

## **ALOCAÇÃO PROSPECTIVA DE CAPITAL DE SOLVÊNCIA USANDO COMBINAÇÕES PREDITIVAS CÓPULAS-ONDALETAS**

**Thiago Dutra de Araújo**

*Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária da Universidade de São Paulo*

**João Vinícius de França Carvalho**

*Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária da Universidade de São Paulo*

### **Resumo**

Este trabalho propõe um modelo dinâmico e prospectivo de alocação de capital de solvência para seguradoras, combinando misturas dinâmicas de cópulas e ondaletas. Isto permite capturar simultaneamente a dinâmica dos parâmetros e pesos da dependência entre riscos, além de realizar previsões de capital mínimo requerido em diferentes horizontes temporais, superando a limitação dos modelos padrão, ao incorporar dinâmicas complexas e sensíveis a choques de mercado e eventos extremos. Usando dados reais de uma seguradora brasileira, o estudo analisou o módulo *subscrição*, considerando dependências entre sinistros incorridos. Os resultados mostram que o modelo padrão tende a superestimar o capital requerido em cerca de 13%, enquanto o proposto oferece estimativas mais aderentes à exposição real ao risco. Ademais, o modelo reage prospectivamente a choques sistêmicos, ajustando o capital em períodos de maior sinistralidade, melhorando a calibração de capital e fortalecendo a resiliência prudencial, subsidiando decisões estratégicas de gestores, reguladores e seguradoras.

**Palavras-chave:** solvência, cópulas dinâmicas, análise de multirresolução, alocação de capital, seguros.

## 1. Introdução

O racional contábil de seguradoras difere ligeiramente do racional de outras empresas (Maggioni & Turchetti, 2024; Bullard, 2013). Em geral, nas empresas de indústria/serviços, passivos e despesas são relativamente previsíveis – custos de insumos/mercadorias, gastos com fornecedores e obrigações financeiras são conhecidos *a priori* –, enquanto as receitas tendem a ser mais incertas e dependem do volume de vendas ou serviços (Dinara, 2024).

Em seguradoras, ocorre o oposto: as receitas provenientes de prêmios são relativamente estáveis, enquanto os passivos e despesas são aleatórios, pois dependem do número e do valor dos sinistros incorridos ao longo do exercício (Di Francesco & Simonella, 2023). Assim, métodos adequados para estimar o total de sinistros são essenciais para precificar apólices corretamente e garantir indicadores confiáveis de solvência (Avanzi et al., 2024). Esses indicadores devem refletir o risco de insolvência ao longo do tempo (Scherer & Stahl, 2021), evitando que eventos extremos levem a seguradora à ruína (Wu, 2020).

Para mitigar esse risco, seguradoras alocam capital econômico adicional, denominado capital de solvência, requerido pelos órgãos reguladores e destinado a limitar a exposição a perdas excessivas (Delsing et al., 2022; Munari et al., 2023). Entre os principais riscos assumidos estão: (i) subscrição, relacionado à precificação e dimensionamento das provisões técnicas; (ii) mercado, vinculados a variações adversas em taxas de juros, câmbio ou *spreads* de crédito; (iii) crédito, ligado à inadimplência de resseguradoras; (iv) operacional, referente a falhas humanas, tecnológicas ou de processos, fraudes e erros de *compliance*, e; (v) intangíveis e emergentes, como riscos climáticos, reputacionais e jurídicos.

A adequada mensuração das interdependências entre esses riscos é crucial para evitar tanto subalocação – que aumenta a exposição – quanto superalocação – que reduz a eficiência do capital (Araichi et al., 2024; Brusov & Filatova, 2023). Por exemplo, uma queda nas taxas de juros (risco de mercado) pode aumentar o risco de subscrição ao reduzir o valor presente das provisões técnicas. Já um evento catastrófico pode gerar sinistros simultâneos em múltiplas linhas de negócio, aumentando o risco de subscrição.

Reconhecendo o impacto da dependência estimada incorretamente na solvência das instituições, reguladores passaram a exigir que modelos de capital considerem explicitamente essas correlações (Eling & Jung, 2020; Dreassi et al., 2018). Contudo, muitas estruturas ainda presumem dependência linear e constante, o que simplifica demais a realidade (Farr et al., 2016). Além disso, a prática de calcular correlações com base em dados históricos de todo o

mercado (modelo retrospectivo amplo) implica assumir que todas as seguradoras compartilham o mesmo perfil de risco e que a dependência passada reflete a futura (Scherer & Stahl, 2021) – premissas pouco realistas.

Por essa razão, reguladores vêm incentivando o desenvolvimento de modelos internos de solvência, adaptados às características específicas de cada instituição. Essa prática é reforçada pelo *Own Risk and Solvency Assessment* (ORSA), um processo de autoavaliação contínua que identifica e quantifica todos os riscos materiais e verifica a adequação do capital econômico. O ORSA é obrigatório sob o regime *Solvency II* na União Europeia e será exigido no Brasil a partir de 2026 por meio da Resolução CNSP nº471/2024.

A formulação de modelos internos e o ORSA evidenciam a importância de estruturas de dependência flexíveis e prospectivas, capazes de explicar a correlação histórica entre riscos e prever sua evolução futura. Nesse contexto, Araújo e Carvalho (2025) apresentaram misturas dinâmicas de cópulas dinâmicas, que tornam tanto os pesos quanto os parâmetros variantes no tempo. Entretanto, como os pesos formam séries não estacionárias, modelos tradicionais ARMA-GARCH são inadequados para realizar previsões (Broby, 2022).

Para superar essa limitação, o presente estudo aplica técnicas baseadas em decomposição por ondaletas, que analisam a dependência simultaneamente nos domínios de tempo e da frequência (Aidoo et al., 2022). Essa abordagem fornece um método prospectivo e consistente para alocação de capital de solvência, em contraste com os métodos retrospectivos atualmente predominantes. Assim, o estudo contribui tanto do ponto de vista metodológico, ao propor uma modelagem mais realista da dependência, quanto do ponto de vista prático, ao oferecer às seguradoras um instrumento para antecipar crises e alinhar-se às práticas modernas de supervisão baseadas no ORSA.

## **2. Alocação de capital de solvência e gestão de seguradoras**

Um dos principais objetivos dos órgãos reguladores é monitorar a solvência das entidades sob sua jurisdição (Regele & Gründl, 2024). A definição do nível de solvência ocorre por meio da exigência de capitais mínimos requeridos, definidos em normas específicas de cada setor (Cotticelli & Savelli, 2024). No mercado segurador, essa regulação é essencial para preservar a estabilidade financeira e proteger segurados, especialmente em períodos de crise (Courtois et al., 2020; Jamaladeen et al., 2022).

Na União Europeia, o órgão regulador *European Insurance and Occupational Pensions Authority* (EIOPA) estabeleceu as regras de solvência nos acordos *Solvency I e II*, emitidos em

2002 e 2009, respectivamente. Enquanto o *Solvency I* revisou e atualizou as regras de solvência já existentes para a União Europeia desde as diretrizes publicadas em 1973 (Não-Vida) e 1979 (Vida), o *Solvency II* introduziu uma estrutura mais abrangente e detalhada, integrando aspectos contábeis e econômicos. O Pilar I do *Solvency II* define os Requerimentos de Capital de Solvência (SCR), assegurando que a probabilidade anual de ruína não ultrapasse 0,5%. O cálculo é modular – abrangendo subscrição (Vida, Não-Vida e Saúde), mercado, crédito, operacional e intangíveis – e a agregação entre módulos é feita via matriz de correlações:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{oper} + SCR_{intang} \quad (1)$$

em que  $i$  e  $j$  denotam elementos do conjunto {subscrição não-vida, subscrição vida, subscrição saúde, mercado e crédito} e  $\rho_{ij}$  representa a correlação entre cada par de riscos envolvidos, dada pelo elemento  $(i,j)$  da matriz de correlação de riscos divulgada na Diretiva EC 138/2009.

Analogamente, no módulo “subscrição não-vida”, o SCR é subdividido em 12 classes de negócio, cada uma com seus riscos de reserva e de prêmio. Após o cálculo individual, os resultados são agregados via correlações estimadas com base em dados de todo o mercado europeu, condicionados ao nível quantílico de 99,5%.

No Brasil, a Superintendência de Seguros Privados (SUSEP) adota metodologia semelhante por meio do Capital Mínimo Requerido (CMR), dividido em módulos de subscrição, mercado, crédito e operacional. No caso do módulo “subscrição não-vida”, o cálculo é dado por:

$$CMR_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{17} \sum_{j=1}^{17} f_i^k \cdot sinistro_i^m \cdot f_j^k \cdot sinistro_j^m \cdot \rho_{ij}^k} \quad (2)$$

em que  $k$  indica {provisão, emissão},  $f_i^k$  é o fator de risco de subscrição  $k$  da classe de negócio  $i$ ,  $sinistro_i^m$  é o montante de sinistro retido dos últimos 12 meses anteriores ao mês  $m$  da classe  $i$  e  $\rho_{ij}^k$  indica a correlação entre as classes  $(i,j)$  para o risco de subscrição  $k$ .

As matrizes de correlação utilizadas para a agregação dos CMR de subscrição foram apresentadas na Resolução CNSP nº321/2015 e atualizadas nas subsequentes, calculadas a partir da metodologia proposta por Altieri, Melo e Veiga Filho (2013). Neste trabalho, os autores utilizaram os microdados de todo o mercado segurador brasileiro à época, restringindo-os também ao nível quantílico de 99,5%, para estimar as parcelas do CMR. Em seguida,

utilizaram cópulas Gaussianas para obter a dependência entre os resíduos das séries de prêmios e sinistros e extraíram uma medida de associação que conseguisse resumir esta estrutura.

Contudo, Scherer e Stahl (2021) observaram inconsistências entre o modelo linear de correlações e o comportamento real das seguradoras, cujas distribuições são frequentemente assimétricas. Defendem, portanto, o uso de cópulas para capturar dependências mais realistas.

Além disso, os coeficientes de correlação utilizados refletem médias de mercado, pressupondo que todas as seguradoras compartilham um mesmo portfólio de risco – suposição refutada por Araújo e Carvalho (2022), que mostraram que uma seguradora brasileira alocou até 220% mais capital ao adotar correlações de mercado em vez das obtidas de seus próprios dados. Estudos semelhantes na Europa (Korn & Stahl, 2024; Müller & Reuse, 2023) reforçam a necessidade de recalibrar modelos às especificidades nacionais e à natureza dos dados.

