



PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO PARA ANÁLISE FÍSICAMENTE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

Incremental-Iterative Processes for Physically Nonlinear Analysis of Structures by Generalized Finite Element Method

Larissa Novelli (1); Humberto Alves da Silveira Monteiro (2); Gabriela Marinho Fonseca (3); Roque Luiz da Silva Pitangueira (4); Felício Bruzzi Barros (5)

- (1) Engenheira Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.(P)
 - (2) Engenheiro Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.
 - (3) Engenheira Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.
 - (4) Dr. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.
 - (5) Dr. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.
- Email para Correspondência: larissa.novelli@hotmail.com; (P) Apresentador

Resumo: O presente trabalho apresenta a solução de um modelo estrutural em estado plano de tensão e com não linearidade material utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) aliado à estratégia global-local de análise. No mecanismo implementado, um problema local é extraído do domínio global, em torno de uma região onde há uma maior concentração de deformações, refinado e solucionado com imposição de condições de contorno de Dirichlet, oriundas do problema global. A análise não linear se dá no modelo global e um problema local é resolvido ao final de cada passo incremental convergido. Para a solução local utiliza-se da rigidez secante e do estado corrente do meio material, resultante da transferência das variáveis constitutivas entre os dois modelos considerados. A solução local obtida enriquece o problema global valendo-se das prerrogativas do MEFG. Como processo incremental-iterativo adota-se o método de Newton-Raphson com diversos métodos de controle. Modelos constitutivos e leis materiais apropriados para representação de meios com degradação elástica são utilizados. As implementações computacionais foram realizadas no sistema INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), um projeto de software livre desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Palavras chaves: *Análise Fisicamente Não Linear; Método dos Elementos Finitos Generalizados; Enriquecimento Global-Local.*

Abstract: The present work presents the solution of a structure model under plane stress conditions and with material non-linearity using the Generalized Finite Element Method (GFEM) allied to the global-local strategy of analysis. In the implemented mechanism, a local problem is extracted from the global domain, around of a region where there is a greater concentration of deformations, refined and solved with imposition of Dirichlet boundary



conditions, originating from the global problem. Nonlinear analysis is performed in the global model and a local problem is solved at the end of each converged incremental step. For the local solution it is used the secant stiffness and the current state of the material media, resulting from the transfer of the constitutive variables between the two models considered. The local solution obtained enriches the global problem using the prerogatives of GFEM. The Newton-Raphson incremental-iterative process with different control methods is adopted. Constitutive models and appropriate material laws for representing elastic-degrading media are used. The computational implementations have been performed into the numerical core of INSANE system (INteractive Structural ANalysis Environment), a free software developed by the Department of Structural Engineering of the Federal University of Minas Gerais.

Keywords: *Physically NonLinear Analysis; Generalized Finite Element Method; Global-Local Enrichment.*



1 INTRODUÇÃO

Na área da mecânica estrutural, um problema é dito com não linearidade material quando parâmetros constitutivos do material variam com as deformações da estrutura. Assim, quando estruturas com esse comportamento são submetidas a um processo de carregamento, podem ocorrer variações da rigidez durante a análise. Uma forma de representar este comportamento, é através das diferentes trajetórias de equilíbrio, podendo estas serem obtidas por processos incrementais-iterativos, como o método de Newton Raphson, associados ao Método dos Elementos Finitos.

Em estruturas que possuem uma concentração de deformações geralmente necessita-se de um maior refinamento da malha na região de concentração de dano. A utilização do MEF nesses casos pode levar a um alto custo computacional devido às iterações não lineares. Neste contexto passa-se a trabalhar em mais de uma escala, uma escala global com uma malha mais grosseira e uma escala local com uma malha mais refinada, sendo esta estratégia chamada de global-local.

Ao se trabalhar em duas escalas é necessário transferir informações de uma escala para outra durante o processo de análise. Para isso a utilização do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) tem se mostrado promissora. A estratégia utilizada no MEFG consiste da multiplicação das funções de aproximação lineares do MEF por funções de enriquecimento. Essas funções de enriquecimento podem ser de vários tipos, como funções polinomiais, funções de Heavyside e no caso da estratégia global-local elas são a própria solução encontrada no domínio local. Gupta, Kim e Duarte (2013) definem o MEFG^{gl} como um processo em duas escalas que envolve a solução do problema de valor de contorno da escala refinada definido ao redor da região de interesse e o enriquecimento do espaço de solução global com o resultado da solução local.

Estudos envolvendo a estratégia global-local e modelos não lineares iniciaram-se com Kim, Duarte e Proença (2009), Gupta, Kim e Duarte (2013) e Kim e Duarte (2015), sendo que todos estes trabalhos estão focados na não linearidade oriunda da propagação de trincas discretas. Este artigo apresenta uma nova abordagem para análise de problemas não lineares com o MEFG^{gl} considerando a não linearidade presente em modelos de fissuração distribuída.

