente a probabilidade de retornos negativos (Daníelsson, 2011).

Pelas perdas ocorrerem com elevada probabilidade, a previsão precisa das medidas de risco é um aspecto relevante para a gestão de risco. Para fazer essa avaliação dos retornos, será utilizado as medidas de risco *Value at Risk* (VaR) e *Expected Shortfall* (ES). O VaR tem sua interpretação como a perda máxima esperada durante um período de tempo dado um nível de significância. Enquanto a ES apresenta o valor esperado das perdas que excedem quantil de interesse do VaR (McNeil et al., 2015). Tais métricas oferecem um arcabouço robusto para análises e estratégias de mitigação das perdas, sendo as principais ferramentas para computar a previsão do risco na determinação de capital regulatório e literatura acadêmica (Basel Committee on Banking Supervision, 2013). A utilização de ambas as métricas para quantificar o risco de criptomoedas vem sendo feito por diversos estudos, como de Nehkhili e Sultan (2020), Jiang et al. (2022) e Lawuobahsumo et al. (2023). Donde não se chegou em uma concordância de estimação para qual seria um modelo ou medida sobressaliente aos outros (Trucíos, 2019; Troster et al., 2019; Acereda et al., 2020; Müller et al., 2022).

Para esse estudo, há dois métodos distintos para previsão do VaR e ES, paramétrico e não paramétrico. No método paramétrico, essas previsões serão comparadas minuciosamente com base em diferentes distribuições de probabilidade estimadas, fundamentadas na teoria de modelos

AR-GARCH (*Autoregressive - Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) univariado, um dos métodos estatísticos mais robustos para modelagem e previsão de risco em séries temporais para criptoativos (Troster et al., 2019; Trucíos, 2019). A previsão de risco não paramétrica será por *Historical Simulation* (HS), que utiliza a distribuição empírica de dados para calcular previsões de risco. Nenhum modelo estatístico e estimativa de parâmetro é necessária para esse método (Daniélsson, 2011). Isto posto, o trabalho irá comparar os resultados dos diferentes métodos, janelas de estimação, níveis de significância e distribuições para verificar qual é a abordagem mais adequada para prever o risco dos retornos do BTC e ETH em cada cenário univariado. Em que, a avaliação da qualidade das medidas previstas será feita através de *score functions* recomendadas por Fissler e Ziegel (2016) e Gerlach et al. (2017). Com isto posto, o objetivo primário deste estudo é comparar o risco previsto com enfoque nos dois maiores criptoativos, Bitcoin e Ethereum.

Este artigo contribuiu para literatura nascente de estimação de risco de calda nas criptomoedas e comparação de diversos procedimentos para previsão de risco presente em Troster et al. (2019), Liu et al. (2020), Acereda et al.(2020) e Müller et al. (2022). Bem como, tem um aspecto focalizado na comparação de risco das duas maiores criptomoedas do mercado. Os resultados deste estudo podem auxiliar os investidores a tomarem decisões mais informadas sobre o investimento nestes ativos, tal qual indicar um setup mais adequado para modelar a volatilidade dos retornos do BTC e do ETH.

Após essa introdução, a segunda seção apresentará as medidas de riscos utilizadas e suas *score functions*. A terceira parte adentrará a metodologia, modelo e dados utilizados para a análise. Na quarta seção será feita a aplicação e discutida os resultados e por fim, na quinta e última seção, haverá as conclusões gerais.

## **2 Medidas de Risco e *Funções Score***

Iremos trabalhar no espaço configurado por Artzner et al. (1999), respeitando as teorias axiomáticas de Kromer et al. (2016) e Föllmer e Weber (2015). Em que, o espaço do valor presente líquido de posições financeiras e das medidas de risco são frequentemente retratados como o espaço de variáveis aleatórias definido por  $\mathbb{X}$ . Onde,  $\mathbb{X} = L^1(\Omega, F, \mathbb{P})$ , em que  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  é o espaço de probabilidade. Nele são estabelecidos a função de distribuição acumulada e

o quantil a esquerda de uma variável aleatória  $X \in \mathbb{X}$  são definidas, nesta ordem, como:  $F_X(x) = \mathbb{P}(x \leq x) \forall x$  e  $F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\} \forall \alpha \in (0, 1)$ .

Dentro do mapa da medida de risco  $\rho : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Para um retorno  $X \in \mathbb{X}$  e no nível de significância  $\alpha \in (0, 1)$ , o VaR e a ES de  $X$  são definidos respectivamente como:

$$VaR^\alpha(X) = -F_X^{-1}(\alpha) \equiv -\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X^{-1}(x) \geq \alpha\}, \forall X \in \mathbb{X}. \quad (1)$$

$$ES^\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR^u(X) du, \forall X \in \mathbb{X}. \quad (2)$$

O *Value at Risk* se estabelece como uma métrica estatística fundamental, responsável por avaliar o risco associado a um investimento ou portfólio em um intervalo de tempo específico, a um nível predefinido de confiança. Sua representação corresponde à perda máxima esperada, expressa tanto em valores monetários quanto em percentuais, que um ativo ou carteira pode enfrentar em um período determinado, considerando a confiabilidade estabelecida (Daníelsson, 2011). O cálculo do VaR se baseia no valor da perda esperada, levando em consideração a ocorrência do evento de risco, tipicamente definido como a perda de uma proporção específica do valor do ativo (Righi e Ceretta, 2014). Como este é um trabalho de análise univariada, a despeito do VaR não ser uma medida convexa, logo, não considerar o princípio da diversificação destacados por Artzner et al. (1999), não há o pretexto que perturbaria a métrica de risco para a montagem de um portfólio multivariado. Entretanto, a medida não considerar as perdas abaixo do seu nível de significância, é uma adversidade relevante da medida (Müller et al., 2023).

Por sua vez, a *Expected Shortfall*, também conhecido como *Conditional VaR* (CVaR), constitui-se como uma medida de risco que captura o valor esperado das perdas que ultrapassam o valor estimado pelo VaR em um intervalo de confiança predefinido (Daníelsson, 2011). Ao contrário do VaR, a ES considera não apenas faz a quantificação das perdas até um determinado ponto, mas também pondera as perdas além desse limiar de interesse. Por consequência, para um mesmo nível de significância e ativo, a ES será sempre maior ou igual ao VaR (Müller et al., 2022). Dessa forma, além de ser convexa, a ES oferece outra perspectiva ao estimar a média das perdas que se situam além do quantil de interesse. Representando a perda média esperada, considerando a ocorrência do evento de risco em um determinado horizonte de tempo, com uma probabilidade estabelecida (McNeil et al., 2015). Geralmente, esse evento de risco é definido como a perda de uma proporção específica do valor do ativo (Righi e Ceretta, 2014).

Com ambas as métricas descritas, decorremos para as propriedades estatísticas. Para He

et al. (2022) dois atributos devem ser consideradas para uma medida de risco, a elicibilidade e a robustez. Uma medida elicítavel permite comparar dois modelos estatisticamente significativos e suas medidas com base em uma *score function*, que ranqueia qual o melhor modelo para cada cenário (Schlag e Weele, 2015). Enquanto, a medida robusta acomoda incerteza no modelo, onde poucos dados discrepantes (*outliers*) não afetam elevadamente estimativa (He et al., 2022).

Em especial, a propriedade de elicibilidade é importante para ser possível comparar diferentes procedimentos de previsão de risco pelas *scoring functions* (Fissler e Ziegel, 2016). Isto é, a medida de risco  $\rho : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  é elicítavel se existe pelo menos uma score function  $S_\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+, \forall X, y \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\rho(X) = -\arg \min_{y \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[S_\rho(X, y)], \forall X \in \mathbb{X}. \quad (3)$$

Em que, além de otimizar o risco, essa mesma score function  $S_\rho, \forall x, y \in \mathbb{R}$  deve respeitar as três seguintes propriedades para ser consistente:

1.  $S_\rho(x, y)$  é continua em  $y$ .
2.  $S_\rho(x, y) = 0$  se e somente se  $x = y$ .
3.  $y \mapsto S_\rho(x, y)$  é não-crescente para  $y < x$  e não decrescente para  $y > x$ .

O VaR é elicítavel e robusto, enquanto a ES é apenas elicítavel condicionada a certa condição, chamado de '*jointly elicitable*' (Fissler e Ziegel, 2016). Comparamos o desempenho das diferentes previsões utilizando como ferramenta estas funções.