Outro desafio é que os coeficientes de correlação são baseados em períodos passados e assumindo estabilidade temporal. Yong (2021), por exemplo, mostrou que a pandemia de 2020 alterou permanentemente o padrão de dependência entre riscos, invalidando essa hipótese.

Diante disso, o uso de modelos internos de solvência tem crescido, permitindo incorporar dados específicos (Pelkiewicz et al., 2020) e refletir com mais precisão o perfil de risco de cada instituição (Dacorogna, 2023; Eling & Holzmüller, 2008). No Brasil, a Resolução CNSP nº 416/2021 restringe o uso de tais modelos às seguradoras de grande porte (segmentos S1 e S2), com relevância sistêmica.

Esses modelos internos integram-se ao ORSA, que busca alinhar capital econômico, CMR e apetite de risco, promovendo uma visão prospectiva de solvência. Assim, seguradoras de grande porte que desejam aprimorar sua gestão de capital e fortalecer sua posição competitiva devem investir em métodos dinâmicos e preditivos de alocação de capital.

Krupskii e Joe (2020) mostraram que matrizes dinâmicas de correlação, obtidas de cópulas Gaussianas com coeficientes variantes no tempo, reduziram em até 50% o capital alocado em comparação com o modelo padrão do *Solvency II*. Posteriormente, Araújo e Carvalho (2025) estenderam essa abordagem ao propor misturas convexas dinâmicas de cópulas dinâmicas, que mostraram maior eficiência na precificação de apólices multirrisco.

Neste estudo, tais misturas formam a base de um modelo prospectivo de alocação de capital de solvência, combinando decomposição por ondaletas e séries não estacionárias. A proposta é aplicada a microdados reais de uma seguradora brasileira de grande porte (segmento

S1), comparando-se os resultados do modelo dinâmico com os do padrão nacional, bem como as previsões obtidas por ondaletas e modelos ARIMA-GARCH.

A contribuição central deste trabalho é apresentar um método matematicamente robusto e aplicável à mensuração prospectiva da dependência entre riscos, fornecendo às seguradoras uma ferramenta prática para otimizar a alocação de capital, fortalecer a solvência e alinhar-se às práticas modernas de supervisão, como o ORSA.

### 3. Metodologia

Este trabalho requer conceitos sobre cópulas e ondaletas. Para detalhes, ver Hofert et al. (2018), Joe (2014) e Nelsen (2006) sobre cópulas, e Shumway e Stoffer (2017), Morettin (2014) e Nason (2008) sobre ondaletas.

#### 3.1. Cópulas e medidas de associação

Cópulas são funções que vinculam as distribuições marginais de variáveis aleatórias à sua distribuição conjunta. No caso bivariado, se  $X$  e  $Y$  têm marginais  $F_X$  e  $F_Y$  e distribuição conjunta  $F$ , então existe uma cópula  $C$  tal que  $F = C(F_X, F_Y)$ . Se  $X$  e  $Y$  forem contínuas, então  $C$  é única (Sklar, 1959).

Como  $C$  mapeia toda a estrutura de dependência entre  $X$  e  $Y$ , é útil sintetizá-la em medidas escalares. Aqui, empregamos duas delas: (i) o coeficiente de postos de Spearman ( $\rho_S$ ), e; (ii) o parâmetro de dependência na cauda superior da distribuição conjunta ( $\lambda_U$ ), ambos definidos em termos de cópulas.

A relação entre  $\rho_S$  e  $C$  é

$$\rho_S = -3 + 12 \cdot \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \, dudv \quad (3)$$

O estimador amostral  $\hat{\rho}_S$  é:

$$\hat{\rho}_S = \frac{\text{Cov}(\text{rank}_{x_i}, \text{rank}_{y_i})}{\sqrt{\text{Var}(\text{rank}_{x_i}) \cdot \text{Var}(\text{rank}_{y_i})}} \quad (4)$$

em que  $\text{rank}_{x_i}$  indica a posição de  $x_i$  na amostra.

O parâmetro  $\lambda_U$  avalia a proporção de informação em altos quantis de ambas as variáveis, i.e.,  $F_X = F_Y = k \rightarrow 1^-$ . Se o limite existir, vale:

$$\lambda_U = \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2k + C(k, k)}{1 - k} \quad (5)$$

A Tabela 1 apresenta, para algumas famílias, a relação do parâmetro  $\theta$  com  $\rho_S$  e  $\lambda_U$ , obtidas pelas Equações (3) e (5). O símbolo \* significa ausência de uma forma funcional para aquela relação, mas que pode ser estimada numericamente.

**Tabela 1.** Relação entre  $\rho_S$ ,  $\lambda_U$  e o parâmetro  $\theta$  de algumas cópulas

Cópula	$\lambda_U(\theta)$	$\rho_S(\theta)$
Gaussiana	0	$\frac{6}{\pi} \cdot \arcsen\left(\frac{\theta}{2}\right)$
t-Student	$2t_n\left(-\sqrt{\frac{(n+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right)$	*
Clayton	0	$1 - \frac{2}{\theta} + \frac{2\ln(1+\theta)}{\theta^2}$
Frank	0	$1 - \frac{12}{\theta^3} \int_0^\theta \frac{\theta t - 2t^2}{e^t - 1} dt$
Joe	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	*
Gumbel	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$\frac{12}{\theta} \int_0^1 \frac{[t(1-t)]^{\frac{1}{\theta}-1}}{\left[1 + t^{\frac{1}{\theta}} + (1-t)^{\frac{1}{\theta}}\right]^2} dt - 3$

Fonte: elaboração própria.

Dado um conjunto de dados, as cópulas candidatas podem ser ordenadas por ajuste via o Critério de Informação de Cópulas (CIC) proposto por Grønneberg e Hjort (2014): valores mais altos indicam melhor ajuste do modelo aos dados.

### 3.2. Ondaletas

Ondaletas são funções que representam funcionais por meio de coeficientes obtidos a partir de uma base gerada pelas ondaletas. Essas funções são obtidas por meio de compressões/dilatações e translações de duas funções  $\psi$  (ondaleta-mãe) e  $\phi$  (ondaleta-pai), obtendo as funções  $\psi_{j,k}$  e  $\phi_{j,k}$  tais que

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j x - k) \quad e \quad \phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \phi(2^j x - k) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

Assim, qualquer função de quadrado integrável admite a expansão:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j_0,k} \cdot \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(x) \quad (7)$$

em que  $c_{j_0,k}$  e  $d_{j,k}$  são coeficientes calculados pelos produtos internos  $c_{j_0,k} = \langle f, \phi_{j_0,k} \rangle$  e  $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ , sendo  $j_0$  a escala de resolução mais baixa (usualmente,  $j_0 = 0$ ).

Os coeficientes  $d_{j,k}$  representam os detalhes produzidos pelas ondaletas em certa escala  $j$  e os coeficientes  $c_{j_0,k}$  representam a tendência indicada pelas ondaletas, ambos localizados em  $k$ . A representação da função  $f$  usando a Equação (7) é chamada *transformada de ondaletas* e é indicada por  $\mathcal{W}[f]$ .

Neste trabalho, é fundamental que a transformada  $\mathcal{W}$  admita inversa  $\mathcal{W}^{-1}$ , permitindo que o sinal seja reconstruído após sua decomposição. Isto implica que a ondaleta seja ortogonal (Daubechies, 1988). Como nenhuma ondaleta contínua é ortogonal, serão utilizadas somente ondaletas discretas, como as *daubechies*, *symmlets* e *coiflets*, ondaletas da família de Daubechies.

Com um conjunto de dados observados  $\{x_i\}_{i=1}^n$ , com  $n = 2^J$ ,  $J \in \mathbb{N}$ , a transformada discreta de ondaletas  $\mathcal{W}[x_t]$  fornece os valores  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  por meio de:

$$c_{j-1,k} = \sum_n \ell_{n-2k} \cdot c_{j,n} \quad e \quad d_{j-1,k} = \sum_n h_{n-2k} \cdot c_{j,n} \quad (8)$$

em que  $\ell$  e  $h$  são coeficientes (filtros) dados por:

$$\ell_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt \quad e \quad h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi(2t - k) dt \quad (9)$$

No caso da família de Daubechies, esses filtros são obtidos numericamente – ver a Tabela 4.2 de Morettin (2014). Ainda, para obter os coeficientes  $c_{j,k}$  da escala com maior frequência  $J$ , o estimador de  $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$  é  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{j,k}(x_i)$ .

Para ondaletas ortogonais, a transformada inversa de ondaletas  $\mathcal{W}^{-1}$  é obtida, no caso discreto, por meio da recursão:

$$c_{j,k} = \sum_n \ell_{n-2k} \cdot c_{j-1,n} + \sum_n h_{n-2k} \cdot d_{j-1,n} \quad (10)$$

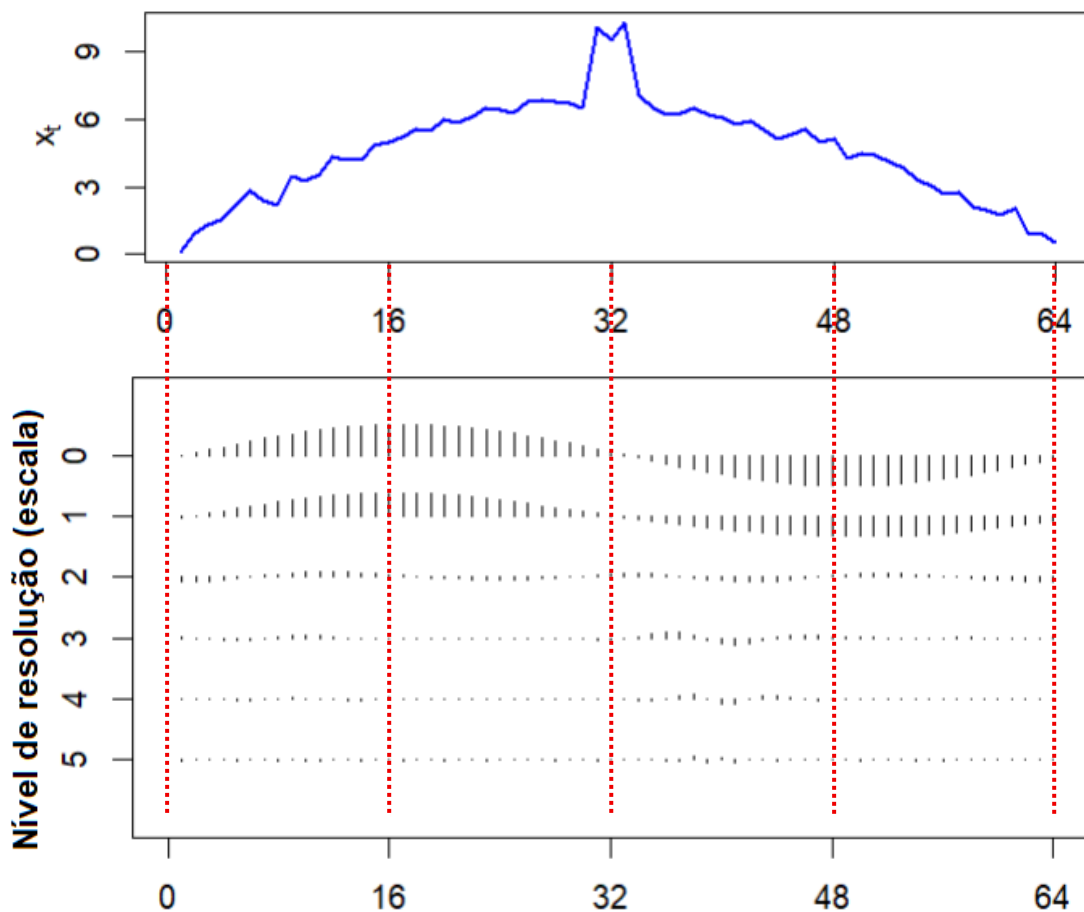
A janela temporal é o intervalo de tempo em que a ondaleta tem valores significativamente não-nulos. Em termos práticos, é o intervalo temporal que a ondaleta “observa” o sinal. Cada coeficiente  $d_{j,k}$  cobre a janela temporal  $[k2^{-j}, k2^{-j} + (L - 1)2^{-j}]$ ,