Na estratégia de solução proposta e implementada, o processo de análise não linear se dá somente no modelo global, sendo que ao final de cada passo incremental convergido é resolvido o problema local, em uma escala mais refinada, e a solução encontrada é utilizada como enriquecimento para o próximo passo. A implementação foi realizada no sistema INSANE (INteractive Structural ANalysis Enviroment), que possui um arcabouço computacional básico do MEFG^{gl}, além de recursos para análise fisicamente não linear, incluindo diferentes modelos constitutivos e métodos de solução.

O presente texto é dividido em cinco seções incluindo a seção introdutória aqui exposta. Na seção (2) é apresentada uma breve explanação dos conceitos do Método dos Elementos Finitos Generalizados; na seção (3), a estratégia global-local aplicada ao

MEFG em uma análise não linear; na seção (4), simulações numéricas e na seção (5), as conclusões gerais do trabalho.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) pode ser entendido como uma variação do Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional (ALVES, 2012). Segundo Barros (2002), a estratégia utilizada no MEFG consiste no emprego das funções do tipo Partição da Unidade (PU) que, enriquecidas, definem as funções de forma.

O emprego das funções convencionais do MEF (por exemplo, as funções Lagrangianas) como funções de partição da unidade, além de facilitar a aplicação do método, garante estabilidade ao problema analisado, verificando diretamente as condições de contorno.

Na figura 1 pode-se ver a ilustração do método. Nela, considera-se uma malha de elementos finitos definida a partir de um conjunto de n pontos nodais $\{x_j\}_{j=1}^n$, em um domínio bidimensional. O termo nuvem ω_j mostrado na figura 1(a) refere-se ao conjunto de elementos que concorrem no ponto nodal x_j , e as funções de Partição da Unidade $N_j(x)$ são apresentadas na Figura 1(b).

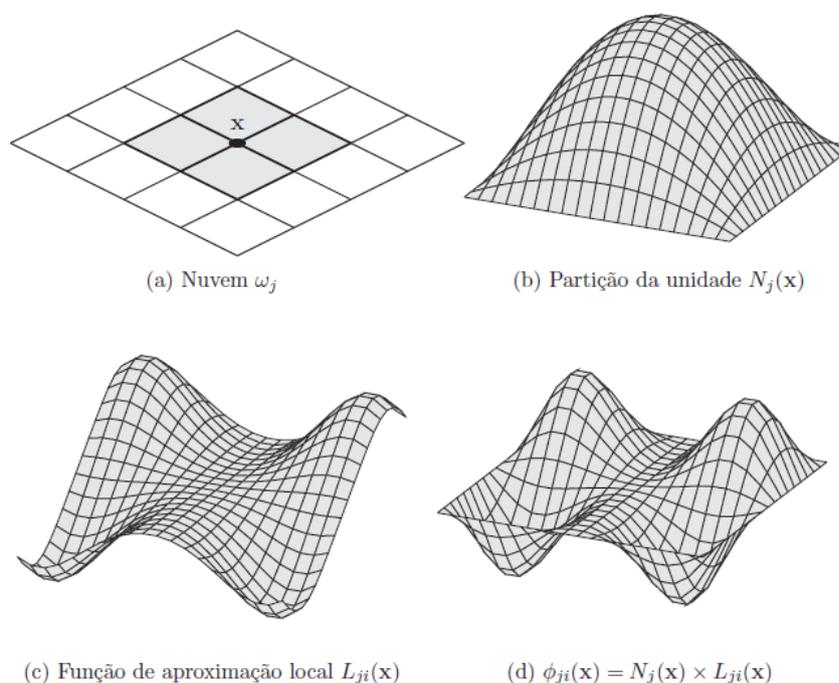


Figura 1. Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j

Fonte: (ALVES, 2012)

O conjunto de funções de enriquecimento, que são denominadas funções de aproximação local (Alves, 2012) é mostrado na Figura 1(c). Tal conjunto de funções é específico para um determinado tipo de problema e é composto por q_j funções linearmente independentes definidas para cada nó x_j com suporte na nuvem ω_j , conforme equação (1).

$$I_j = \{L_{j1}(x), L_{j2}(x), L_{j3}(x) \dots, L_{jq}(x)\} = \{L_{ji}(x)\}_{i=1}^q \quad (1)$$

Por fim, na Figura 1(d) são apresentadas as funções de forma $\phi_{ji}(x)$ do MEFG, sendo estas obtidas pelo produto das funções PU pelas funções de enriquecimento, conforme equação (2).

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^q = N_j(x) \times \{L_{ji}(x)\}_{i=1}^q \quad (2)$$

sem somatório em j .