Sob a *score function* abaixo de Fissler e Ziegel (2016), o VaR é elicítavel:

$$S_{VaR^\alpha}(x, y) = \alpha(x - y)^+ + (1 - \alpha)(x - y)^-. \quad (4)$$

Enquanto a ES é *jointly elicitable* com o VaR. Isto é, o mapa  $\rho(X) = (VaR^\alpha(X), (ES^\alpha(X)))$  é elicítavel  $\forall X \in \mathbb{X}$ . Sob a *score function* abaixo de Gerlach et al. (2017), a ES é elicítavel em  $\mathbb{R}^3$ :

$$S_{ES^\alpha}(x, y, z) = y(\mathbf{1}_{x < y} - \alpha) - x\mathbf{1}_{x < y} + e^z \left( z - y + \frac{\mathbf{1}_{x < y}}{\alpha}(y - x) \right) - e^z + 1 - \log(1 - \alpha). \quad (5)$$

### 3 Procedimentos Metodológicos e Dados

Os dados utilizados para fazer os códigos são os preços diários ajustados do Bitcoin e Ethereum no período de seis anos, entre 10 de fevereiro de 2018 a 11 de fevereiro de 2024. Marcando acontecimentos, antes do início da pandemia da COVID-19, passando por ela e tendo o dia final que marca um mês da aprovação do ETF (*Exchange-Traded Fund*) do BTC pela Comissão de Valores Mobiliários dos EUA (Gensler, 2024). Os dados foram obtidos da plataforma *Yahoo Finance* pelo pacote *quantmod* no R de Ryan et al. (2023), bem como toda estimação e previsão foi feita pelo mesmo programa (R Core Team, 2021). Para tornar a série estacionária e ergódica, é transformado os preços em log-retornos diários ajustados pela fórmula:

$$X_t = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \times 100 \quad (6)$$

Em que,  $P$  é o preço de fechamento ajustado e  $t$  é o índice de tempo.

Conforme mostrado na Figura 1, este período de amostra captura os clusters de volatilidade, refletindo momentos de calma e de grande turbulência nos preços dos ativos ao longo do tempo (McNeil et al., 2015). Em que, ambos os retornos do BTC e ETH tem variabilidade e padrões semelhantes. Por exemplo, no início da pandemia da COVID-19 houve um impacto negativo significativo no mercado de criptomoedas com a queda acentuada em 2020. Algo que ocorreu também no mercado global, porém houve uma liquidação massiva em ativos de maior risco como o mercado de criptoativos (Mnif et al., 2020).

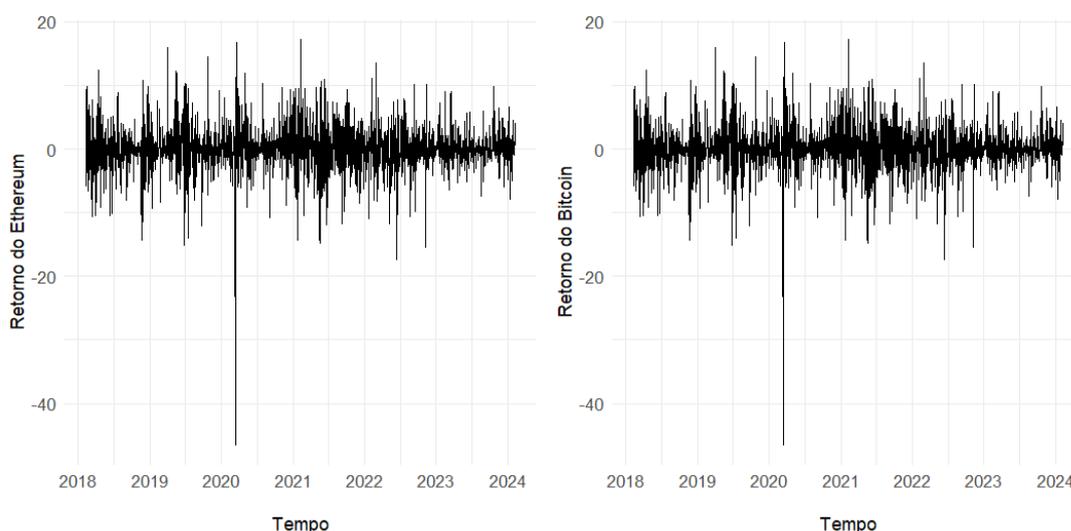


Figura 1: Gráficos de retornos do Bitcoin e Ethereum durante fevereiro de 2018 a fevereiro de 2024

Em relação as estatísticas descritivas do BTC e ETH na Tabela 1, percebemos que a série

exibe características análogas às dos retornos de ações e índices de mercado, manifestando-se com assimetria negativa e curtose acima de 3, ou seja, são séries leptocúrticas, característica comum para dados financeiros. Entretanto como estamos lidando com um mercado com maior incerteza, esta curtose é bem mais elevada, donde no mercado tradicional dificilmente passa de 8, para os dois criptoativos passam de 12 (Müller et al., 2023). Outro destaque é a amplitude entre os valores mínimos e máximos, uma característica proeminente do mercado analisado. Em que para o ETH há tanto um valor máximo, quanto mínimo de retornos superiores ao BTC, porém com um maior risco, quantificado nesse caso pelo desvio padrão. Por outro lado, o BTC tem retornos médios e medianos maiores.

Tabela 1: Estatísticas Descritivas dos retornos diários em dólares do Bitcoin e do Ethereum entre fevereiro de 2018 e fevereiro de 2024

	Mínimo	Máximo	Média	Mediana	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose
ETH-USD	-55.07	23.07	0.05	0.06	4.62	-1.06	12.38
BTC-USD	-46.47	17.18	0.08	0.08	3.57	-1.04	15.64

Para fazer primeiro a estimação e depois a previsão das métricas de risco será abordados dois métodos, não paramétrico e paramétrico, com foco especial no segundo. Primeiro, o modelo de previsão de risco não parametrizado refere-se a *Historical Simulation*, que é um método simples para prever o risco. Portanto, cada observação apresenta o mesmo peso para a previsão HS (Daníelsson, 2011). Nesse tipo de procedimento, nenhum modelo e parâmetro estimado é assumido, utilizando apenas a distribuição empírica dos dados para estimação de risco, com ausência de suposições probabilísticas (Cabedo e Moya, 2003). Por outro lado, o método paramétrico tem como pilar a estimação com base em assumir que a variância condicional segue distribuições de probabilidades específicas para fazer as previsões. Isso viabiliza a estimação dos parâmetros do modelo através de métodos estatísticos clássicos, como o método dos mínimos quadrados e nos modelos GARCH, via máxima verossimilhança (McNeil et al., 2015).

O GARCH é um modelo estatístico utilizado na modelagem de séries temporais financeiras para capturar a volatilidade heteroscedástica condicional, ou seja, a variabilidade da volatilidade ao longo do tempo. Em termos do arcabouço estatístico, os modelos GARCH fornecem dinâmicas de movimento para a dependência na variação temporal condicional dos parâmetros de distribuição da variância, na tentativa de capturar fenômenos como autocorrelação nos retornos e retornos ao quadrado (Bollersley, 1986). Na utilização da ponderação otimizada de registros históricos para antecipar a volatilidade, os rendimentos em  $t$  são condicionados

pelos retornos em dias anteriores, sendo que quanto mais antiga a observação, menor o impacto (Epaphra, 2017).

Dessarte, para a estimação paramétrica de medidas de risco o irá considerar a média condicional autorregressiva (AR), além da variância. Seguindo um modelo AR(p)-GARCH(q,s) o qual é normalmente utilizado em conjunto com a suposição do ativo seguir forma linear,  $X_{i,t} = \mu_{i,t} + \sigma_{i,t}Z_{i,t}$  para todo  $i$  e  $t$ , onde  $\mu_{i,t}$  e  $\sigma_{i,t}$  são a média e o desvio padrão do ativo  $i$  condicionado às informações disponíveis no momento  $t$  e  $Z_{i,t}$  é um processo de ruído branco para o qual assumimos várias distribuições de probabilidade.