com duração  $(L - 1)2^{-j}$ . O parâmetro  $L$  é o comprimento do filtro da ondaleta que, no caso discreto, é dado pelo número de coeficientes da ondaleta-mãe.

Quando aplicamos a transformada discreta (Equação (8)), o número de coeficientes em certa escala é reduzido à metade em relação a subsequente. Isto implica que alguns detalhes importantes podem não ter sido capturados neste processo. Para evitar a subamostragem por nível de resolução, é possível aplicar a transformada discreta não-decimada, que usa filtros dilatados para conservar ambas as decimações, pares e ímpares, mantendo o número de coeficientes em cada nível igual ao tamanho da série original. Isto é feito aplicando filtros circularmente à série toda, garantindo máxima sobreposição (*maximal overlap*).

Para ver como a transformada não-decimada auxilia a localizar e a interpretar as variações da série em diversas escalas, descrevendo comportamentos no curto, médio e longo prazo, considere uma realização da série  $x_t = -0.005t^2 + 0.34t + \text{sen}(0.02\pi t) + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0, 0.3)$ ,  $1 \leq t \leq 64$ , com um salto abrupto de +3 em [31,33], e sua transformada discreta não-decimada usando a ondaleta *symmlet la7*. Apresentam-se ambas na Figura 1.

**Figura 1.** Realização de  $x_t$  e sua transformada não-decimada



Pela Figura 1, os níveis 0 e 1 (baixa frequência) mostraram o comportamento da série no longo prazo, indicando que até o instante 32 houve tendência de crescimento (coeficientes positivos), mas que foi revertida a partir disso (coeficientes negativos), condizente com a função quadrática que descreve a tendência na série. Já nos níveis 2 e 3, que descrevem a dinâmica da série no médio prazo, apareceram pequenas variações, referentes às perturbações da componente sazonal senoidal, com aumento de amplitude no intervalo [32,48].

Por fim, os níveis 4 e 5 (alta frequência) descreveram o comportamento da série no curto prazo, refletindo os choques  $\varepsilon_t$  e capturando uma perturbação maior a partir do instante 32, relativa ao salto abrupto. Como será discutido posteriormente na seção 3.4, a escolha da ondaleta para realizar a transformada representa um papel fundamental para capturar a intensidade e a localização dos detalhes em diferentes escalas. Algumas são mais recomendadas quando se quer privilegiar o detalhamento em altas, médias ou baixas frequências.

### 3.3. Misturas convexas dinâmicas de cópulas dinâmicas

Introduzidas por Araújo e Carvalho (2025), as misturas convexas de cópulas são estruturas do tipo  $C = pC_1 + (1 - p)C_2$ , em que  $C$  e  $C_i$  são cópulas e  $0 \leq p \leq 1$ . Estas misturas são dinâmicas se os pesos  $p$  e  $1 - p$  variarem no tempo, i.e., se  $p_t$  for uma série temporal.

Nas misturas dinâmicas de cópulas dinâmicas, as próprias cópulas  $C_i$  também são dinâmicas, i.e., seus parâmetros  $\theta_i$  também variam no tempo, resultando nos processos  $\theta_{i,t}$ .

Para capturar a dinâmica das séries  $\{\theta_{i,t}\}_{t=1}^n$ , adotamos as cópulas condicionais propostas por Patton (2012), considerando tanto a defasagem dos dados como um modelo autorregressivo (AR). Para as cópulas Gaussiana e t-Student, esta dinâmica é dada por:

$$\theta_t = \Lambda \left( \omega + \alpha \cdot \theta_{t-1} + \beta \cdot \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} F_X^{-1}(u_{t-i}) \cdot F_Y^{-1}(v_{t-i}) \right) \quad (11)$$

enquanto para as demais cópulas da Tabela 1, a dinâmica do processo é da forma:

$$\theta_t = \Lambda \left( \omega + \alpha \cdot \theta_{t-1} + \beta \cdot \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} |u_{t-i} - v_{t-i}| \right) \quad (12)$$

sendo  $\theta_t$  o parâmetro da cópula no instante  $t$ ,  $\Lambda$  uma transformação que mantém  $\theta_t$  dentro de seu domínio e  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  os parâmetros do modelo AR.

Já para capturar a dinâmica da série  $\{p_t\}_{t=1}^n$ , os autores propuseram um algoritmo usando a decomposição em ondaletas:

- 1) Determinam-se as cópulas da mistura tomando as 2 cópulas com os maiores valores de CIC dentre as da Tabela 1;
- 2) Constrói-se o processo  $\theta_{i,t}$  usando as Equações (11) e (12) e, em seguida, os processos  $\rho_t$  e  $\rho_{i,t}$  a partir da Tabela 2 e da Equação (4);
- 3) Obtém-se a transformada  $\mathcal{W}$  dos processos  $\rho_t$  e  $\rho_{i,t}$  da etapa anterior;
- 4) Calculam-se as ponderações  $q_j$  para cada escala  $j$  fazendo

$$q_j = \frac{S_{2,j}}{S_{1,j} + S_{2,j}} + \frac{\sqrt{S_j(S_{1,j} + S_{2,j}) - S_{1,j} \cdot S_{2,j}}}{S_{1,j} + S_{2,j}}$$

em que  $S_j$ ,  $S_{1,j}$  e  $S_{2,j}$  denotam a soma dos quadrados dos detalhes da escala  $j$ ;

- 5) Aplica-se a transformada inversa nas séries ponderadas, obtendo-se  $\rho_{1,t}^*$  e  $\rho_{2,t}^*$ ;
- 6) Calculam-se as razões  $r_{1,t} = \frac{\rho_{1,t}^*}{\rho_{1,t}}$  e  $r_{2,t} = \frac{\rho_{2,t}^*}{\rho_{2,t}}$  e, em seguida, o peso  $p_t = \frac{r_{1,t}}{r_{1,t} + r_{2,t}}$ .

Essas misturas dinâmicas permitem maior flexibilidade na estrutura de dependência ao longo do tempo, superando as cópulas dinâmicas, que permitem somente a variação temporal do parâmetro, mantendo-se sempre a família paramétrica.

Um resultado importante que será usado nas seções seguintes é que, se  $C$  for uma mistura convexa dinâmica de cópulas dinâmicas  $C_{1,t}$  e  $C_{2,t}$ , com pesos  $p_{i,t}$  e  $1 - p_{i,t}$ , então o parâmetro de dependência na cauda superior é também uma mistura convexa dos respectivos parâmetros de cauda das cópulas da mistura, i.e.,  $\lambda_{U_t} = p_{1,t} \cdot \lambda_{U_{1,t}} + (1 - p_{1,t}) \cdot \lambda_{U_{2,t}}$ . A demonstração deste resultado encontra-se no Apêndice A3.

#### 4. Previsões usando ondaletas

Os tradicionais modelos ARMA-GARCH podem ser utilizados para fazer previsões de séries somente quando elas forem estacionárias (Box et al., 2016). Diferenciações (ARIMA) e termos de volatilidade (GARCH) ajudam, mas podem perder informação relevante, reduzindo poder preditivo em séries fortemente não estacionárias.

Sejam  $C_0 = (c_{j_0,k})_{k=1}^t$  e  $D_j = (d_{j,k})_{k=1}^t$ ,  $j = 0, \dots, J$ , as sequências das tendências  $c$  e detalhes  $d$  obtidas por meio da transformada discreta não-decimada. Então podemos usar estas sequências para fazer previsões de séries não-estacionárias, gerando resultados mais robustos que os métodos puramente lineares (Guerrier et al., 2022).

A ideia central de usar ondaletas para fazer previsões é, primeiro, decompor a série em diversas escalas para, em seguida, obter um modelo de previsão para cada componente  $D_j$  e  $C_0$  (usando, por exemplo, modelos lineares ARIMA, regressão, redes neurais) separadamente. Por último, basta aplicar a transformada inversa nas previsões, recompondo a previsão da série.

Neste trabalho, será usada a transformada discreta não-decimada para decompor a série temporal. Ainda que ela não seja ortogonal, i.e., os componentes  $D_j$  e  $C_0$  podem estar correlacionados devido à sobreposição de informações entre escalas, em geral estes valores são baixos, o que a classifica como “*quasi-ortogonal*”. Por outro lado, há diversas vantagens em usar a transformada para fazer previsões, sendo, portanto, muito usada em Economia e Finanças (Gallegati, 2008).

Dentre estas vantagens, destaca-se que (i) ela não perde o alinhamento temporal dos coeficientes, pois todos eles têm o mesmo tamanho da série original, independente da escala; (ii) é invertível, pois preserva toda a informação do sinal original (i.e., não há perda de informação, apenas redundância); (iii) a redundância suaviza os coeficientes, ajudando na estabilidade da previsão, e; (iv) possui menor erro de previsão que a transformada decimada (Percival & Walden, 2000).