Uma aproximação genérica é, dessa maneira, obtida pela seguinte combinação linear das funções de forma (Alves, 2012):

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N N_j(x)(\mathbf{u}_j + \sum_{i=2}^q L_{ji}(x)b_{ji}) \quad (3)$$

3 ANÁLISE NÃO LINEAR UTILIZANDO A ESTRATÉGIA GLOBAL-LOCAL

Ao realizar-se a análise fisicamente não linear de uma estrutura, é necessário utilizar um processo incremental-iterativo nas variáveis do problema. Neste processo, a equação de equilíbrio incremental correspondente a iteração j do passo i pode ser escrita como:

$$[K]_{j-1}^i \cdot \{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (4)$$

em que:

$[K]_{j-1}^i$ é a matriz de rigidez na iteração $j - 1$ do passo i , função do campo de deslocamentos $\{\delta U\}_{j-1}^i$;

$\{\delta U\}_j^i$ é o vetor deslocamentos incrementais da iteração j do passo i ;

$\delta \lambda_j^i$ é o incremento do fator de carga na iteração j do passo i ;

$\{P\}$ é o vetor de cargas de referência;

$\{Q\}_{j-1}^i$ é o vetor de forças residuais da iteração $j - 1$ do passo i .

Para a solução desta equação, Yang e Shieh (1990) propõem um algoritmo genérico cujos principais passos estão apresentados no diagrama da Figura 2.

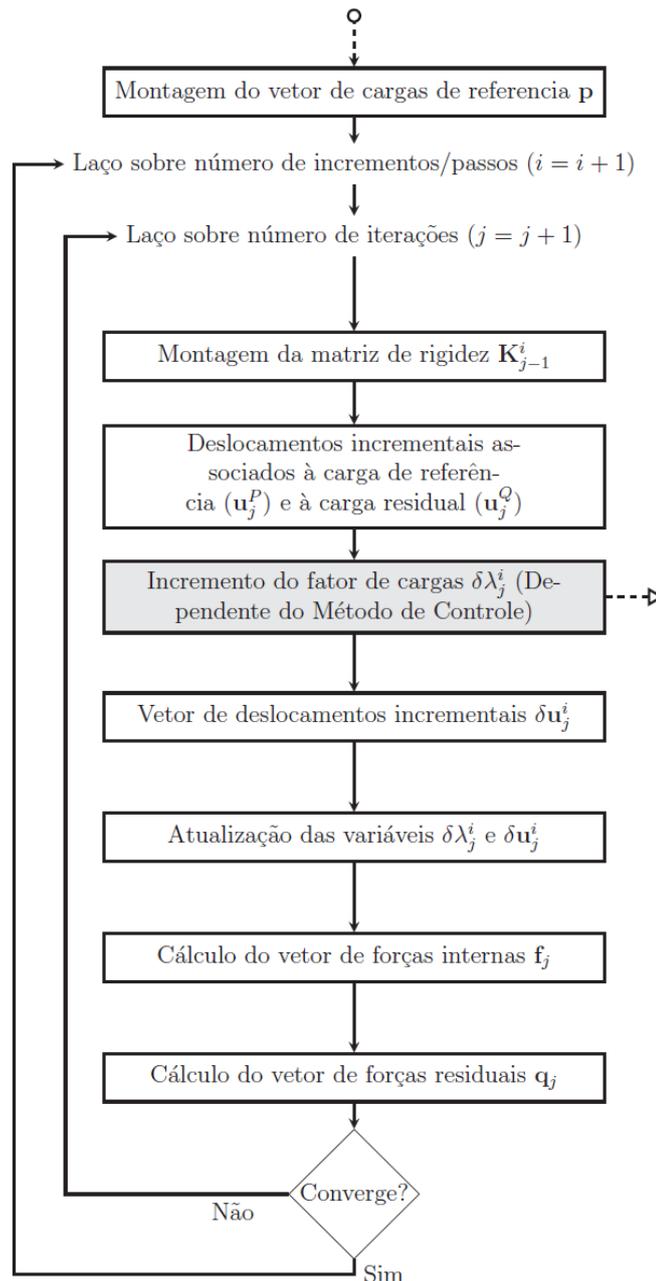


Figura 2. Algoritmo para métodos de controle

Fonte: (FUINA, 2004)

Na Figura 2 destaca-se o passo que é referente a obtenção do incremento do fator de carga, que depende do método de controle utilizado, podendo ser controle de carga, controle de deslocamento, controle de deslocamento generalizado, entre outros.

Na proposta de solução implementada a análise não linear se dá no modelo global e, a cada passo incremental convergido, um problema local é solucionado, sendo as iterações do próximo passo realizadas em um domínio global enriquecido. Esta proposta difere da usada por Kim e Duarte (2015) que adotam iterações de equilíbrio no problema local seguidas de análise linear do problema global.

No processo de solução não linear via MEFG^{gl} aqui proposto é possível observar três etapas distintas, conforme equacionamento apresentado a seguir que se baseia no trabalho de Duarte e Kim (2008).

3.1 Formulação do problema global do primeiro passo incremental

O primeiro passo da análise não linear é executado em um domínio sem enriquecimento global-local. Neste passo considera-se o problema de elasticidade cujo domínio é $\bar{\Omega}_G = \Omega_G \cup \partial\Omega_G$ em \mathbb{R}^n e o contorno é decomposto em $\partial\Omega_G = \partial\Omega_G^u \cup \partial\Omega_G^\sigma$ com $\partial\Omega_G^u \cap \partial\Omega_G^\sigma = \emptyset$, sendo u e σ as regiões em que são aplicadas as condições de Dirichlet e Neumann, respectivamente.