Aprimorando o modelo para AR(1)-GARCH(1,1), em conformidade com a literatura de previsão de risco, que consistentemente demonstra a superioridade de modelos nos quais os *lags* comuns para os valores condicionais do modelo são uniformemente estabelecidos em um, em comparação com outros modelos univariados que apresentam *lags* distintos (Righi e Ceretta, 2015; Troster et al., 2019; Guo, 2021; Garcia-Jorcano e Novales, 2021). Onde o modelo AR(1) é suficiente para modelar  $\mu_t$  e produzir inovações serialmente não correlacionadas para todos os ativos (Garcia-Jorcano and Novales, 2021). E o GARCH (1,1) é competitivo de acordo com o critério de informação de Akaike (AIC) para todos os ativos e é uma ordem comum para prever riscos (Troster et al. 2019; Müller et al., 2022)

Continuando, modelo AR(1)-GARCH(1,1) segue o sistema de equações abaixo:

$$X_{i,t} = \omega_0 + \omega_1 X_{i,t-1} + \epsilon_{i,t} = \mu_{i,t} + \epsilon_{i,t}. \quad (7)$$

$$\sigma_{i,t}^2 = a_0 + a_1 \cdot \epsilon_{i,t-1}^2 + a_2 \sigma_{i,t-1}^2 \quad (8)$$

$$\epsilon_{i,t} = \sigma_{i,t} Z_{i,t}. \quad (9)$$

Onde temos que  $Z_{i,t} \sim F_k(\theta)$  é um processo de ruído branco com distribuição  $F_k(\theta)$ . A letra  $k$  atribui as distribuições que estamos considerando e  $\theta$  é um vetor de parâmetros, incluindo média zero, variância unitária e parâmetros adicionais que variam de acordo com a distribuição de probabilidade. Enquanto,  $\sigma_{i,t}^2$  e  $\epsilon_{i,t}$  são respectivamente, a a variância condicional e o termo de erro do ativo  $i$  no tempo  $t$ . Por fim,  $\omega_0$  e  $\omega_1$  são os parâmetros do modelo AR e  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  são os parâmetros do modelo GARCH.

Estas que serão, normal (norm), t de Student (std) e erro generalizado (ged), bem como suas versões assimétricas, normal assimétrica (snorm), t de Student assimétrica (sstd) e erro generalizado assimétrico (sged). Para uma explicação mais detalhada e uma representação

visual das funções de densidade de probabilidade dessas distribuições, é aconselhável consultar Ghalanos (2023). Além disso, as estimativas foram conduzidas utilizando seu pacote *rugarch* na linguagem de programação R.

Este número elevado de distribuições é utilizado assumindo os resultados encontrados por Garcia-Jorcano e Novales (2021), em que, a distribuição de probabilidade tem uma maior influencia na qualidade da previsão do que o modelo de volatilidade condicional. No mesmo trabalho é encontrado que a assimetria e o formato da distribuição de probabilidade são também mais importantes que incluir efeitos de alavancagem de volatilidade na performance do VaR (Garcia-Jorcano e Novales, 2021). Ao passo que em Müller et al. (2022), os resultados para criptoativos de outros modelos de volatilidade como *Extreme Value Theory* (EVT) e *Generalized Autoregressive Score* (GAS) foram considerados, porém seus resultados foram inferiores ao do GARCH.

Os parâmetros GARCH (1,1) tem duas restrições, primeiro a de não-negatividade,  $a_0 > 0$  e  $a_1, b_1 \geq 0$ , ocasionando retornos positivos. E a estacionariedade da covariância pela restrição  $a_1 + a_2 < 1$ . Após a estimação dos parâmetros condicionais, pela análise univariadas, utilizando a média ( $\mu_{i,t+1}$ ) e desvio padrão ( $\sigma_{i,t+1}$ ) do próximo período, podemos fazer a previsão do risco por *one-step-ahead forecast* de  $VaR_{t+1}^\alpha$  e  $ES_{t+1}^\alpha$  :

$$VaR_{t+1}^\alpha = -\mu_{i,t+1} + VaR^\alpha(Z_{t+1}^k). \quad (10)$$

$$ES_{t+1}^\alpha = -\mu_{i,t+1} + ES^\alpha(Z_{t+1}^k). \quad (11)$$

Deste modo, os valores previstos os quais dependem muito da distribuição do modelo estimadas com relação a distribuição de probabilidade presente  $VaR^\alpha(Z_{t+1}^k)$  e  $ES^\alpha(Z_{t+1}^k)$ , as quais tem média zero e variância unitária de acordo distribuídas para  $F_k(\theta)$ .

Para os níveis de significância  $\alpha$ , serão utilizados os recomendados pelo Comitê da Basileia para a previsão do VaR e ES que são de 1% e 2,5%, na devida ordem. Em que, é aplicada uma estimação de janela rolante ( $W_q$ ) de 250 dias, aproximadamente um ano em dias úteis– mínimo recomendado pelo Comitê da Basileia (Basel Committee on Banking Supervision, 2013). Adicionalmente, será utilizado o  $\alpha = 5\%$ , bem como, 500 e 1000 dias de observação para outras janelas rolantes, os quais são recomendados pela literatura (Müller et al., 2023). Tamanhos de janela maiores têm prós e contras. Eles são menos sensíveis a observações extremas únicas, mas as previsões de VaR levam mais tempo para se ajustar a mudanças estruturais no risco

(Daniélson, 2011).

Consideramos as três janelas, onde as últimas 250, 500 e 1000 observações foram usadas para obter o valor da previsão de risco de cada dia no período fora da amostra. Com o tempo ( $T$ ) contendo um total de  $T = 2192$  retornos. Com  $T$  como referência, deduzindo as janelas rolantes, teremos 1942, 1692 e 1192 como as três janelas de estimação possíveis em  $T - W_q$  para as *one-day-ahead risk forecasts*. Em que, o desempenho de cada distribuição e método na previsão da medida de risco é avaliado pela perda realizada de Müller et al. (2022):

$$L_k^{VaR}(X) = (T - W_q)^{-1} \sum_{q=1}^{T-W_q} S_{VaR^\alpha}(\rho_{W_q}^k(X), X_{qW_q+1}) \quad (12)$$

$$L_k^{ES}(X) = (T - W_q)^{-1} \sum_{q=1}^{T-W_q} S_{ES^\alpha}(\rho_{W_q}^k(X), X_{qW_q+1}) \quad (13)$$

Em que,  $S_{VaR^\alpha}$  e  $S_{ES^\alpha}$  são as funções *score* do VaR e ES das equações (4) e (5), na devida ordem. Há uma relação negativa entre a perda realizada e a medida de risco, onde quanto maior a perda realizada, pior é o desempenho da previsão de risco analisada. Por satisfazer a propriedade de elicibilidade, as *score functions* das medidas de risco VaR e ES, podem ser utilizadas para verificar e comparar a previsão, não sendo necessário o *backtesting*, no qual, a menor função *score* indica o menor erro de previsão (Ziegel, 2016; Müller et al., 2022).

## 4 Resultados

Para explorar as estatísticas descritivas das previsões de risco do Bitcoin e Ethereum, estão representadas as Tabelas 6, 7 e 8 com janela rolante de  $W_{q_1} = 250$ ,  $W_{q_2} = 500$  e  $W_{q_3} = 1000$ , respectivamente. Nelas foram feitas previsões do VaR e ES para os níveis de significância de 1% e 2.5% <sup>2</sup>, níveis mais relevantes para o Comitê da Basileia (Basel Committee on Banking Supervision, 2013).

Começando pela Tabela 6, a amplitude das previsões, os desvios padrão, as assimetrias e as curtoses na distribuição normal e normal assimétrica são as duas maiores para as criptomoedas em comparação com qualquer outro procedimento, independentemente do nível de significância e medida de risco prevista. Especialmente a curtose, está a mais de 30 pontos percentuais acima de qualquer outra distribuição. Por outro lado, com  $VaR_{t+1}^{1\%}$ , as médias destas mesmas

<sup>2</sup>Foi estimada e realizada previsão dos dados para o nível de 5%, porém, por questão de brevidade foram omitidos e estão disponíveis a pedido.

distribuições são as menores, a normal com 10.07 e 7.76 e a normal assimétrica com 10.58 e 7.92 para o Ethereum e o Bitcoin respectivamente. Indicando para o VaR nesta janela, uma possível inconsistência destas distribuições com relação à média de risco do ativo, por apresentar desvios e valores máximos e mínimos maiores. Em direção oposta, as distribuições t de Student e t de Student assimétrica no VaR detinham as menores amplitudes entre as distribuições, entretanto, ao considerar mais que apenas o quantil pela ES neste período, ambas as distribuições t tiveram um acréscimo considerável em suas extensões de máximo e mínimo. Isso em concordância com as outras estatísticas descritivas altas, especialmente as médias nas previsões de risco, a qual tornou-se a maior, apresentam concordância com as relações da métrica de maior risco de mercado.

Continuando para a 7 com janela rolante de 500 amostras de tempo, a curtose e a assimetria em geral cresceram nas distribuições para as métricas avaliadas, com exceção da distribuição normal e normal assimétrica que houve uma suavização. Com relação as distribuições de erro generalizado e erro generalizado assimétrico, elas apresentam um comportamento intermediário em relação as outras, não tendo dados que se sobressaem nas medidas. Apresentando dados de assimetria e curtose consideravelmente maiores que a distribuição t de Student assimétrica para o VaR e ES das Tabelas 6 e 7 para ambos os ativos e níveis de significância. Enquanto, os desvios padrão e as médias da previsão de risco, seguem o lado contrário, sendo moderadamente menores que a distribuição t assimétrica, para quaisquer ativos e níveis analisados. Contudo, as amplitudes não apresentam uma tendência nestas duas janelas de 250 e 500 dias, variando conforme a medida, ativo e alfa.