Neste trabalho, usaremos o modelo ARIMA por escala da ondaleta (“Wavelet ARIMA”) e compararemos os resultados com o tradicional ARIMA-GARCH na série (“ARIMA-GARCH”). Quanto às ondaletas, escolhemos duas que refletirão o horizonte temporal sobre o qual faremos previsões: 1 e 3 anos. Para 1 ano, usaremos a ondaleta *symmlet la10*, adequada pois preserva a forma dos dados e captura bem os detalhes de médio prazo; para 3 anos, usaremos a *coiflet c6*, melhor para capturar tendências de longo prazo pois concentra sua energia em níveis de baixa frequência.

O número de cada ondaleta (10 e 6, respectivamente) representa o tamanho da janela temporal da ondaleta (i.e., número de coeficientes do filtro). Quanto maior esse número, maior a janela e, conseqüentemente, maior o grau de suavização dos coeficientes obtidos, o que estabiliza o erro de previsão do modelo. Para mais informações, consulte os Apêndices B3 e C3.

## 5. Alocação prospectiva de capital de solvência

Esta seção examina como mudanças na estrutura de dependência entre riscos afetam a alocação de capital. Para isso, analisamos o CMR do módulo *subscrição não-vida*, submódulo *emissão*, de uma seguradora brasileira de grande porte (segmento S1), com base em sinistros já incorridos.

O regulador brasileiro (SUSEP) divulga publicamente dados mensais das seguradoras atuantes no Brasil, por ramos de negócio, incluindo sinistros incorridos. Assim, o CMR deste submódulo pode ser calculado pela Equação (2) com a matriz de correlação regulatória. Tomamos esse cenário como base e o comparamos a um cenário dinâmico, que flexibiliza a dependência entre classes por meio de misturas convexas dinâmicas de cópulas dinâmicas.

Como medida de dependência, adotamos o parâmetro de dependência na cauda superior ( $\lambda_U$ ). Embora Altieri, Melo e Veiga Filho (2013) utilizem a correlação de Pearson como medida de dependência, condicionando os dados de todo o mercado ao nível quantílico de 99.5%, alguns autores (Paulusch, 2017 ; Mittnik, 2016) e relatórios<sup>1</sup> recomendam  $\lambda_U$  para quantificar a dependência em extremos, assegurando comparabilidade e maior aderência ao risco prudencial. Além disso, tanto a EIOPA<sup>2</sup> como a Associação Internacional dos Atuários (IAA)<sup>3</sup> recomendam que seja utilizado o parâmetro  $\lambda_U$  como medida de dependência no cálculo de capitais mínimos exigidos.

Segundo a Resolução CNSP nº432/2021 e a Circular SUSEP nº648/2021, para seguradoras que utilizam modelos próprios de solvência, a SUSEP pode exigir que o cálculo do CMR seja feito com periodicidade trimestral, menor do que o modelo padrão anual. Portanto, usamos dados trimestrais desta seguradora, do 1ºtri/2012 ao 3ºtri/2025, trazidos ao valor presente de set/2025.

A Tabela 2 apresenta algumas estatísticas sobre o montante de sinistros incorridos neste período (em R\$), segregados nas diversas classes em que a seguradora atua: 01–Residencial, 04–Patrimonial (Demais), 08–Automóvel e 12–Crédito. Ainda que esta

<sup>1</sup> *EIOPA Report on the 5th Quantitative Impact Study for Solvency II* (2011). Disponível em [https://register.eiopa.europa.eu/Publications/Reports/QIS5\\_Report\\_Final.pdf](https://register.eiopa.europa.eu/Publications/Reports/QIS5_Report_Final.pdf)

<sup>2</sup> *CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR STANDARD FORMULA Article 111(d) Correlations* (2010). Disponível em <https://www.eiopa.europa.eu/system/files/2019-04/ceiops-l2-advice-correlation-parameters.pdf>

<sup>3</sup> *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment*. Disponível em [https://www.casact.org/sites/default/files/2021-05/6I\\_IAA\\_Solvency.pdf](https://www.casact.org/sites/default/files/2021-05/6I_IAA_Solvency.pdf)

entidade atue em outras classes, estas quatro correspondem a 90% do total de sinistros pagos, tendo as demais uma participação inferior a 1%.

**Tabela 2.** Estatísticas descritivas sobre sinistros, segregados por classes

	<b>Média (R\$)</b>	<b>Mediana (R\$)</b>	<b>Desvio-padrão (R\$)</b>	<b>Máximo (R\$)</b>
Residencial	34.293.746,20	31.904.990,95	13.501.426,38	67.751.721,62
Patrimonial	38.257.481,84	29.843.297,20	26.513.425,77	124.060.928,54
Automóvel	1.008.181.437,95	1.004.075.836,12	165.519.800,95	1.358.932.600,79
Crédito	29.215.284,98	31.873.595,80	20.179.373,10	64.726.340,78

Fonte: elaboração própria.

Aplicando as misturas convexas, obtivemos o par das cópulas  $(C_1, C_2)$  mais adequadas a cada par de classes, descritas na Tabela 3.

**Tabela 3.** Par de cópulas utilizadas nas misturas

<b>Par de riscos</b>	<b><math>C_1</math></b>	<b><math>C_2</math></b>
(Automóvel, Residencial)	Frank	Gaussiana
(Automóvel, Crédito)	Frank	Gaussiana
(Patrimonial, Automóvel)	Joe	Gumbel
(Patrimonial, Residencial)	Joe	Gumbel
(Patrimonial, Crédito)	Joe	Gumbel
(Residencial, Crédito)	t-Student	Frank

Fonte: elaboração própria.

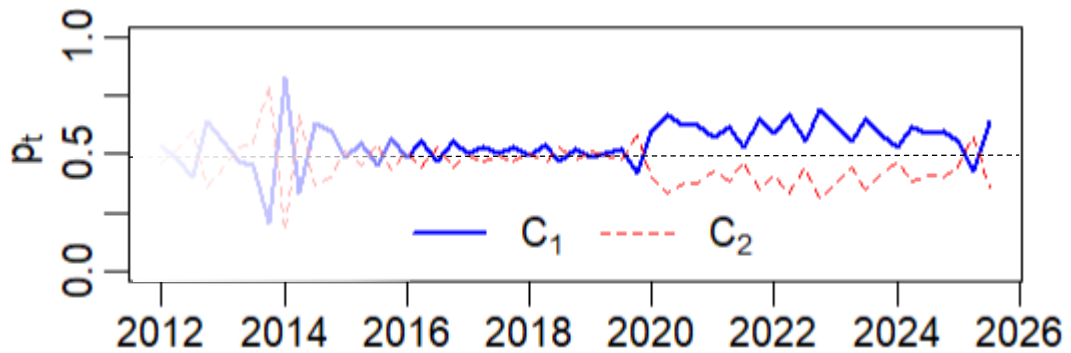
Uma das vantagens do uso do  $\lambda_U$  como medida de dependência é que, de acordo com a Tabela 1,  $\lambda_U = 0$  para as cópulas de Frank e Gaussiana, implicando não ser necessário obter os pesos das misturas para os pares (Automóvel, Residencial) e (Automóvel, Crédito). Em outras palavras, nestes pares, a probabilidade da ocorrência de altos quantis em uma classe, dado que houve alto quantil na outra classe, é nula. Isto implica que graves sinistros da classe Automóvel não estão correlacionados a graves sinistros de Crédito ou Residencial.

Aplicando o algoritmo proposto na seção 3.3 para os outros quatro pares, obtivemos as séries temporais dos pesos  $p_t$  para cada caso, representados na Figura 2. Segundo os autores, a estimação dos pesos nos modelos dinâmicos produz alto grau de viés quando a amostra é

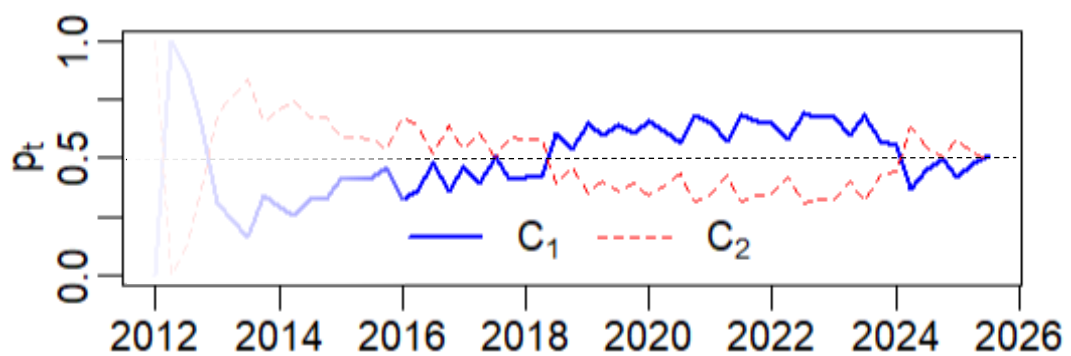
pequena, o que ocorre nos primeiros anos, causando grandes distorções nos valores obtidos no início da série (2012 a 2016). Isso justifica o esfumaçado do início de cada gráfico.

**Figura 2.** Ponderações de cada cópula na mistura ao longo do tempo

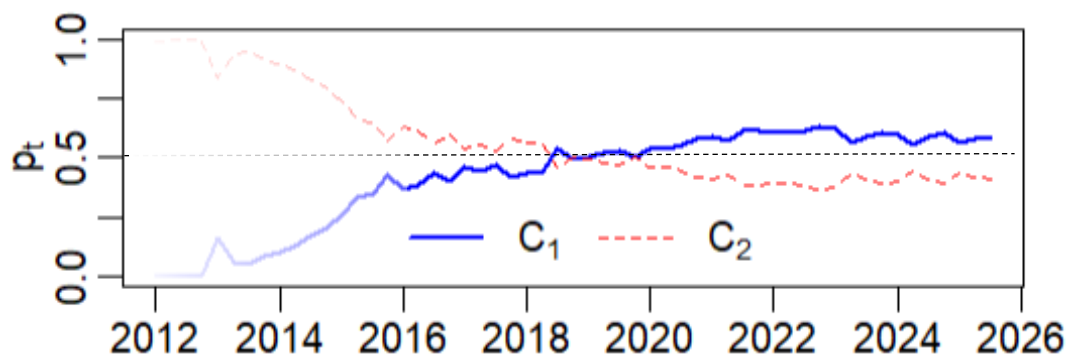
(Patrimonial, Automóvel)



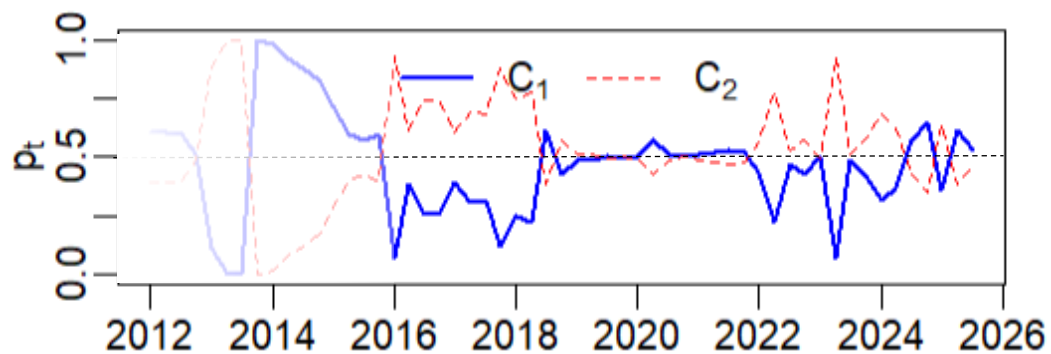
(Patrimonial, Residencial)



(Patrimonial, Crédito)



(Residencial, Crédito)



Fonte: elaboração própria.