A solução aproximada do problema global inicial é dada por \tilde{u}_G^0 :

$$\text{Encontre } \tilde{u}_G^0 \in \tilde{\chi}_G^0(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \forall v_G^0 \in \tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)$$

$$\int_{\Omega_G} \sigma(\tilde{u}_G^0) : \varepsilon(v_G^0) dx + \eta \int_{\partial\Omega_G} \tilde{u}_G^0 \cdot v_G^0 ds = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{t} \cdot v_G^0 ds + \eta \int_{\partial\Omega_G^u} \bar{u} \cdot v_G^0 ds \quad (5)$$

em que:

$\tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$, um espaço de Hilbert de ordem 1 definido em Ω_G , construído pelo método discreto utilizado (MEF ou MEFG);

v_G^0 é o vetor de deslocamentos virtuais do problema global inicial;

η é o parâmetro de penalidade.

3.2 Formulação do problema local

Para a solução do problema local de um passo k são transferidas condições de contorno do domínio global para o local, além das variáveis constitutivas que representam o estado atual do material nos pontos de integração do domínio local. Para a atualização das variáveis constitutivas, os pontos de integração do modelo local são mapeados para o modelo global. Assim, o problema na escala local é definido como:

$$\text{Encontre } \tilde{u}_L^k \in \tilde{\chi}_L(\Omega_L) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_L) \forall v_L^k \in \tilde{\chi}_L(\Omega_L)$$

$$\int_{\Omega_L} \sigma(\tilde{u}_L^k) : \varepsilon(v_L^k) dx + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{u}_L^k \cdot v_L^k ds = \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{u}_G^{k-1} \cdot v_L^k ds \quad (6)$$

em que:

$\tilde{\chi}_L(\Omega_L)$ é o espaço usado para a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_L)$ usando as funções de forma do MEFG;

$\tilde{\mathbf{u}}_L^k$ é o vetor de solução do problema local do passo k ;

\mathbf{v}_L^k é o vetor de deslocamentos virtuais do problema local do passo k ;

η é o parâmetro de penalidade.

3.3 Formulação do problema global enriquecido

Realizada a análise do problema local, a solução $\tilde{\mathbf{u}}_L^{k-1}$ encontrada é utilizada como enriquecimento das funções de Partição da Unidade do problema global do próximo passo k . Assim, a nova função de aproximação do problema global torna-se:

$$\phi_j = N_j \times \tilde{\mathbf{u}}_L^{k-1} \quad (7)$$

em que:

N_j é a função PU do problema global;

$\tilde{\mathbf{u}}_L^{k-1}$ é o resultado da solução do problema local do passo anterior.

A formulação do problema global enriquecido é dada por:

Encontre $\tilde{\mathbf{u}}_G^{E k} \in \tilde{\chi}_G^{E k}(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \forall \mathbf{v}_G^{E k} \in \tilde{\chi}_G^{E k}(\Omega_G)$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^{E k}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_G^{E k}) dx + \eta \int_{\partial\Omega_G} \tilde{\mathbf{u}}_G^{E k} \cdot \mathbf{v}_G^{E k} ds = \int_{\partial\Omega_G^t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_G^{E k} ds + \eta \int_{\partial\Omega_G^u} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_G^{E k} ds \quad (8)$$

em que:

$\tilde{\chi}_G^{E k}(\Omega_G)$ é o espaço $\tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)$ aumentado com o enriquecimento proveniente das funções Global-Local;

$\tilde{\mathbf{u}}_G^{E k}$ é o vetor de solução do problema global enriquecido do passo k ;

$\mathbf{v}_G^{E k}$ é o vetor de deslocamentos virtuais do problema global enriquecido do passo k ;

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção serão apresentadas simulações numéricas para validação da metodologia de solução proposta. Adotou-se um modelo de viga submetida à flexão em três pontos, cuja geometria é apresentada na Figura 3. A carga de referência P aplicada é de 1 N.

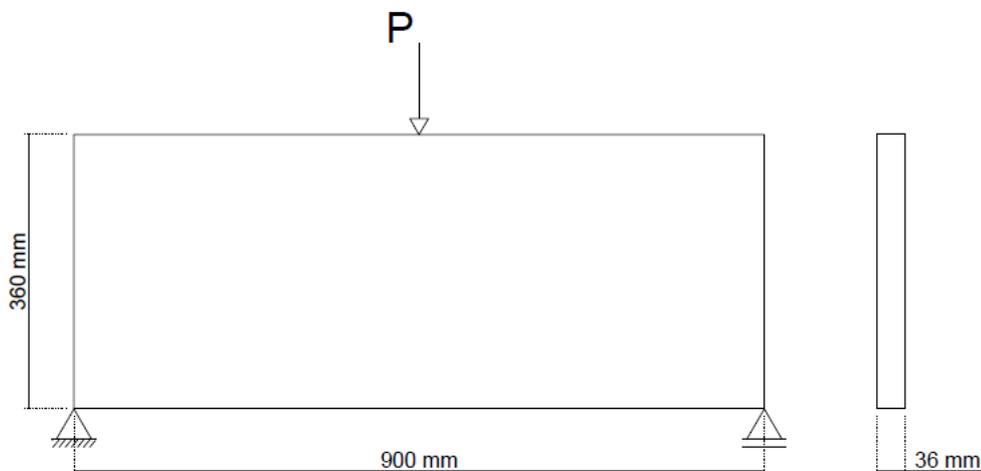


Figura 3. Geometria da viga

Fonte: (PENNA, 2011)