Em contrapartida, a estimação por *Historical Simulation* apresentou os dados com as menores amplitudes para as métricas analisadas das Tabelas 6 a 8. Onde, por exemplo, para janela rolante de 250 dias e  $VaR_{t+1}^{1\%}$ , a HS apresentou 11.87 e 8.05 pontos percentuais para o ETH e BTC nessa ordem, comparando com a menor amplitude deste mesmo ambiente, a distribuição t de Student assimétrica gerou cerca de 41.19 e 18.43 pontos percentuais. Ao aumentar os níveis de significância e os dias da janela, houve essa mesma tendência, porém, com diminuição da disparidade em relação aos métodos paramétricos. A previsão não paramétrica, igualmente gerou as menores assimetrias e curtoses. Em que, apenas três casos houve assimetria positiva, para as  $ES_{t+1}^{1\%}$  nas janelas rolantes de 250 e 500 dias em ambos os ativos e para o  $VaR_{t+1}^{2.5\%}$  na janela de 1000 observações, somente para o ETH, nas demais foi o único procedimento que retornou valores negativos. Para a curtose, também houve a frequente aparição de valores negativos sem

um padrão nítido, em discordância com qualquer outra previsão feita pelos modelos AR(1)-GARCH(1,1) que apenas retornaram curtoses positivas. Especialmente, nas tabelas referentes a  $W_{q_1} = 250$  e  $W_{q_2} = 500$ , a curtose das distribuições paramétricas se destacam, sendo na maioria delas maiores que 8 e 20 para qualquer nível  $\alpha$  das medidas de risco dos ativos analisados. Em troca, pela sua característica de não discriminar o tempo mais próximo com maior peso, equivalendo os retornos antigos e novos, a HS teve as maiores médias de previsão de risco para qualquer referência analisada (Daníelson, 2011).

Passando para a Tabela 8 com janela rolante de 1000 observações, há uma suavização da distância entre previsão mínima e máxima de todas as distribuições, bem como a queda dos desvios padrão, enquanto a média do risco permanece alta por conta dos ativos de alto risco que estamos lidando. Isto anda em concordância com a teoria acadêmica, em que, ao aumentar a janela, há um ganho de informação, ampliando a precisão dos instrumentos de previsão (McNeil at al., 2015). Há também uma queda vertiginosa da assimetria e curtose para todos os métodos paramétricos, com a assimetria não ultrapassando 2 e a curtose sendo menor que 4 para a maioria dos procedimentos. Movimento que diminuí o impacto do formato da distribuição, características que em conjunto parecem tender para uma distribuição normal, algo não comum para dados financeiros por conta do formato das caudas serem gordas e pesadas como em uma distribuição t (Daníelson, 2011; McNeil at al., 2015).

Para uma avaliação mais precisa dos modelos, as Tabelas 2 e 3 apresentam as estatísticas de perda realizada geradas pelas funções score para as previsões das medidas de risco VaR do Ethereum e Bitcoin, respectivamente. Da mesma forma, esse procedimento é repetido para a ES nas Tabelas 4 e 5. Assim, quanto menor o resultado, melhor é o desempenho do modelo escolhido para um determinado nível de significância e janela de estimação.

Tabela 2: Perda realizada do  $VaR_{t+1}^\alpha$  previsto para os retornos do Ethereum ao aplicar a equação (12). Com observações de fevereiro de 2018 a fevereiro de 2024.

	ETH-HS	ETH-norm	ETH-std	ETH-sstd	ETH-snorm	ETH-ged	ETH-sged
$\alpha = 1\%$ e $Wq = 250$	19.19	19.82	18.91	<b>18.82</b>	19.78	19.06	19.25
$\alpha = 2.5\%$ e $Wq = 250$	36.03	35.15	34.69	<b>34.67</b>	35.42	34.96	35.17
$\alpha = 5\%$ e $Wq = 250$	55.61	55.45	<b>54.55</b>	54.70	55.92	54.78	55.10
$\alpha = 1\%$ e $Wq = 500$	19.56	19.36	<b>18.49</b>	18.59	19.06	18.65	18.77
$\alpha = 2.5\%$ e $Wq = 500$	35.84	34.29	<b>34.17</b>	34.30	34.36	34.28	34.51
$\alpha = 5\%$ e $Wq = 500$	55.08	54.16	53.67	<b>53.63</b>	54.23	53.86	53.79
$\alpha = 1\%$ e $Wq = 1000$	17.53	16.45	<b>15.80</b>	15.87	16.23	15.90	15.98
$\alpha = 2.5\%$ e $Wq = 1000$	33.66	<b>30.74</b>	30.84	30.84	30.75	30.90	30.96
$\alpha = 5\%$ e $Wq = 1000$	53.11	50.25	50.28	50.37	50.24	<b>50.15</b>	50.20

Nota: Os valores estão multiplicados por 100. Para janelas rolantes de  $Wq = 250$ ,  $Wq = 500$  e  $Wq = 1000$  interagindo com os níveis de significância  $\alpha = 1\%$ ,  $\alpha = 2.5\%$  e  $\alpha = 5\%$ . Com o  $VaR_{t+1}^\alpha$  previsto sendo estimado por Historical Simulation(HS) não paramétrico. E parametrizado por AR(1)-GARCH(1,1) com as distribuições em ordem, normal (norm), t de Student (std), t de Student assimétrica (sstd), normal assimétrica (snorm), erro generalizado (ged) e erro generalizado assimétrico (sged). Valores em negrito representam o menor score, ou seja, a melhor modelagem de risco entre as propostas.

Tabela 3: Perda realizada do  $VaR_{t+1}^\alpha$  previsto para os retornos do Bitcoin ao aplicar a equação (12). Com observações de fevereiro de 2018 a fevereiro de 2024.

	BTC-HS	BTC-norm	BTC-std	BTC-sstd	BTC-snorm	BTC-ged	BTC-sged
$\alpha = 1\%$ e $Wq = 250$	<b>14.90</b>	16.42	15.00	15.08	16.12	15.12	15.17
$\alpha = 2.5\%$ e $Wq = 250$	27.45	27.92	<b>27.01</b>	27.06	27.74	27.21	27.32
$\alpha = 5\%$ e $Wq = 250$	42.79	42.72	<b>41.41</b>	41.60	42.73	41.80	41.98
$\alpha = 1\%$ e $Wq = 500$	<b>15.11</b>	15.58	15.28	15.29	15.52	15.25	15.34
$\alpha = 2.5\%$ e $Wq = 500$	27.55	27.60	27.32	<b>27.24</b>	27.76	27.62	27.73
$\alpha = 5\%$ e $Wq = 500$	42.63	42.83	<b>42.005</b>	42.006	43.06	42.28	42.38
$\alpha = 1\%$ e $Wq = 1000$	13.08	13.11	12.92	12.91	13.20	<b>12.86</b>	12.88
$\alpha = 2.5\%$ e $Wq = 1000$	25.81	<b>24.64</b>	25.01	25.05	24.92	25.21	25.23
$\alpha = 5\%$ e $Wq = 1000$	41.47	<b>39.66</b>	39.72	39.78	39.99	39.95	40.11

Nota: Mesmo procedimento o qual foi descrito na Tabela 2.

Os resultados da Tabela 2, expressam que para o ETH as distribuições t e t assimétrica tendem a ser os melhores modelos de previsão do criptoativo, especialmente ao considerar as janelas rolantes de 250 e 500 dias, onde todas as melhores pontuações foram nestas distribuições. Ao aumentar a janela para 1000 observações, há uma mudança de padrão para níveis de significância maiores, entretanto para  $\alpha = 1\%$ , estimativa mais conservadora do risco, novamente a distribuição t se destaca. Ao contrário do padrão encontrado na tabela anterior, os resultados da Tabela 3 expressam que ao depender da conjectura de tempo e quantil de interesse analisado o modelo do BTC pode variar. Nos dois cenários de menor amostra com  $\alpha = 1\%$ , o modelo não

paramétrico foi superior a quaisquer previsões parametrizadas. Ao aumentar a tolerância nos mesmos cenários, novamente os modelos de distribuição t se sobressaíram, especialmente o t padrão. E com as significâncias maiores e na maior  $W_q$ , os dados apontaram para a distribuição normal.