Para entender a dinâmica das ponderações das cópulas de Joe e Gumbel nos três primeiros casos, é importante notar que ambas são assimétricas e com grande densidade na cauda conjunta superior. Ainda, Joe é mais densa do que a Gumbel nos altos quantis conjuntos, sugerindo que ela é mais adequada para modelar dependências entre sinistros com altas severidades em múltiplas classes de seguros.

Em relação ao par (Patrimonial, Automóvel), entre 2016-2020 houve uma ponderação estável entre as cópulas, próximas de 50% cada. No entanto, a partir de 2020, identificou-se uma quebra estrutural, sendo a cópula de Joe mais preponderante do que a Gumbel desde então. Isso quer dizer que a dependência entre sinistros gerados por eventos extremos aumentou neste período, o que pode ser justificado por dois fatores: a crise da Covid-19 e uma sucessão de eventos climáticos nas regiões Sudeste e Sul do Brasil.

De 2020 a 2022, a pandemia da Covid-19 acionou a cobertura de diversas apólices por lucros cessantes (Gomes & Carvalho, 2025), uma das coberturas da classe Patrimonial. Além disso, impactou a classe de Automóveis de duas formas: (i) aumento no número de compras *online*, impactando o número de entregadores de *delivery*, e; (ii) após a fase aguda do *lockdown*, muitos evitavam transporte público e dirigiam seus carros, aumento a exposição ao risco.

Em 2023 e 2024, grande parte da exposição geográfica desta seguradora foi atingida por grandes volumes de chuvas, causando enchentes e diversos estragos de alta magnitude, para ambas as classes. Ademais, a partir de 2020 houve uma ruptura na cadeia global de suprimentos, como a falta de semicondutores e outras peças, encarecendo as indenizações por colisão ou perda total.

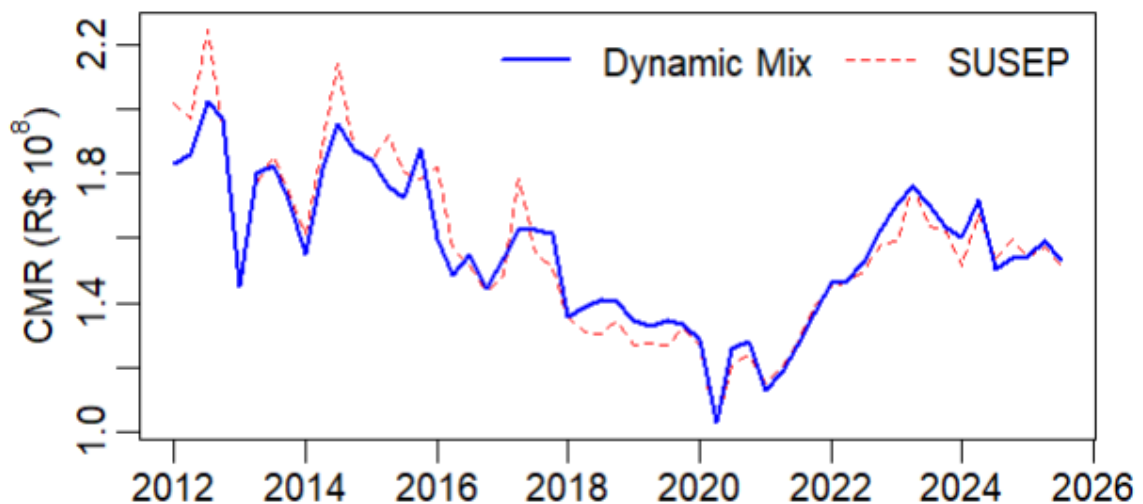
Nos outros pares que envolvem a classe Patrimonial, destaca-se a quebra estrutural das séries em meados de 2018 e 2019, destacando o aumento da ponderação da cópula de Joe a

partir disso. Esse aumento pode ser justificado a partir de dois fatores: (i) um excesso de eventos climáticos severos, que culminou na perda de residências de diversos brasileiros, agravando riscos de engenharia e outros patrimoniais, e; (ii) o rompimento da barragem na cidade de Brumadinho (MG), onde esta seguradora oferecia cobertura. Esse grave desastre gerou elevados montantes indenizatórios em todas essas classes, desde a cobertura por lucros cessantes, patrimoniais, residenciais, agrícolas, responsabilidade, crédito, entre outros.

No caso do par (Residencial, Crédito), identificou-se 3 regimes distintos. Em dois deles (de 2016-2018 e de 2022-2025) houve um predomínio da cópula de Frank – simétrica e de cauda leve – e um terceiro (de 2018-2022) onde houve uma presença maior da cópula t-Student na mistura. A cópula t-Student, embora seja simétrica, possui cauda mais pesada e consegue capturar melhor a dependência entre eventos extremos, como reflexo de eventos climáticos, desastres ambientais e a pandemia da Covid-19.

Usando estes pesos, a Tabela 1 para a obtenção da medida de dependência e a Equação (2), obteve-se o valor do CMR referente ao submódulo *emissão* do módulo *subscrição não-vida* desta seguradora, considerando a correlação padrão fornecida pela SUSEP e o modelo de misturas dinâmicas de cópulas dinâmicas. Estes resultados estão representados na Figura 3.

**Figura 3.** Diferenças na alocação de capital usando misturas dinâmicas



Fonte: elaboração própria.

Pela Figura 3, nota-se que os valores alocados segundo o modelo padrão da SUSEP tendem a ser superiores do que o proposto pelo modelo próprio dinâmico, em consonância com os achados de Eling e Jung (2020) e Boonen (2017). Além disso, quando o modelo interno superou o padrão (e.g., de 2018-2020, ou entre 2020-2021) isto indica a ocorrência de eventos

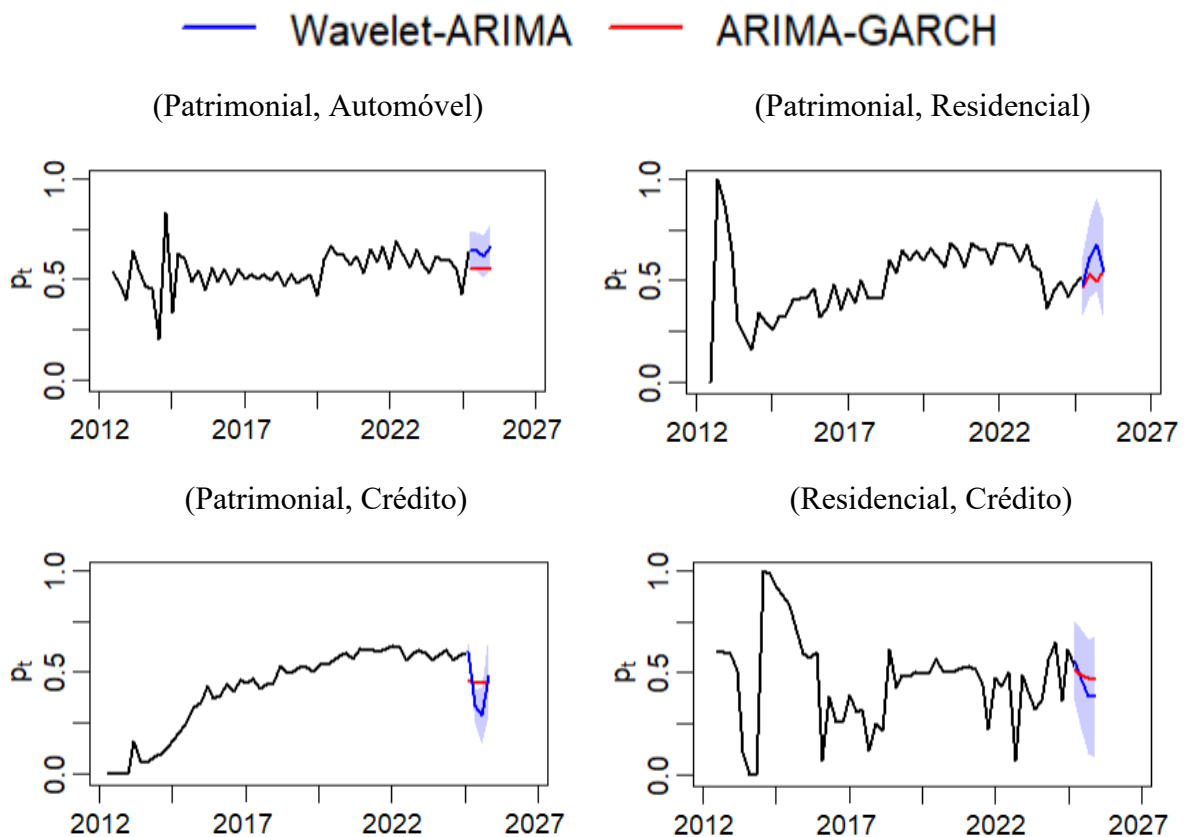
extremos que poderiam ter comprometido sua solvência. Note que estes instantes coincidem com as quebras estruturais das séries representadas na Figura 2.

As diferenças ilustradas na Figura 3 podem configurar importante argumento a respeito do incentivo que as seguradoras têm para desenhar modelos internos de solvência. Afinal, a mensuração do risco de insolvência pode ser aprimorada quando as idiossincrasias de cada entidade são incorporadas na estrutura de dependência.

Uma vez analisado o modelo de misturas dinâmicas para entender a dinâmica de alocação de capitais com base em dependências passadas, agora podemos usá-lo também para realizar alocações prospectivas, prevendo também dependências futuras.