Adotou-se o modelo constitutivo de fissuração distribuída com direção fixa e duas leis tensão-deformação, a de Carreira-Ingraffea e uma lei bilinear, com os parâmetros indicados na Tabela 1. A lei Carreira-Ingraffea combina o comportamento a compressão, proposto Carreira e Chu (1985, 1986) com o comportamento a tração, proposto por Boone e Ingraffea (1987). Adotou-se um módulo de elasticidade de 44000 N/mm² e coeficiente de Poisson de 0,2.

Tabela 1. Parâmetros das leis tensão-deformação

Carreira-Ingraffea	Bilinear
f_t 3,8 N/mm ²	f_t 3,8 N/mm ²
f_c 40 N/mm ²	f_c 40 N/mm ²
G_f 0,164 N/mm	G_f 0,164 N/mm
h 100 mm	h 100 mm
ε_c 0,0018	E_2 4400 N/mm ²
β_r 0,05	

4.1 Soluções de referência

Para validar a técnica aqui proposta, utilizou-se como soluções referência dois modelos de MEF tradicional, representativos da escala global, com dois graus de refinamento distintos, e controle direto de deslocamento (CDD). Para a primeira malha (MEF – Malha Grosseira) – Fig 4(a), 24 elementos quadrilaterais de quatro nós foram

utilizados. Para a segunda malha (MEF – Malha Refinada) – Fig. 4(b), 96 elementos quadrilaterais de quatro nós foram empregados. As trajetórias obtidas são apresentadas nas Figuras 6 e 7, em comparação com as demais análises conduzidas.

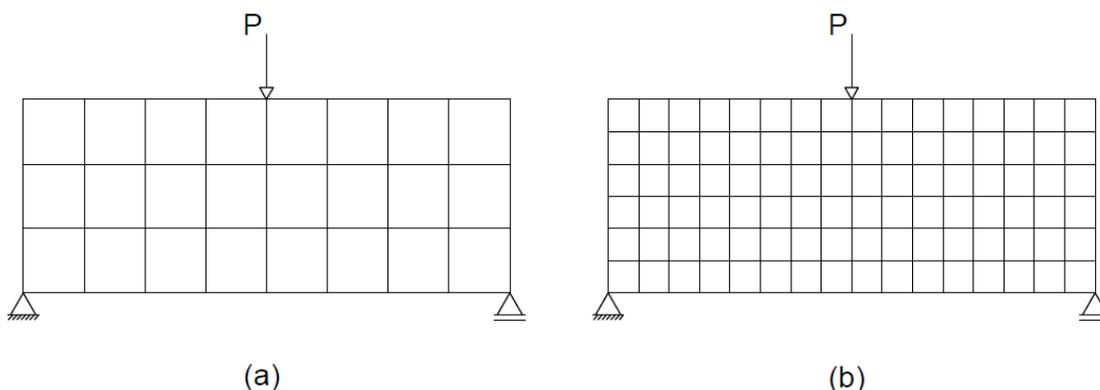


Figura 4. Malhas de referência

4.2 Soluções via MEF^{gl}

A malha de elementos finitos global é composta por elementos quadrilaterais de quatro nós (com 4x4 pontos de integração), sendo equivalente à malha grosseira de referência. Na Fig. 5(a) é apresentada a região de onde será extraído o modelo local e os nós que serão enriquecidos durante o procedimento global-local. Sendo esta região a que possui a maior concentração de deformações. A malha de elementos finitos local adotada (Fig. 5(b)) é composta por elementos quadrilaterais de quatro nós obtida pelo refinamento da malha global, utilizando 4 elementos locais por elemento global. Desse modo, o grau de refinamento da malha local é equivalente ao da malha de referência dita refinada.