A Tabela 4, semelhante a Tabela 2, a efetividade da distribuição t de Student é nítida. Para a ES, sua versão sem assimetria ainda é superior para previsão de risco do Ethereum, sendo o melhor modelo cinco vezes. E ao considerar o modelo assimétrico, repete-se as melhores pontuações nas mesmas linhas que a Tabela 2. Para os maiores níveis de significância em  $W_{q3} = 1000$ , as melhores previsões de risco são as distribuições normais assimétricas. Por fim, na Tabela 5, o método não paramétrico se evidencia, correspondendo ao melhor modelo por três vezes. As distribuições t e t assimétrica novamente performam bem, especialmente com níveis de significância maiores. Enquanto, outra vez para janela de maior observação nos níveis de 2.5% e 5%, a distribuição normal performa melhor para o BTC.

Tabela 4: Perda realizada do  $ES_{t+1}^\alpha$  previsto para os retornos do Ethereum ao aplicar a equação (13). Com observações de fevereiro de 2018 a fevereiro de 2024.

	ETH-HS	ETH-norm	ETH-std	ETH-sstd	ETH-snorm	ETH-ged	ETH-sged
$\alpha = 1\%$ e $W_q = 250$	120.07	121.19	119.83	<b>119.75</b>	121.22	120.18	120.47
$\alpha = 2.5\%$ e $W_q = 250$	138.23	137.68	<b>137.01</b>	137.02	137.99	137.43	137.73
$\alpha = 5\%$ e $W_q = 250$	160.05	160.12	<b>159.15</b>	159.32	160.62	159.48	159.88
$\alpha = 1\%$ e $W_q = 500$	120.44	120.62	<b>119.44</b>	119.55	120.17	119.70	119.84
$\alpha = 2.5\%$ e $W_q = 500$	138.07	136.75	<b>136.53</b>	136.66	136.74	136.68	136.93
$\alpha = 5\%$ e $W_q = 500$	159.58	158.80	158.30	<b>158.25</b>	158.81	158.51	158.45
$\alpha = 1\%$ e $W_q = 1000$	118.39	117.78	<b>116.87</b>	116.94	117.46	117.16	117.21
$\alpha = 2.5\%$ e $W_q = 1000$	135.83	133.19	133.27	133.26	<b>133.15</b>	133.41	133.45
$\alpha = 5\%$ e $W_q = 1000$	157.52	154.774	154.86	154.95	<b>154.74</b>	154.771	154.82

*Nota: Os valores estão multiplicados por 100. Para janelas rolantes de  $W_q = 250$ ,  $W_q = 500$  e  $W_q = 1000$  interagindo com os níveis de significância  $\alpha = 1\%$ ,  $\alpha = 2.5\%$  e  $\alpha = 5\%$ . Com a  $ES_{t+1}^\alpha$  previsto sendo estimado por Historical Simulation(HS) não paramétrico. E parametrizado por AR(1)-GARCH(1,1) com as distribuições em ordem, normal (norm), t de Student (std), t de Student assimétrica (sstd), normal assimétrica (snorm), erro generalizado (ged) e erro generalizado assimétrico (sged). Valores em negrito representam o menor score, ou seja, a melhor modelagem de risco entre as propostas.*

A despeito do VaR e da ES ter abordagens matemáticas distintas, com o VaR representando um valor único, com maior sensibilidade à distribuição de probabilidade e a ES ser uma medida cumulativa de expectativa, sendo mais estável a mudança de distribuições. Os resultados deste estudo estão alinhados com a literatura, indicando que as estimativas de ambas as medidas seguem um padrão semelhante na previsão de risco dos ativos pelas perdas realizadas, especialmente

Tabela 5: Perda realizada do  $ES_{t+1}^\alpha$  previsto para os retornos do Bitcoin ao aplicar a equação (13). Com observações de fevereiro de 2018 a fevereiro de 2024.

	BTC-HS	BTC-norm	BTC-std	BTC-sstd	BTC-snorm	BTC-ged	BTC-sged
$\alpha = 1\%$ e $Wq = 250$	<b>115.85</b>	119.59	116.63	116.38	119.28	117.00	116.55
$\alpha = 2.5\%$ e $Wq = 250$	<b>129.79</b>	131.70	130.14	129.90	131.52	130.36	130.18
$\alpha = 5\%$ e $Wq = 250$	147.42	148.34	<b>146.73</b>	146.74	148.34	147.07	147.13
$\alpha = 1\%$ e $Wq = 500$	<b>116.03</b>	116.65	116.22	116.23	116.62	116.19	116.30
$\alpha = 2.5\%$ e $Wq = 500$	129.87	130.04	129.73	<b>129.65</b>	130.24	129.99	130.15
$\alpha = 5\%$ e $Wq = 500$	147.31	147.54	146.88	<b>146.85</b>	147.80	147.01	147.18
$\alpha = 1\%$ e $Wq = 1000$	113.99	114.17	<b>113.923</b>	113.924	114.21	114.01	114.04
$\alpha = 2.5\%$ e $Wq = 1000$	128.10	<b>126.96</b>	127.41	127.46	127.19	127.71	127.74
$\alpha = 5\%$ e $Wq = 1000$	146.09	<b>144.15</b>	144.34	144.41	144.44	144.65	144.82

Nota: Mesmo procedimento o qual foi descrito na Tabela 5.

quando consideramos a mesma janela de tempo e níveis de confiança mais elevados, conforme sugerido por McNeil (2015). Ademais, a coesão nas medidas previstas analisadas é contribuída pela ES ser condicionada ao VaR para ter a propriedade estatística de elicibilidade.

Ao observar de maneira geral dados nas tabelas e buscando a comparação direta entre os ativos, o resultado foi como o esperado, em que, ambas as criptomoedas apresentam elevado risco. Todavia, por ser um ativo menos estabelecido e com uma capitalização menor, o ETH está mais dependente da especulação do mercado e tem retornos mais variáveis. As estatísticas descritivas demonstram precisamente que o risco do Ethereum é superior ao Bitcoin, com maiores desvios padrão, amplitudes e média de risco previsto para todos os cenários conjecturados. Levando em conta as perdas realizadas, os melhores modelos para o ETH estão concentrados nas distribuições t e t assimétrica, especialmente no prognóstico das duas janelas menores. Dados que andam em concordância com os ativos financeiros em geral, os quais tem caudas pesadas e leptocurticas (Danielson, 2011). Outro resultado em consonância com a literatura é que, ao considerar as janelas rolantes de maior tamanho, observamos os piores desempenhos no modelo HS. Assim, ao ampliar a quantidade de informações para a precisão, o método não paramétrico demonstra uma considerável deterioração em sua performance (Pritsker, 2006). No entanto, houve resultados divergentes, como as distribuições de erro generalizado e erro generalizado assimétrico não performando bem, em particular, mesmo sendo o mais simples, para o Bitcoin o modelo não paramétrico teve um bom desempenho quanto as janelas menores. Ao ponderar os dois criptoativos, a distribuição normal padrão foi considerado o melhor procedimento cinco vezes das nove previsões feitas para  $W_{q_3} = 1000$ , considerando em conjunto com a normal

assimétrica, torna-se sete dos nove modelos com maior janela rolante. Algo que pode ser explicado pelo período da janela analisada, em que a distribuição normal não se encaixa para a previsão de janelas rolantes pequenas com pouca informação, ao aumentar o horizonte, ambas as moedas digitais tiveram êxito com modelos de distribuídos normalmente.

## 5 Considerações Finais

Este estudo realizou a previsão de *Value at Risk* (VaR) e *Expected Shortfall* (ES), concentrando-se nas duas maiores e mais relevantes criptomoedas do mercado: Bitcoin e Ethereum. Estes ativos são reconhecidos por sua volatilidade e, portanto, são considerados investimentos de alto risco, característica inerente a natureza dinâmica e especulativa do ambiente das criptomoedas, para descrever e prever o risco nesta esfera é preciso de métricas consistentes. As duas medidas de risco utilizadas são as mais regulares financeiramente e aceitas academicamente na estimação da perda máxima esperada em um determinado horizonte de tempo, fornecendo um arcabouço robusto para análises e estratégias de mitigação de riscos (McNeil et al., 2015). Ambas as medidas foram escolhidas para análise em detrimento de outras, pela capacidade delas fornecerem uma avaliação direta e quantitativa do risco financeiro, considerando a magnitude e a severidade das perdas potenciais. A flexibilidade em calcular essas métricas para diferentes níveis de confiança, bem como, sua aceitação nas regulamentações financeiras, contribuem para sua relevância na gestão de risco. Em especial, pela fácil compreensão das métricas e oferecerem uma abordagem abrangente para avaliar e quantificar o risco em investimentos.