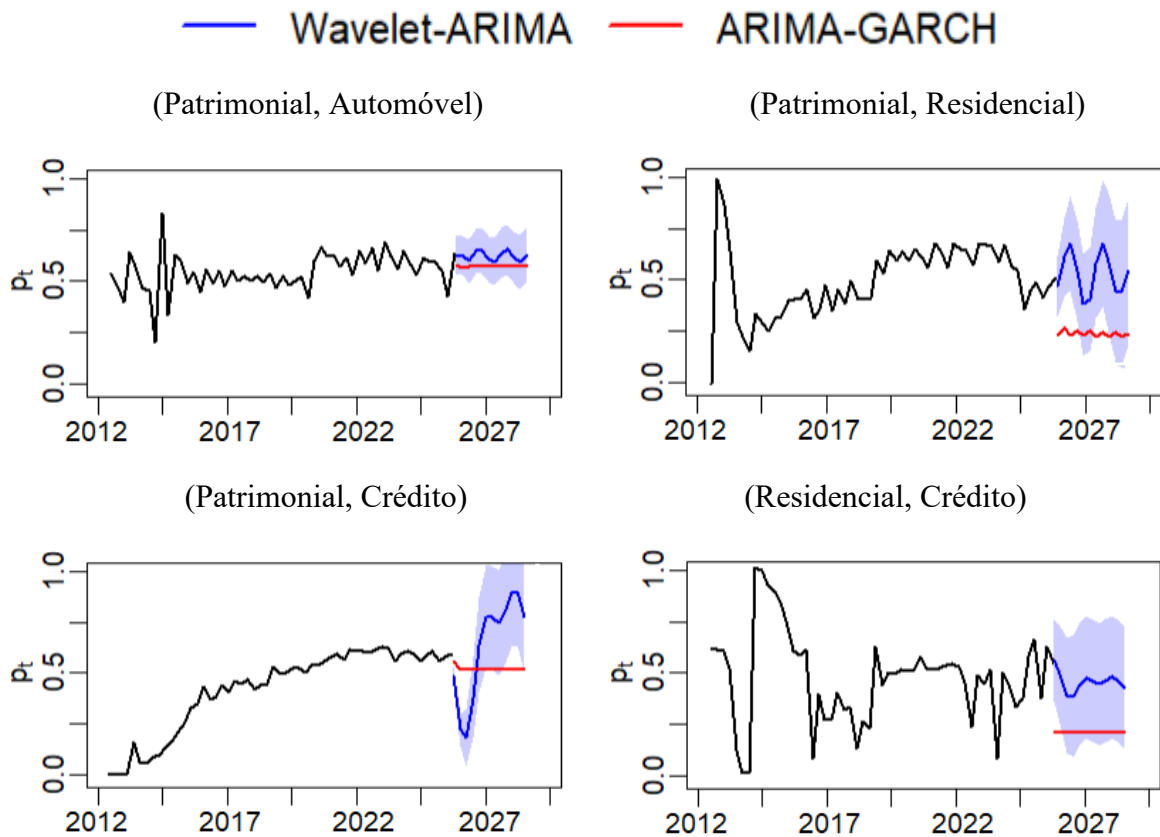
Usando-se ambos os modelos da seção 3.4 para obter as previsões  $\hat{p}_{T+h}$  das séries de pesos, com início em  $T$  e horizonte  $h$ , foram feitas previsões para  $h = 4$  (1 ano) e  $h = 12$  (3 anos). A escolha destes horizontes está relacionada ao processo de alocação prospectivo recomendado pelo ORSA, que sugere uma projeção da posição de solvência pelos próximos 3 anos. As Figuras 4 e 5 mostram a previsão para cada par de riscos.

**Figura 4.** Previsão de pesos para cada par de riscos ( $h = 4$ )



Fonte: elaboração própria.

**Figura 5.** Previsão de pesos para cada par de riscos ( $h = 12$ )



Fonte: elaboração própria.

Nas Figuras 4 e 5, são evidentes as diferenças entre as projeções fornecidas por estes modelos, sendo o “Wavelet-ARIMA” aquele que conseguiu capturar mais características das séries de pesos, para todos os pares de riscos.

Em seguida, estimou-se  $\hat{\lambda}_{U_{T+h}}$  usando  $\hat{\lambda}_{U_{T+h}} = \hat{p}_{1,T+h} \cdot \hat{\lambda}_{U_{1,T+h}} + (1 - \hat{p}_{1,T+h}) \cdot \hat{\lambda}_{U_{2,T+h}}$  e as previsões obtidas. Usando estes valores e a Equação (2), determinou-se a alocação futura de CMR para o submódulo *emissão* do módulo *subscrição não-vida* desta seguradora, considerando que ela opera somente nestas 4 classes, um sinistro trimestral unitário (R\$1) e que a matriz de correlação em vigência, fornecida pela SUSEP, mantenha-se constante para os próximos 3 anos. As alocações prospectivas usando o modelo padrão e o proposto neste trabalho aparecem na Tabela 4 para alguns horizontes temporais.

**Tabela 4.** Comparação entre CMRs futuros

	<b>Próximo trimestre</b> <b>(<math>h = 1</math>)</b>	<b>Próximo ano</b> <b>(<math>h = 4</math>)</b>	<b>Daqui 3 anos</b> <b>(<math>h = 12</math>)</b>
<b>CMR<sub>proposto</sub></b>	0,77628	3,10513	9,31541
<b>CMR<sub>padrão</sub></b>	0,89792	3,57522	10,70975
<b>Variação percentual</b>	-13,5%	-13,1%	-13,0%

Fonte: elaboração própria.

Como já evidenciado anteriormente, a Tabela 4 corrobora com o fato de que o CMR obtido segundo o modelo padrão tende a superar o proposto pelo modelo interno, com uma variação de 13% em relação imposto pelo regulador. É importante ressaltar que esta diferença (i) considera um sinistro trimestral constante (no caso, R\$1) nos instantes futuros, o que pode não ser verdade e a diferença pode ser substancialmente maior, e; (ii) mantém-se independente do horizonte temporal de previsão, mostrando que, tanto no curto como no médio prazo, a seguradora estaria alocando mais capital do que o necessário.

De posse das previsões  $\hat{\lambda}_U$ , é possível obter estimadores para os montantes trimestrais de sinistros incorridos e, assim, calcular o CMR prospectivo considerando este modelo próprio. Para exemplificar essa afirmação, considere que as séries trimestrais de sinistros para cada classe possam ser modeladas usando o “Wavelet-ARIMA” e, então, observa-se na Tabela 5 os valores alocados de CMR do submódulo *emissão* do módulo *subscrição não-vida* para esta seguradora, segundo o modelo próprio e o padrão do regulador.

**Tabela 5.** Valores de CMRs futuros (R\$ 10<sup>8</sup>)

	<b>Próximo trimestre</b>	<b>Acumulado no próximo ano</b>	<b>Acumulado no ano, daqui 3 anos</b>
<b>CMR<sub>proposto</sub></b>	1,5605	6,2435	6,2344
<b>CMR<sub>padrão</sub></b>	1,6361	6,5047	6,4782
<b>Variação percentual</b>	-4,6%	-4,0%	-3,0%

Fonte: elaboração própria.

Novamente, o modelo padrão tende a superar o modelo interno dinâmico, agora com uma diferença percentual menor. Entretanto, ao se considerar a diferença absoluta de capital

alocado para o próximo ano, este número ultrapassaria os R\$ 26,1 milhões de reais, uma quantia substancial que poderia ser utilizada para outros fins na empresa.

Outra vantagem do modelo dinâmico é que ele pode ser usado de forma prospectiva, oferecendo um nível de capital a ser alocado considerando não somente as correlações passadas, mas também modelos de projeções futuras que ajudam a aprimorar o processo de alocação. Modelos como este configuram vanguarda em metodologias de alocação de capital, alinhando orientações e regulamentações modernas – como o ORSA – à prática de gestão de seguradoras.

## 6. Considerações finais

A regulação dos setores econômicos é um pilar fundamental para a sustentabilidade e a continuidade operacional das entidades que neles atuam (Courtois et al., 2020). Entre as atribuições das autoridades supervisoras destaca-se o monitoramento da solvência das instituições sob sua jurisdição (Regele & Gründl, 2024). Em geral, os níveis mínimos de solvência são definidos via capitais requeridos, cujos parâmetros constam de normas ajustadas às especificidades institucionais de cada segmento (Cotticelli & Savelli, 2024).

No setor de seguros, EIOPA (União Europeia) e SUSEP (Brasil) adotam fórmulas que segmentam os riscos em módulos. O capital é calculado por módulo e agregado por matrizes de correlação definidas regulatoriamente. A simplicidade dessa agregação – e suas limitações – vem sendo apontada na literatura (Farr et al., 2016; Korn & Stahl, 2024). Em resposta, reguladores incentivam modelos internos para seguradoras de grande porte, mais aderentes ao perfil de risco de cada instituição, e vêm incorporando diretrizes prospectivas (e.g., ORSA), com impacto crescente sobre a gestão de risco.

Este trabalho apresentou um modelo de alocação de capital que combina dinâmica e projeção: misturas convexas dinâmicas de cópulas dinâmicas (Araújo & Carvalho, 2025) para capturar dependências variantes no tempo e ondaletas para previsão em múltiplos horizontes. Como técnica espectral, ondaletas segregam a dependência por escalas, permitindo analisar e prever comportamento no curto, médio e longo prazo. Note que a escolha da ondaleta afeta diretamente o erro preditivo. Logo, deve ser alinhada ao horizonte de projeção visado.

A aplicação com dados reais de uma seguradora brasileira de grande porte, a partir de informações públicas da SUSEP, focou o CMR de subscrição não-vida (*emissão*) e a dependência dinâmica entre sinistros incorridos nas principais classes de negócio. Os resultados indicam que os modelos padrão tendem a superestimar a alocação de capital – em linha com evidências anteriores (Eling & Jung, 2020 ; Boonen, 2017). Em contrapartida, diante de eventos

extremos, o modelo dinâmico reage de modo mais prospectivo, indicando elevação do capital quando necessário. Nas projeções de CMR, o modelo interno continuou mais parcimonioso que o padrão, mesmo sob o cenário conservador de sinistros futuros constantes.