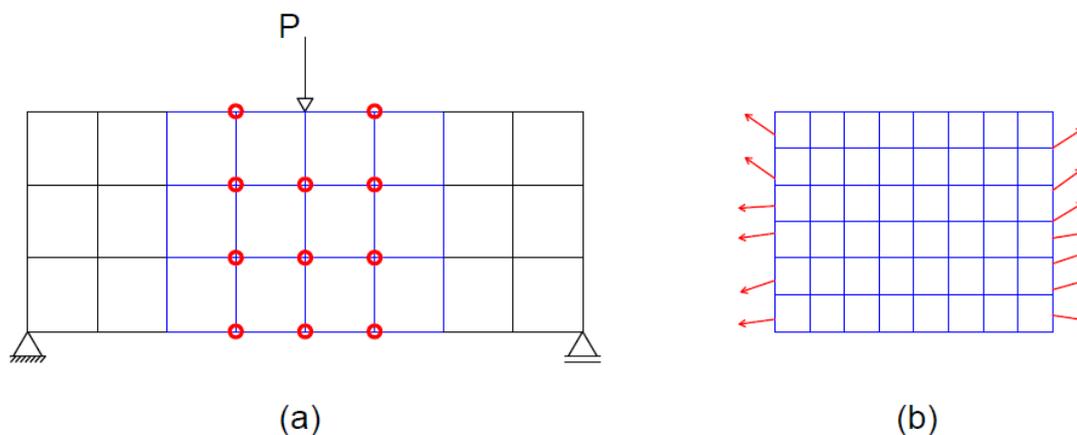


Figura 5. Malha de elementos para MEF^{gl}

Para a solução do modelo local, transferiu-se as condições de contorno de Diriclet, o que equivale à passagem de deslocamentos do problema global para o local.

Para a obtenção das trajetórias de equilíbrio utilizou-se o processo incremental-iterativo de Newton-Raphson aproximando-se a matriz de rigidez incremental por sua parcela secante e três diferentes métodos de controle. O primeiro método foi de controle direto de deslocamentos (CDD), no qual se controlou o deslocamento horizontal do apoio direito com um incremento de 0,0015 mm. O segundo método foi de controle de deslocamento generalizado (CDG) com um incremento inicial do fator de carga de 250. E o terceiro método foi o controle de comprimento de arco ortogonal a tangente inicial (CCA) com um incremento inicial do fator de carga de 250. Para todas as soluções atribuiu-se uma tolerância para a convergência de 1×10^{-4} , avaliando-se a magnitude do vetor de deslocamentos incrementais.

Os gráficos das Figuras 6 e 7 apresentam as trajetórias de equilíbrio obtidas na análise. Na Figura 6 tem-se a resposta correspondente ao modelo de Carreira-Ingraffea e na Figura 7, a resposta com o modelo bilinear. Em ambas figuras são mostradas as soluções de referência (MEF – Malha Grosseira e MEF – malha Refinada) e as curvas com a malha grosseira enriquecida via procedimento global-local, para os três diferentes métodos de controle. O eixo de deslocamentos apresentado é referente ao deslocamento do apoio direito.