Versatilidade que nos possibilitou realizar previsões de risco para diferentes abordagens univariadas. Utilizamos modelos paramétricos AR(1)-GARCH(1,1) com seis distribuições de probabilidade distintas, além do método não paramétrico de simulação histórica. Consideramos três níveis de significância e períodos de estimação variados, dando prioridade aos modelos com melhor desempenho na avaliação da perda realizada. Essa avaliação foi feita comparando as medidas e os ativos, levando em conta as funções de pontuação de Fissler e Ziegel (2016) para o VaR e Gerlach et al. (2017) para a ES que garantem, na devida ordem, a propriedade estatística de elicitação e elicitação condicionada ao VaR destas métricas.

Fundamentando-se nestes processos metodológicos, no geral, as distribuições t de Student e t de Student assimétrica tiveram melhores desempenhos para as duas métricas e ativos. Juntas as distribuições foram superiores 22 vezes, enquanto os outros modelos somados tiveram melhor

funcionamento 14 vezes. Sobretudo, elas se destacam-se no ETH e na janela rolante intermediária de 500 dias como um todo. Resultados que convergem com estudos de Orhan e Köksal (2012) e Müller et al. (2023), os quais apontam que a distribuição  $t$  é um ótimo instrumento para utilização na métrica de previsão de risco para dados financeiros. Por outro lado, examinando 1000 observações, a distribuição normal apresentou o melhor desempenho em mais da metade das janelas previstas, principalmente ao considerar os níveis de significância maiores de 2.5% e 5%. Resultado discrepante com as previsões de risco de criptoativos feitas utilizando o VaR e a ES do *backtest* de Acereda et al. (2020) e das perdas realizadas de Müller et al. (2022), a qual utiliza janela rolante de 250 dias.

Como perspectivas futuras de pesquisa, recomendamos uma análise e comparação mais aprofundadas do desempenho de diferentes modelos de volatilidade na previsão do VaR e ES para aumentar a robustez do método, comparando com Troster et al. (2019), Trúcios (2019) e Liu et al. (2020), trabalhos focalizados na diferença dos modelos paramétricos. Entretanto, é importante observar que por uma questão de foco na comparação de ativos, a pesquisa não abordou detalhadamente o impacto da pandemia no mercado de criptomoedas, mesmo considerando três janelas rolantes distintas. Recomendamos que futuros progressos no estudo, ponderem de maneira mais abrangente o risco desses criptoativos antes, durante e depois do choque causado nos mercados pela COVID-19, explorando se há mudanças estruturais nas métricas para o gerenciamento de risco.

# Referências

- [1] Acereda, B.; Leon A.; Mora, J. (2020). Estimating the expected shortfall of cryptocurrencies: An evaluation based on backtesting. *Finance Research Letters*, 33.
- [2] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3), 203–228.
- [3] Basel Committee on Banking Supervision. (October, 2013). Fundamental Review of the Trading Book: A Revised Market Risk Framework. Available in: <https://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf>
- [4] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- [5] Brutti Righi, M., & Ceretta, P. S. (2014). Teoria de Medidas de Risco: uma revisão abrangente. *Revista Brasileira de Finanças*, 12(3), 411-464.
- [6] Buterin, V. (2013). Ethereum Whitepaper. Ethereum.org. Available at: [https://blockchainlab.com/pdf/Ethereum\\_white\\_papera\\_next\\_generation\\_smart\\_contract\\_and\\_decentralized\\_application\\_platform-vitalikbuterin.pdf](https://blockchainlab.com/pdf/Ethereum_white_papera_next_generation_smart_contract_and_decentralized_application_platform-vitalikbuterin.pdf)
- [7] Cabedo, D., & Moya, I. (2003). Estimating oil price 'Value at Risk' using the historical simulation approach. *Energy Economics*, 25(3), 239-253.
- [8] Coinmarketcap. (February 2024). Available at: <https://coinmarketcap.com/>
- [9] Epaphra, M. (2017). Modeling Exchange Rate Volatility: Application of the GARCH and EGARCH Models. *Journal of Mathematical Finance*, 7, 121-143.
- [10] Fenu, G.; Marchesi, L.; Marchesi, M.; Tonelli, R. (2018). The ICO phenomenon and its relationships with ethereum smart contract environment. In: 2018 International Workshop on Blockchain Oriented Software Engineering (IWBOSE). IEEE, 26-32.
- [11] Fissler, T. Ziegel, J. F. (2016). Higher order elicibility and Osband's principle. *The Annals of Statistics*, 44, 1680–1707. doi: 10.1214/16-AOS1439.
- [12] Föllmer, H., & Weber, S. (2015). The axiomatic approach to risk measures for capital determination. *Annual Review of Financial Economics*, 7, 301–337.
- [13] Garg, R. (2022). Ethereum based Smart Contracts for Trade and Finance. *International Journal of Economics and Management Engineering*, 16(11), 619-629.
- [14] Garcia-Jorcano, L.; Novales, A. (2021). Volatility specifications versus probability distributions in VaR forecasting. *Journal of Forecasting*, 40(2), 189–212.
- [15] Gensler, G. (January 2024). Statement on the Approval of Spot Bitcoin Exchange-Traded Products. Available at: <https://www.sec.gov/news/statement/gensler-statement-spot-bitcoin-011023>
- [16] Gerlach, R., Walpole, D., & Wang, C. (2017). Semi-parametric bayesian tail risk forecasting incorporating realized measures of volatility. *Quantitative Finance*, 17(2), 199–215.
- [17] Giungato, P.; Rana, R.; Tarabella, A.; Tricase, C. (2017). Current Trends in Sustainability of Bitcoins and Related Blockchain Technology. *Sustainability*, 9(12), 2214.
- [18] Ghalanos, A. (September 2023). Introduction to the rugarch package. R vignette. Available at: [https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/vignettes/Introduction\\_to\\_the\\_rugarch\\_package.pdf](https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/vignettes/Introduction_to_the_rugarch_package.pdf)
- [19] He, X. D., Kou, S., & Peng, X. (2022). Risk measures: robustness, elicibility, and backtesting. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 9, 141–166.
- [20] Jiang, K.; Zeng, L.; Song, J.; Liu Y. (2022). Forecasting Value-at-Risk of cryptocurrencies using the time-varying mixture-accelerating generalized autoregressive score model. *Research in International Business and Finance*, Volume 61, October 2022.
- [21] Kellner, R.; Rösch, D. (2016). Quantifying market risk with Value-at-Risk or Expected Shortfall? – Consequences for capital requirements and model risk. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Volume 68, July 2016, Pages 45-63.
- [22] Kromer, E., Overbeck, L., & Zilch, K. (2016). Systemic risk measures on general measurable spaces. *Mathematical Methods of Operations Research*, 84(2), 323–357.
- [23] Kufuoglu, S., & Ozkuran, M. (May 2019). Energy Consumption of Bitcoin Mining. Faculty of Economics, University of Cambridge.
- [24] Kushwaha, S. S., et al. (2022). Ethereum smart contract analysis tools: A systematic review. *IEEE Access*, 10, 57037-57062.
- [25] Lawuobahsumo, K.K., Algieri, B., & Leccadito, A. (2023). Forecasting cryptocurrencies returns: Do macroeconomic and financial variables improve tail expectation predictions? *Qual Quant.*