Este estudo contribui para a literatura de solvência e gestão de riscos ao oferecer um arcabouço metodológico que permite lidar com a alocação de capitais de forma prospectiva, incorporando a natureza dinâmica da dependência entre riscos financeiros. O modelo fornece uma alternativa viável para superar as limitações das abordagens retrospectivas, introduzindo um indicador capaz de antecipar alterações na estrutura de dependência entre riscos. Do ponto de vista prático, ele beneficia diretamente gestores de risco, ao permitir alocações mais eficientes e prospectivas que evitam tanto o excesso de exposição quanto o custo de oportunidade de capital ocioso. Também oferece suporte a outros tomadores de decisão das seguradoras, ao incentivá-los a desenvolver modelos internos de solvência mais alinhados ao seu perfil e apetite de risco, com potencial para aprimorar decisões estratégicas em áreas como retenção, resseguro e precificação.

Do lado regulatório, os resultados fornecem embasamento técnico para que órgãos supervisores estimulem o desenvolvimento de modelos internos por seguradoras de grande porte e aperfeiçoem seus mecanismos de monitoramento prospectivo da suficiência de capital. Finalmente, os segurados – contraparte direta dos contratos de seguro – também se beneficiam, uma vez que uma melhor calibração do capital fortalece a capacidade das seguradoras de honrar seus compromissos e pode, a longo prazo, refletir em maior estabilidade e eficiência tarifária.

Este artigo, contudo, apresenta algumas limitações. Entre elas, destacam-se a aplicação de modelos lineares em cada escala e a suposição de ortogonalidade entre o vetor de pesos e o vetor de parâmetros como condição necessária às previsões. Pesquisas futuras podem comparar o modelo proposto a outros métodos preditivos baseados em ondaletas, como regressões multivariadas e técnicas de aprendizado de máquina. Outra possibilidade é ampliar o número de cópulas nas misturas usando estruturas hierárquicas, ou ainda aplicar o modelo em outros módulos do padrão regulatório – como o de crédito ou de mercado –, cuja influência sobre a solvência das seguradoras pode ser decisiva dependendo da composição de suas carteiras.

## 7. Referências

Aidoo, A. Y., Botchway, G. A., & Wilson, M. A. S. A. (2022). Application to Medical Image Processing. In F. Bulnes (Ed.), *Recent Advances in Wavelet Transforms and Their Applications* (1st ed., p. 172). IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/intechopen.102819>

- Altieri, E., Melo, E. F. L. de, & Filho, A. L. V. (2013). Modelo de cálculo da necessidade de capital para cobrir os riscos de subscrição de operações não-vida. *Revista Brasileira de Risco e Seguro*, 9(17), 1–46.
- Araichi, S., Peretti, C., & Belkacem, L. (2024). Forecasting reserve risk for temporal dependent losses in insurance. *International Journal of Finance and Economics*, 1–16. <https://doi.org/10.1002/ijfe.3014>
- Araújo, T. D., & Carvalho, J. V. de F. (2022). Capturing the dependence among large losses using extreme-value copulas. *Joint CAS / AFIR-ERM / ASTIN Colloquia*, 30.
- Araújo, T. D., & Carvalho, J. V. de F. (2025). Dynamic mixtures of dynamic copulas using wavelets with actuarial application. *II Joint Colloquium of All IAA Sections*, 1–35.
- Avanzi, B., Lau, H., & Steffensen, M. (2024). Optimal reinsurance design under solvency constraints. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2024(4), 383–416. <https://doi.org/10.1080/03461238.2023.2257405>
- Boonen, T. (2017). Solvency II solvency capital requirement for life insurance companies based on expected shortfall. *European Actuarial Journal*, 7, 405–434. <https://doi.org/10.1007/s13385-017-0160-4>
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., & Ljung, G. M. (2016). *Time Series Analysis - Forecast and Control* (5th ed.). Wiley.
- Broby, D. (2022). The use of predictive analytics in finance. *The Journal of Finance and Data Science*, 8, 145–161. <https://doi.org/10.1016/j.jfds.2022.05.003>
- Brusov, P., & Filatova, T. (2023). Capital structure theory: past, present, future. *Mathematics*, 11(3). <https://doi.org/10.3390/math11030616>
- Bullard, M. J. (2013). *Insurance accounting: a comprehensive overview*. Createspace Independent Pub.
- Cotticelli, S., & Savelli, N. (2024). Capital requirement modeling for market and non-life premium risk in a dynamic insurance portfolio. *Annals of Actuarial Science*, 18(1), 205–236. <https://doi.org/10.1017/S1748499523000234>
- Courtois, O. Le, Lévy-Véhel, J., & Walter, C. (2020). Regulation risk. *North American Actuarial Journal*, 24(3), 463–474. <https://doi.org/10.1080/10920277.2019.1679189>
- Dacorogna, M. (2023). How to gain confidence in the results of internal risk models?

- Approaches and techniques for validation. *Risks*, 11(5).  
<https://doi.org/10.3390/risks11050098>
- Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41(7), 909–996.  
<https://doi.org/10.1002/cpa.3160410705>
- Delsing, G. A., Mandjes, M. R. H., Spreij, P. J. C., & Winands, E. M. M. (2022). On capital allocation for a risk measure derived from ruin theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 104, 76–98. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2022.02.001>
- Di Francesco, M., & Simonella, R. (2023). A stochastic asset liability management model for life insurance companies. *Financial Markets and Portfolio Management*, 37, 61–94.  
<https://doi.org/10.1007/s11408-022-00411-0>
- Dinara, K. (2024). Theoretical foundations of accounting of income and expenses of insurance organizations. *World Bulletin of Management and Law*, 38, 1–4.
- Dreassi, A., Miani, S., Paltrinieri, A., & Sclip, A. (2018). Bank-Insurance Risk Spillovers: Evidence from Europe. *Geneva Papers on Risk and Insurance: Issues and Practice*, 43(1). <https://doi.org/10.1057/s41288-017-0049-0>
- Eling, M., & Holzmüller, I. (2008). An overview and comparison of risk-based capital standards. *Journal of Insurance Regulation*, 26(4), 31–60.
- Eling, M., & Jung, K. (2020). Risk aggregation in non-life insurance: Standard models vs. internal models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 95, 183–198.  
<https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.09.003>
- Farr, I., Koursaris, A., & Mennemeyer, M. (2016). *Economic capital for life insurance companies*.
- Gallegati, M. (2008). Wavelet analysis of stock returns and aggregate economic activity. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52(6), 3061–3074.  
<https://doi.org/10.1016/j.csda.2007.07.019>
- Gomes, I. G. M., & Carvalho, J. V. F. (2025). Side effects of the pandemic: impacts on the business interruption insurance market. *Revista Contabilidade & Finanças*, 36(spe1).  
<https://doi.org/10.1590/1808-057x2024143.en>
- Grønneberg, S., & Hjort, N. L. (2014). The Copula Information Criteria. *Scandinavian*

- Journal of Statistics*, 41(2), 436–459. <https://doi.org/10.1111/sjos.12042>
- Guerrier, S., Molinari, R., Victoria-Feser, M.-P., & Xu, H. (2022). Robust two-step wavelet-based inference for time series models. *Journal of the American Statistical Association*, 117(540), 1996–2013. <https://doi.org/10.1080/01621459.2021.1895176>
- Hofert, M., Kojadinovic, I., Mächler, M., & Yan, J. (2018). *Elements of copula modeling with R*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-89635-9>
- Jamaladeen, A., Omoregie, D. E., Onipede, S. F., & Bashir, N. A. (2022). A regime-switching skew-normal model of contagion in some selected stock markets. *SN Business & Economics*, 2(185), 20. <https://doi.org/10.1007/s43546-022-00357-5>
- Joe, H. (2014). *Dependence modeling with copulas* (1st ed.). Chapman and Hall.
- Korn, R., & Stahl, G. (2024). A first look back: model performance under Solvency II. *European Actuarial Journal*, 14, 307–315. <https://doi.org/10.1007/s13385-023-00374-0>
- Krupskii, P., & Joe, H. (2020). Flexible copula models with dynamic dependence and application to financial data. *Econometrics and Statistics*, 16, 148–167. <https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2020.01.005>
- Maggioni, M., & Turchetti, G. (2024). Regulation of the insurance industry. In *Fundamentals of the Insurance Business* (pp. 53–66). Springer Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-52851-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-52851-9_4)
- Mittnik, S. (2016). *Solvency II calibrations: where curiosity meets spuriousity*. <https://doi.org/10.20944/preprints201607.0021.v1>
- Morettin, P. A. (2014). *Ondas e ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas de séries temporais* (2nd ed.). Edusp.
- Müller, A., & Reuse, S. (2023). Solvency II post-Brexit: equivalence discussion in light of the UK Solvency II review and the financial services and markets bill. *Journal of Financial Regulation and Compliance*, 31(5), 630–662. <https://doi.org/10.1108/JFRC-04-2023-0050>
- Munari, C., Weber, S., & Wilhelmy, L. (2023). Capital requirements and claims recovery: a new perspective on solvency regulation. *Journal of Risk and Insurance*, 90(2), 329–380. <https://doi.org/10.1111/jori.12405>
- Nason, G. P. (2008). *Wavelet methods in statistics with R* (1st ed.). Springer New York.

<https://doi.org/10.1007/978-0-387-75961-6>

- Nelsen, R. B. (2006). *Introduction to copulas* (2nd ed.). Springer International Publishing.
- Patton, A. J. (2012). A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis*, *110*, 4–18. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2012.02.021>
- Paulusch, J. (2017). The Solvency II standard formula, linear geometry and diversification. *Journal of Risk and Financial Management*, *10*(2), 1–11. <https://doi.org/10.3390/jrfm10020011>
- Pelkiewicz, A., Ahmed, S., Fulcher, P., Johnson, K., Reynolds, S., Schneider, R., & Scott, A. (2020). A review of the risk margin – Solvency II and beyond. *British Actuarial Journal*, *25*(1), 1–72. <https://doi.org/10.1017/S135732172000001X>
- Percival, D. B., & Walden, A. T. (2000). *Wavelet methods for time series analysis* (1st ed.). Cambridge University Press.
- Regele, F., & Gründl, H. (2024). Sectoral asset concentrations and insurance solvency regulation. *Journal of Insurance Regulation*, *43*(1), 1–44. <https://doi.org/10.52227/26725.2024>
- Scherer, M., & Stahl, G. (2021). The standard formula of Solvency II: a critical discussion. *European Actuarial Journal*, *11*, 3–20. <https://doi.org/10.1007/s13385-020-00252-z>
- Shumway, R. H., & Stoffer, D. S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications* (Springer (ed.); 4th ed). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-52452-8>
- Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Univeristé de Paris*, *8*, 229–231.
- Wu, Y.-C. (2020). Equilibrium in natural catastrophe insurance market under disaster-resistant technologies, financial innovations and government interventions. *Insurance: Mathematics and Economics*, *95*, 116–128. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.08.006>
- Yong, J. (2021). *Vaccinating insurers against pandemics – a review of capital requirements for pandemic risk*.