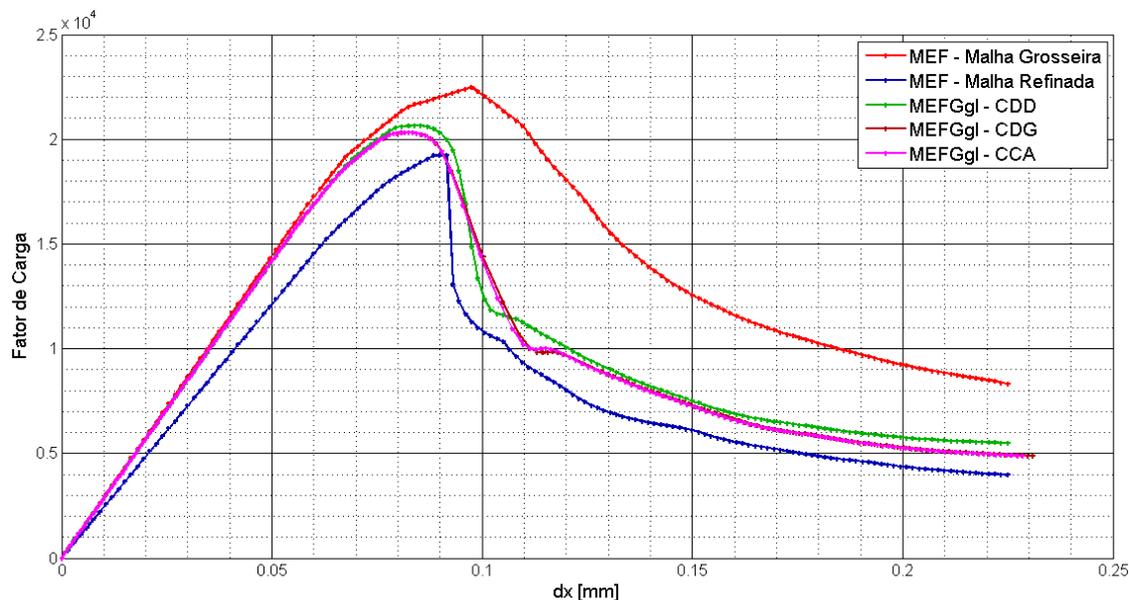


Figura 6. Trajetórias de equilíbrio para material com lei Carreira-Ingraffea

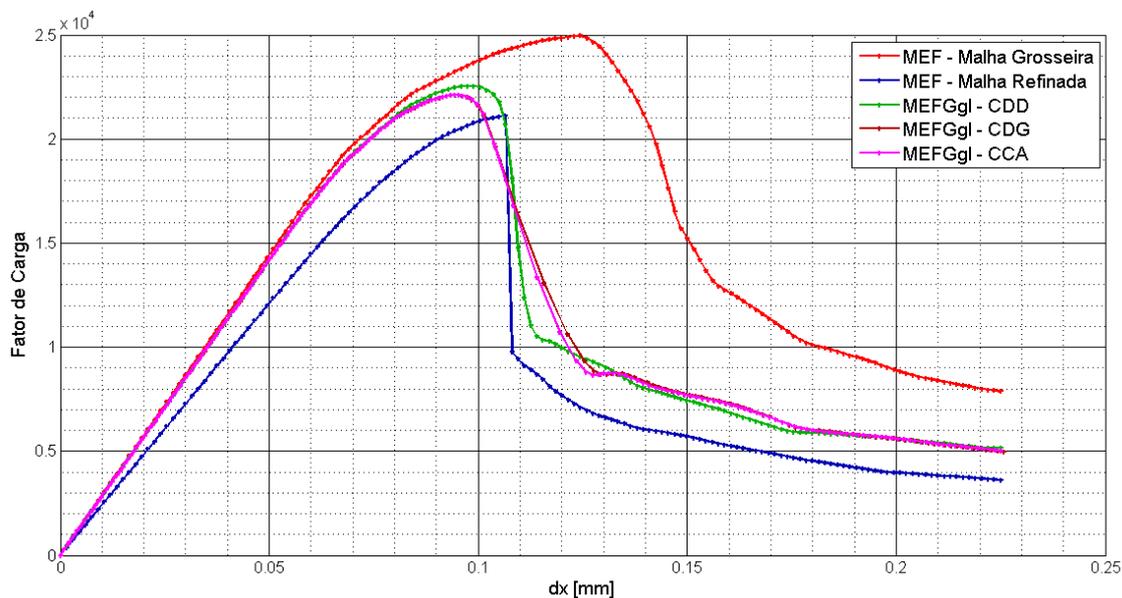


Figura 7. Trajetórias de equilíbrio para material com lei bilinear

Analisando-se as trajetórias de equilíbrio de ambas as figuras, observa-se, que ao se realizar a análise não linear com a malha grosseira com nós enriquecidos com estratégia global-local, obtém-se uma curva mais flexível com limite de carga menor, o que é esperado quando se tem uma malha mais refinada na região de fissuração. Nota-se também que quando a análise não linear se dá com uma malha refinada em todo o domínio (96 elementos) ocorre uma localização de deformações momentaneamente induzida.

A Figura 8 mostra as isofaixas de valores da tensão normal horizontal σ_{xx} para os passos 30 (12749,63 N), 56 (20660,98 N) e 150 (5490,79 N). Sendo o passo 30 referente a um ponto do ramo ascendente da curva, o passo 56 ao limite de carga e o passo 150 ao último passo calculado.

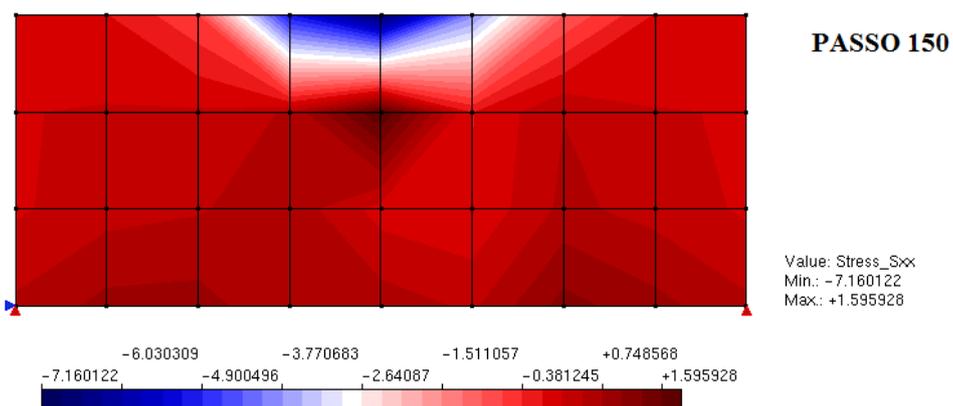
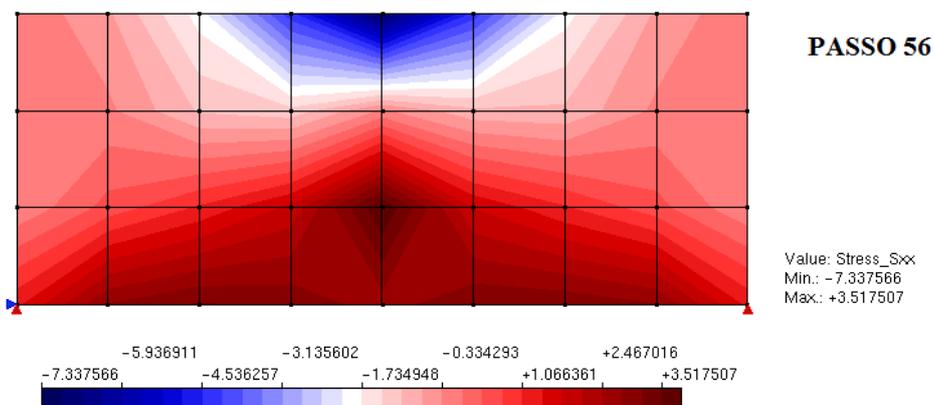
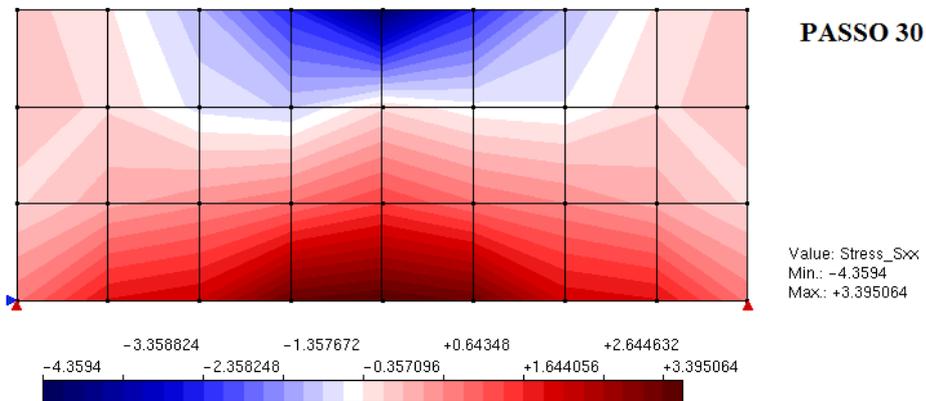