- [26] Liu, W., Semeyutin, A., Lau, C.K.M., & Gozgor, G. (2020). Forecasting value-at-risk of cryptocurrencies with RiskMetrics type models. *Research in International Business and Finance*, 54, 101259.
- [27] McNeil, A. F.; Frey, R.; Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press.
- [28] Mnif, E.; Jarboui, A.; & Mouakhar, K. (2020). How the cryptocurrency market has performed during COVID-19? A multifractal analysis. *Finance Research Letters*, 36, October.
- [29] Müller, F. M.; Santos, S. S.; Gössling, T. W.; Righi, M. B. (2022). Comparison of risk forecasts for cryptocurrencies: A focus on range value at risk. *Finance Research Letters*, page 102916.
- [30] Müller, F. M.; Gössling, T. W.; Santos, S. S.; Righi, M. B. (2023). A Comparison of Range Value at Risk (RVaR) Forecasting Models. *Journal of Forecasting. Social Science Research Network*.
- [31] Meynkhart, A. (2019). Fair market value of bitcoin: halving effect.
- [32] Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System.
- [33] Nekhili, R., Sultan, J. (2020). Jump Driven Risk Model Performance in Cryptocurrency Market. *International Journal of Financial Studies*, 8(2), 19.
- [34] Orhan, M.; Köksal.B. (2012). A comparison of GARCH models for VaR estimation. *Expert Systems with Applications*, 39.
- [35] Pritsker, M. (2006). The hidden dangers of historical simulation. *Journal of Banking & Finance*, 30(2), 561-582.
- [36] R Core Team. (2021). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <http://www.R-project.org/>
- [37] Righi, M. B., & Ceretta, P. S. (2015). A comparison of expected shortfall estimation models. *Journal of Economics and Business*, 78, 14–47.
- [38] Ryan J, A., et al. (August 2023). Package ‘quantmod’. Available at: <https://cran.r-project.org/web/packages/quantmod/quantmod.pdf>
- [39] Schlag, K. H., & Weele, J. J. (October 2015). A method to elicit beliefs as most likely intervals. *Judgment and Decision Making*, 10(5), 456-468.
- [40] Trucíos, C. (2019). Forecasting bitcoin risk measures: A robust approach. *International Journal of Forecasting*, 35, 836–847.
- [41] Trucíos, C., Tiwari, A.K., & Alqahtani, F. (2020). Value-at-risk and expected shortfall in cryptocurrencies’ portfolio: A vine copula-based approach. *Applied Economics*, 52, 2580–2593.
- [42] Troster, V., Tiwari, A.K., Shahbaz, M., & Macedo, D.N. (2019). Bitcoin returns and risk: A general GARCH and GAS analysis. *Finance Research Letters*, 30, 187–193.
- [43] Ziegel, J. F. (2016). Coherence and elicibility. *Mathematical Finance*, 26, 901–918.

Tabela 6: Estatística Descritiva das medidas de risco  $VarR_{t+1}^1\%$ ,  $VarR_{t+1}^{2.5\%}$ ,  $ES_{t+1}^1\%$  e  $ES_{t+1}^{2.5\%}$  para o Ethereum (ETH) e Bitcoin(BTC). Dados estão em porcentagem, considerando a fevereiro de 2018 a fevereiro de 2024 com o desconto da janela rolante  $W_{q_1} = 250$ .

	$Min.\alpha1\%$	$Max.\alpha1\%$	$Méd.\alpha1\%$	$Dp.\alpha1\%$	$Ass.\alpha1\%$	$Cur.\alpha1\%$	$Min.\alpha2.5\%$	$Max.\alpha2.5\%$	$Méd.\alpha2.5\%$	$Dp.\alpha2.5\%$	$Ass.\alpha2.5\%$	$Cur.\alpha2.5\%$
Var:ETH.HS	5.07	16.94	12.89	3.05	-1.18	0.51	4.22	13.40	9.29	2.34	-0.29	-0.60
Var:ETH.norm	3.09	72.09	10.07	4.25	4.70	48.03	2.57	61.38	8.46	3.59	4.74	48.89
Var:ETH.std	3.10	44.31	12.13	4.21	1.51	5.22	2.21	30.36	8.64	2.96	1.53	5.81
Var:ETH.sstd	2.96	44.15	12.08	4.36	1.50	5.06	2.08	30.26	8.64	3.15	1.42	4.82
Var:ETH.snorm	3.04	73.97	10.58	4.53	4.47	44.79	2.54	62.02	8.86	3.79	4.45	44.52
Var:ETH.ged	3.14	50.54	11.91	4.30	2.24	11.08	2.29	37.30	9.06	3.22	2.15	10.40
Var:ETH.sged	2.95	52.15	12.18	4.75	1.93	8.25	2.14	37.49	9.25	3.56	1.80	7.44
Var:BTC.HS	5.08	13.13	9.58	2.11	-0.70	-0.12	3.46	9.86	6.98	1.52	-0.36	-0.78
Var:BTC.norm	2.83	51.99	7.76	3.15	4.72	49.85	2.40	44.13	6.53	2.65	4.65	48.56
Var:BTC.std	2.65	21.52	9.24	2.98	0.80	1.14	1.89	15.36	6.49	2.13	0.67	0.85
Var:BTC.sstd	3.03	21.46	9.14	3.01	0.67	0.56	2.17	15.21	6.44	2.17	0.54	0.26
Var:BTC.snorm	2.93	58.29	7.92	3.50	5.21	58.40	2.48	48.37	6.65	2.91	5.05	55.33
Var:BTC.ged	2.85	46.81	9.58	3.46	2.07	10.72	2.13	34.32	7.14	2.55	1.87	9.79
Var:BTC.sged	3.00	46.43	9.61	3.56	1.73	8.70	2.17	34.14	7.16	2.63	1.53	8.01
ES:ETH.HS	5.91	30.13	17.70	5.84	0.31	0.17	5.25	20.74	13.67	3.55	-0.74	0.08
ES:ETH.norm	3.57	81.99	11.55	4.87	4.68	47.42	3.10	72.42	10.12	4.28	4.70	48.01
ES:ETH.std	4.65	72.73	18.41	7.23	1.41	3.50	3.40	50.65	13.39	4.84	1.47	4.45
ES:ETH.sstd	4.48	72.47	18.17	7.00	1.54	4.59	3.26	50.47	13.29	4.86	1.52	4.96
ES:ETH.snorm	3.50	85.09	12.18	5.23	4.48	44.97	3.06	74.37	10.64	4.56	4.47	44.81
ES:ETH.ged	4.13	66.15	15.07	5.61	2.29	11.43	3.24	52.18	12.19	4.43	2.25	11.17
ES:ETH.sged	3.88	69.80	15.45	6.18	2.04	8.81	3.04	53.99	12.47	4.89	1.96	8.37
ES:BTC.HS	5.63	24.17	13.20	4.18	0.77	0.73	4.89	15.40	10.23	2.30	-0.60	-0.05
ES:BTC.norm	3.22	59.27	8.91	3.62	4.76	50.84	2.84	52.24	7.80	3.17	4.72	49.89
ES:BTC.std	3.95	34.60	14.30	4.76	0.90	1.08	2.90	24.37	10.28	3.32	0.85	1.19
ES:BTC.sstd	4.51	33.95	14.09	4.68	0.82	0.74	3.31	23.95	10.15	3.31	0.74	0.71
ES:BTC.snorm	3.34	68.81	9.10	4.04	5.32	60.67	2.94	58.67	7.96	3.52	5.21	58.52
ES:BTC.ged	3.66	61.59	12.37	4.58	2.24	11.31	2.92	48.37	9.85	3.58	2.12	10.93
ES:BTC.sged	3.99	60.98	12.43	4.71	1.90	9.09	3.11	47.97	9.89	3.68	1.77	8.85

Nota: Com a as medidas de risco previstas, sendo estimado por Historical Simulation(HS) não paramétrico. E parametrizado por AR(1)-GARCH(1,1) com as distribuições em ordem, normal (norm), t de Student (std), t de Student assimétrica (sstd), normal assimétrica (snorm), erro generalizado (ged) e erro generalizado assimétrico (sged). Temos as seguintes estatísticas descritiva: Mínimo (Min), Máximo (Máx), Média (Méd), Desvio Padrão (Dp), Assimetria (Ass) e Curtose (Cur) para os níveis de  $\alpha$  de 1% e 2.5%.

Tabela 7: Estatística Descritiva das previsões das medidas de risco  $VarR_{t+1}^{1\%}$ ,  $VarR_{t+1}^{2.5\%}$ ,  $ES_{t+1}^{1\%}$  e  $ES_{t+1}^{2.5\%}$  para o Ethereum (ETH) e Bitcoin(BTC). Dados estão em porcentagem, considerando a fevereiro de 2018 a fevereiro de 2024 com o desconto da janela rolante  $W_{q_2} = 500$ .