### Apêndice A3 – Demonstração da Proposição da seção 3.3.

O coeficiente de associação da cauda superior  $\lambda_U$  pode ser escrito como combinação linear dos respectivos coeficientes relativos às cópulas  $C_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ):

$$\begin{aligned}
 \lambda_U &= \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2k + C(k, k)}{1 - k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{(1 - 2k) \cdot 1 + \sum p_j C_j(k, k)}{1 - k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{(1 - 2k) \sum p_j + \sum p_j C_j(k, k)}{1 - k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{\sum p_j \cdot [1 - 2k + C_j(k, k)]}{1 - k} \\
 &= \sum p_j \cdot \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2k + C_j(k, k)}{1 - k} \\
 &= \sum p_j \cdot \lambda_{U_j}
 \end{aligned}$$

### Apêndice B3 – Escolhas de modelos e de ondaletas

Dois fatores que podem afetar a qualidade das previsões feitas são: (i) a escolha do modelo de previsão para cada escala, e; (ii) o tipo de ondaleta de Daubechies usado na transformada. Sobre os modelos de previsão, é possível comparar os resultados obtidos por três deles: (i) ARIMA-GARCH na série (“ARIMA-GARCH”); (ii) ARIMA por escala da ondaleta (“Wavelet ARIMA”); (iii) ARIMA no nível de tendência e GARCH nas escalas de detalhes da ondaleta (“Wavelet GARCH”).

Quanto às ondaletas, testaremos as *daublets* (*‘db’*), que possuem boa adequação na captura e localização de informações em alta frequência, privilegiando detalhes no curto prazo; as *symmlets* (*‘la’*), que ajudam a preservar a forma dos dados, capturando bem os detalhes de médio e longo prazo, e; as *coiflets* (*‘c’*), melhores para capturar tendências de longo prazo, concentrando sua energia em níveis de baixa frequência.

Para avaliar esses cenários, será retomada a série  $x_t$  da Figura 1 só que, agora, tomando somente as 54 primeiras observações – as 10 restantes serão utilizadas como *backtest* para avaliar a qualidade da previsão, considerando diferentes horizontes temporais. O melhor ajuste dos dados aos modelos ARIMA será feito segundo o Critério de Informação de Akaike corrigido (AICc) e, para os modelos GARCH, será considerada a especificação GARCH(1,1).

Já sobre as ondaletas, serão testadas a *db1*, *db9*, *la4*, *la10*, *c2* e *c6*. A intenção é escolher ao menos duas ondaletas de um mesmo tipo, considerando diferentes janelas temporais. Como já explicitado no texto, quanto maior esse número, maior a janela e, conseqüentemente, maior o grau de suavização dos coeficientes obtidos.

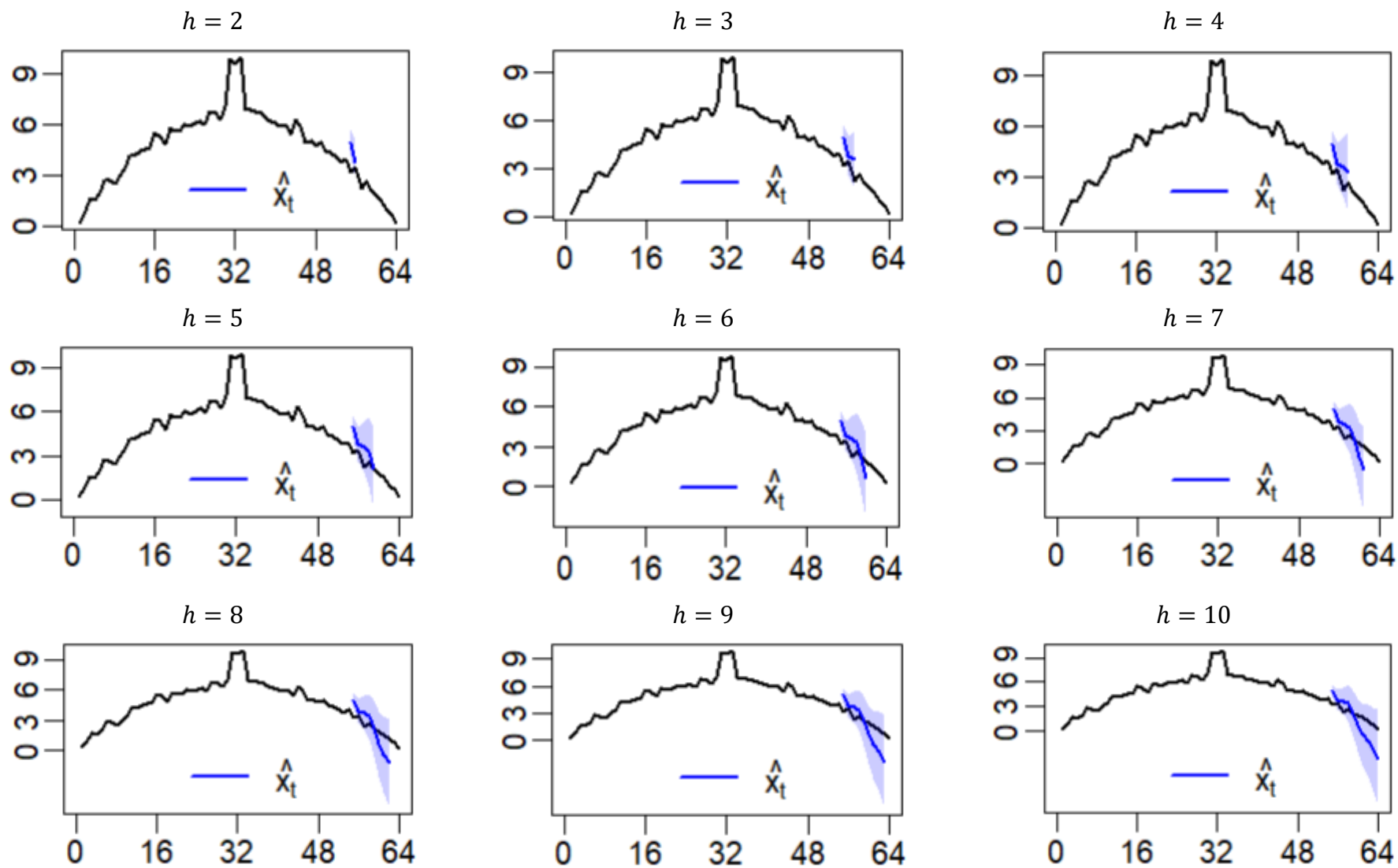
A Tabela C3.1 do Apêndice C mostra o erro quadrático médio (MSE) para cada um dos 3 modelos, considerando diferentes ondaletas e alguns horizontes temporais ( $h$ ) de previsão. As células destacadas indicam os menores valores de MSE para cada horizonte temporal.

Pela Tabela C3.1, em nenhum caso o modelo 1 (ARIMA-GARCH) superou os demais em que as previsões foram obtidas via ondaletas. Ademais, à medida que o horizonte temporal aumenta, a ondaleta com menor MSE deixou de ser *symmlet*, passando a ser *coiflet*, condizente com sua característica de captura de tendências de longo prazo. Elevação na quantidade de coeficientes dos filtros auxiliou na obtenção de melhores previsões, uma vez que isso gera maior suavização nos coeficientes de detalhes, implicando em maior parcimônia do modelo.

As ondaletas *daublets* não apresentaram bons resultados, nem sequer na previsão de curto prazo. Isto pode ser explicado porque este tipo de ondaleta captura variações de alta frequência, limitando a extensão de seus padrões aos horizontes temporais subsequentes. Nota-se que o MSE reduz à medida que o número de momentos de nulidade destas ondaletas diminui, pois os seus filtros começam a se aproximar dos coeficientes das *symmlets*.

Por fim, a modelagem usando ARIMA por nível de ondaleta (modelo 2) mostrou-se mais eficaz na obtenção das previsões em relação ao modelo 3 (GARCH por nível de detalhe de ondaleta) em praticamente todos os horizontes. Isto pode estar ligado à baixa volatilidade da série  $x_t$ , fazendo com que este modelo tivesse maiores MSE do que o modelo 2.

A Figura B3.1 mostra a série  $x_t$  e as previsões com os respectivos desvios-padrão do erro de previsão para  $h = 2, \dots, 10$ , considerando o cenário e o modelo com menor MSE.

Figura B3.1. Previsões para  $x_t$  com diferentes horizontes

Fonte: elaboração própria.

### Apêndice C3 – Resultados sobre o MSE usando diferentes ondaletas

A Tabela C3.1 a seguir mostra o MSE para cada um dos horizontes temporais, com destaque para a ondaleta que produziu o menor MSE.

**Tabela C3.1.** Comparação de MSE entre cenários

Horizonte	Modelo	Ondaleta					
		db1	db9	la4	la10	c2	c6
h = 1	1				4,283		
	2	448,065	5,824	24,291	3,146	24,712	3,205
	3	486,559	18,474	46,058	3,421	49,259	3,482
h = 2	1				7,338		
	2	429,598	2,481	15,726	1,153	16,666	1,229
	3	475,723	13,677	36,409	1,409	39,764	1,494
h = 3	1				8,538		
	2	434,857	2,303	14,348	1,364	14,547	1,483
	3	478,553	13,987	33,244	1,740	36,916	1,874
h = 4	1				9,172		
	2	428,072	1,727	11,914	1,092	11,152	1,212
	3	472,633	13,279	27,853	1,522	31,599	1,664
h = 5	1				9,564		
	2	420,338	1,136	9,781	0,682	8,071	0,778
	3	468,614	13,557	23,761	1,108	27,522	1,230
h = 6	1				9,829		
	2	410,690	0,478	7,082	0,228	5,114	0,285
	3	465,714	14,065	20,267	0,550	23,963	0,638
h = 7	1				10,021		
	2	401,191	0,065	4,719	0,011	2,809	0,027
	3	463,112	14,466	17,238	0,166	20,806	0,219
h = 8	1				10,166		
	2	394,299	0,033	3,086	0,045	1,359	0,021
	3	462,887	14,866	14,900	0,016	18,333	0,037
h = 9	1				10,280		
	2	387,567	0,478	1,782	0,299	0,425	0,226
	3	462,791	14,855	12,772	0,028	16,045	0,009
h = 10	1				10,371		
	2	381,440	1,504	0,845	0,751	0,115	0,026
	3	464,133	14,742	11,000	0,202	14,134	0,140

Fonte: elaboração própria.