Figura 8. Tensão σ_{xx} MEF^{gl}

A tabela 2 apresenta uma comparação do número total de iterações necessário para a análise das diferentes malhas e leis materiais. O número de iterações é relativo a análise com controle direto de deslocamento com 150 passos incrementais. É possível ver que para ambas as leis o número de iterações, ao utilizar-se uma malha enriquecida, é consideravelmente menor que para as outras malhas.



Tabela 2. Comparação do número total de iterações para as malhas

Lei Carreira-Ingraffea		
	N ^o de Iterações	N ^o de Graus de Liberdade
MEF - Malha Grosseira	1008	72
MEFG ^{gl}	708	94
MEF - Refinada	1106	238
Lei Bilinear		
	N ^o de Iterações	N ^o de Graus de Liberdade
MEF - Malha Grosseira	1053	72
MEFG ^{gl}	712	94
MEF - Refinada	1054	238

5 CONCLUSÕES

No presente trabalho apresentou-se uma nova metodologia de solução que alia o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) à estratégia global-local para a resolução de problemas com não linearidade material.

Foi possível observar, através do exemplo mostrado, que a solução abrange diversos métodos de controle, graças a generalização do código implementado e disponível na plataforma INSANE. Esta generalização se estende aos modelos constitutivos e leis matéricas.

A estratégia mostrou-se eficiente, como pode ser notado na tabela de comparações do número de iterações totais para cada tipo de malha, levando a um menor custo computacional se comparado a uma malha completamente refinada.

Além disso, o método permite uma maior flexibilidade no refinamento de malha, possibilitando a incorporação de um refinamento localizado no domínio sem a exigência de conformidade de malha na vizinhança do problema local.

AGRADECIMENTOS

Os autores reconhecem e agradecem o suporte das agências de pesquisa brasileiras CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais).



REFERÊNCIAS

Alves, P. D., 2012. *Estratégia Global-Local Aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados*. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Barros, F. B., 2002. *Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. Ph.D. dissertation, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.

Boone, T., & Ingraffea, A. R., 1987. Simulation of the Fracture process at Rock Interfaces. *Processings of the fourth international conference in Numerical Methods in Fracture Mechanics*, 519-531.

Carreira, D. J., & Chu, K.-H., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *Journal of the American Concrete Institute* , 82 (6), 797-804.

Carreira, D. J., & Chu, K.-H., 1986. Stress-Strain Relationship for Reinforced Concrete in Tension. *Journal of the American Concrete Institute* , 83 (3), 21-28.

Duarte, C. A., & Kim, D. J., 2008. Analysis and Applications of a Generalized Finite Element Method with Global-Local Enrichment Functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 197, 487-504.

Fuina, J. S., 2004. *Métodos de Controle de Deformações para Análise Não-Linear de Estruturas*. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Gupta, V., Kim, D. J., & Duarte, C. A., 2013. Extensions of the Two-Scale Generalized Finite Element Method to Nonlinear Fracture Problems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering* , 11, 581-596.

Kim, D. J., & Duarte, C. A., 2015. A New Generalized Finite Element Method for two-scale Simulations of Propagating cohesive Fractures in 3-D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , 104, 1139-1172.

Kim, D. J., Duarte, C. A., & Proenca, S. P., 2009. Generalized Finite Element Method with Global-Local Enrichments for Nonlinear Fracture Analysis. *Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* , 317-330.

Penna, S. S., 2011. *Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica - Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto*. Ph.D. dissertation, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Yang, Y. B., & Shieh, M. S., 1990. Solution Method for NonLinear Problems with Multiple Critical Points. *AIAA Journal* , 28, 2110-2116.