	$Min.\alpha1\%$	$Max.\alpha1\%$	$Méd.\alpha1\%$	$Dp.\alpha1\%$	$Ass.\alpha1\%$	$Cur.\alpha1\%$	$Min.\alpha2.5\%$	$Max.\alpha2.5\%$	$Méd.\alpha2.5\%$	$Dp.\alpha2.5\%$	$Ass.\alpha2.5\%$	$Cur.\alpha2.5\%$
Var:ETH.HS	6.53	15.92	13.64	1.60	-1.48	4.06	4.93	12.54	9.45	1.47	-0.21	0.63
Var:ETH.norm	3.31	53.98	10.30	4.00	3.58	25.15	2.78	45.13	8.65	3.35	3.59	25.25
Var:ETH.std	3.48	55.92	12.02	4.20	3.10	21.86	2.48	37.55	8.56	2.86	2.66	17.35
Var:ETH.sstd	3.44	53.26	11.93	4.06	2.80	18.98	2.45	36.02	8.52	2.83	2.29	14.02
Var:ETH.snorm	3.65	52.07	10.75	4.01	3.19	20.68	3.06	43.26	8.99	3.34	3.19	20.71
Var:ETH.ged	3.41	58.09	11.88	4.23	3.48	25.80	2.57	42.95	9.07	3.14	3.21	22.57
Var:ETH.sged	3.34	58.50	12.06	4.34	3.24	23.69	2.52	43.24	9.20	3.24	2.94	20.41
Var:BTC.HS	5.97	11.71	10.18	1.18	-1.99	4.22	4.74	9.11	7.18	0.96	-0.74	0.09
Var:BTC.norm	3.83	49.33	8.20	2.97	4.03	37.05	3.19	40.52	6.89	2.49	3.95	35.21
Var:BTC.std	4.65	42.43	9.68	3.31	3.49	23.00	3.18	28.71	6.75	2.29	3.09	19.35
Var:BTC.sstd	4.36	42.62	9.57	3.34	3.43	22.84	3.00	28.88	6.69	2.33	2.97	18.47
Var:BTC.snorm	3.92	48.77	8.45	3.07	4.02	38.15	3.26	39.92	7.08	2.56	3.99	37.32
Var:BTC.ged	4.67	60.81	9.89	3.77	5.27	51.40	3.41	42.85	7.38	2.73	5.00	47.73
Var:BTC.sged	4.24	61.54	9.96	3.99	5.04	47.49	3.13	44.44	7.43	2.89	4.75	43.82
ES:ETH.HS	11.76	28.41	19.85	3.73	0.40	-0.71	8.18	19.00	14.74	1.93	-0.78	1.40
ES:ETH.norm	3.81	62.17	11.83	4.59	3.57	25.08	3.33	54.26	10.35	4.02	3.58	25.15
ES:ETH.std	5.14	96.47	18.14	7.35	3.43	25.22	3.79	65.23	13.24	4.88	3.32	24.18
ES:ETH.sstd	5.08	90.77	17.91	6.92	3.36	24.39	3.74	62.02	13.11	4.67	3.12	22.20
ES:ETH.snorm	4.20	60.26	12.39	4.63	3.18	20.65	3.67	52.36	10.81	4.03	3.19	20.68
ES:ETH.ged	4.35	77.18	14.98	5.53	3.69	28.43	3.50	59.95	12.15	4.36	3.53	26.44
ES:ETH.sged	4.27	77.14	15.21	5.65	3.49	26.45	3.43	60.37	12.33	4.47	3.30	24.35
ES:BTC.HS	9.54	20.41	14.87	2.94	0.72	-0.87	6.84	13.87	10.99	1.34	-0.76	1.68
ES:BTC.norm	4.39	57.48	9.42	3.41	4.08	38.35	3.85	49.61	8.24	2.98	4.03	37.10
ES:BTC.std	7.25	72.09	15.12	5.46	3.84	26.06	5.19	49.06	10.81	3.76	3.71	25.01
ES:BTC.sstd	6.97	72.43	14.90	5.41	3.99	28.22	4.91	49.28	10.67	3.76	3.74	25.79
ES:BTC.snorm	4.50	56.98	9.72	3.55	4.04	38.71	3.94	49.06	8.50	3.09	4.02	38.16
ES:BTC.ged	6.18	82.31	12.75	5.02	5.45	53.92	4.84	63.15	10.17	3.90	5.32	52.08
ES:BTC.sged	5.53	83.40	12.85	5.32	5.26	50.16	4.37	63.92	10.24	4.13	5.10	48.20

Nota: Mesmo procedimento o qual foi descrito na Tabela 6, alterando somente o tamanho da janela rolante  $W_{q_2} = 500$ .

Tabela 8: Estatística Descritiva das previsões das medidas de risco  $VarR_{t+1}^1$ ,  $VarR_{t+1}^{2.5\%}$ ,  $ES_{t+1}^1$  e  $ES_{t+1}^{2.5\%}$  para o Ethereum (ETH) e Bitcoin(BTC). Dados estão em porcentagem, considerando a fevereiro de 2018 a fevereiro de 2024 com o desconto da janela rolante  $W_{q_3} = 1000$ .

	$Min.\alpha1\%$	$Max.\alpha1\%$	$Méd.\alpha1\%$	$Dp.\alpha1\%$	$Ass.\alpha1\%$	$Cur.\alpha1\%$	$Min.\alpha2.5\%$	$Max.\alpha2.5\%$	$Méd.\alpha2.5\%$	$Dp.\alpha2.5\%$	$Ass.\alpha2.5\%$	$Cur.\alpha2.5\%$
Var:ETH.HS	12.32	15.61	13.92	0.70	-0.36	0.39	8.48	11.20	9.75	0.64	0.79	-0.08
Var:ETH.norm	3.45	28.70	9.90	3.37	1.33	3.77	2.89	24.30	8.30	2.83	1.35	3.81
Var:ETH.std	3.38	39.81	11.77	4.52	1.50	5.01	2.51	27.84	8.42	3.03	1.45	5.03
Var:ETH.sstd	3.42	37.90	11.75	4.32	1.41	4.57	2.54	26.69	8.42	2.91	1.38	4.62
Var:ETH.snorm	3.61	29.06	10.41	3.42	1.15	3.17	3.01	24.46	8.69	2.85	1.17	3.21
Var:ETH.ged	3.31	36.47	11.49	4.11	1.33	4.27	2.56	27.87	8.81	3.07	1.32	4.32
Var:ETH.sged	3.38	35.52	11.61	3.99	1.26	3.93	2.62	27.21	8.89	2.98	1.26	4.01
Var:BTC.HS	9.81	10.81	10.49	0.20	-0.95	1.71	6.69	8.11	7.34	0.28	-0.11	-0.05
Var:BTC.norm	3.91	17.68	7.93	2.09	0.71	1.55	3.28	14.98	6.66	1.76	0.73	1.63
Var:BTC.std	3.58	19.57	9.30	2.75	0.51	0.18	2.59	13.74	6.50	1.87	0.55	0.28
Var:BTC.sstd	3.54	19.40	9.24	2.76	0.54	0.20	2.56	13.64	6.46	1.88	0.57	0.29
Var:BTC.snorm	4.04	17.72	8.25	2.13	0.50	1.09	3.41	14.95	6.90	1.78	0.53	1.19
Var:BTC.ged	3.59	22.38	9.58	2.97	0.82	0.94	2.72	16.59	7.14	2.15	0.80	0.96
Var:BTC.sged	3.53	22.52	9.63	3.11	0.82	0.83	2.67	16.98	7.17	2.25	0.80	0.86
ES:ETH.HS	17.40	23.12	20.56	1.95	-0.50	-1.52	13.08	17.20	15.38	1.10	-0.58	-0.95
ES:ETH.norm	3.97	32.77	11.38	3.87	1.32	3.73	3.47	28.84	9.95	3.38	1.33	3.76
ES:ETH.std	4.62	63.24	17.45	7.71	1.60	4.95	3.57	44.88	12.85	5.23	1.55	5.03
ES:ETH.sstd	4.67	59.90	17.38	7.31	1.52	4.58	3.61	42.67	12.82	4.98	1.46	4.63
ES:ETH.snorm	4.16	33.33	12.00	3.94	1.14	3.13	3.63	29.21	10.46	3.44	1.15	3.17
ES:ETH.ged	4.09	46.18	14.40	5.31	1.35	4.27	3.37	37.38	11.73	4.23	1.34	4.28
ES:ETH.sged	4.17	44.90	14.55	5.16	1.28	3.92	3.44	36.39	11.85	4.11	1.27	3.94
ES:BTC.HS	12.54	16.91	15.20	1.52	-0.46	-1.61	9.90	12.46	11.40	0.66	-0.36	-1.16
ES:BTC.norm	4.49	20.18	9.12	2.40	0.69	1.50	3.93	17.77	7.97	2.10	0.71	1.55
ES:BTC.std	5.19	30.44	14.36	4.48	0.49	0.09	3.87	21.83	10.32	3.12	0.50	0.15
ES:BTC.sstd	5.13	30.13	14.25	4.50	0.51	0.11	3.83	21.63	10.25	3.14	0.53	0.17
ES:BTC.snorm	4.64	20.28	9.51	2.46	0.48	1.03	4.07	17.81	8.30	2.14	0.50	1.09
ES:BTC.ged	4.56	29.17	12.34	3.95	0.85	0.96	3.68	23.08	9.84	3.08	0.83	0.95
ES:BTC.sged	4.49	29.06	12.41	4.14	0.86	0.85	3.62	23.21	9.89	3.22	0.83	0.84

Nota: Mesmo procedimento o qual foi descrito na Tabela 6, alterando somente o tamanho da janela rolante  $W_{q_3} = 1000$ .