

# Decomposição da estrutura a termo da curva de juros brasileira

Decomposition of the term structure of the Brazilian yield curve

João Frois Caldeira<sup>†</sup>  
Milene Maiser Moraes<sup>‡</sup>

**Resumo** Este artigo analisa a modelagem da estrutura a termo da curva de juros brasileira através de um modelo dinâmico afim livre de arbitragem e a decompõe em componentes de expectativas sobre as taxas de juros futuras de curto prazo e prêmio a termo. É aplicado o modelo proposto por Adrian, Crump e Moench (2013), que utiliza variáveis de estado para capturar a dinâmica da estrutura a termo, sendo estimado para três e cinco fatores, com resultados similares para ambos. Os modelos estimados ajustam-se bem aos dados, entretanto, apresentam melhor aderência aos dados de taxas de juros com menor maturidade. Adicionalmente, o prêmio a termo, calculado como a diferença da curva de juros estimada e na medida neutra ao risco, cresce com as maturidades, conforme esperado, porém informa valores de média e mediana negativos e decrescentes em relação à maturidade, possivelmente refletindo a ocorrência de inflação acima do esperado no período.

**Palavras-chave:** Curva de juros; Modelo afim para a estrutura a termo; Prêmio a termo.  
**Código JEL:** C53, E43, G17.

**Abstract** This article examines the modeling of the term structure of the Brazilian yield curve through an arbitrage-free dynamic affine model, decomposing it into components of expectations regarding short-term future interest rates and term premiums. The model proposed by Adrian, Crump, and Moench (2013) is applied, utilizing state variables to capture the dynamics of the term structure and estimated for three and five factors, yielding similar results for both. While the estimated models fit the data well, they demonstrate better adherence to data on lower maturity interest rates. Additionally, the term premium, calculated as the difference between the estimated yield curve and the risk-neutral measure, increases with maturities as expected. However, it reports negative and decreasing mean and median values concerning maturity, possibly reflecting higher-than-expected inflation during the period.

**Keywords:** Yield curve; Affine model for the term structure; Term premium.  
**JEL Code:** C53, E43, G17.

## 1. Introdução

A estrutura a termo da taxa de juros é um tópico relevante em macrofinanças, pois reflete as expectativas dos participantes do mercado sobre o caminho futuro da política monetária, bem como sua avaliação das condições

---

Submitted on April 5, 2024.

<sup>†</sup>Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil: [emaildocaldeira@gmail.com](mailto:emaildocaldeira@gmail.com)

<sup>‡</sup>Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Economia na Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil: [milenemoraes2000@hotmail.com](mailto:milenemoraes2000@hotmail.com)

do mercado financeiro (CAO, 2016). Neste mesmo sentido, Gamage (2021) afirma que a modelagem das taxas de juros é muito importante para macroeconomistas, economistas financeiros e gestores de renda fixa, visto que a mesma é útil em aplicações financeiras, em previsões para estrutura a termo das taxas de juros, em previsões de recessões econômicas, com impacto na política monetária (para economistas), entre outras aplicações; o autor defende que por esse motivo o tema tem sido amplamente estudado nas últimas décadas, o que permitiu um progresso notável na modelagem e estimativa para este tipo de estudo.

Deste modo, estimar um modelo que prediz a estrutura a termo da curva de juros é o assunto de vários trabalhos científicos ao redor do mundo. Alguns exemplos destes são, para os dados dos Estados Unidos, Christensen, Lopez e Rudebusch (2010), Abrahams et al. (2016) e Adrian, Crump e Moench (2013), para dados da União Europeia, Joyce, Lildholdt e Sorensen (2010) e para os dados do Brasil, Vicente e Kubudi (2018). Neste último os autores destacam que é interessante analisar os dados de economias em desenvolvimento, com destaque para a possibilidade de utilizar os dados dos títulos indexados à inflação para estimar as curvas de juros e inflação implícita destas para o caso brasileiro, que não é o enfoque deste trabalho, mas é também uma possibilidade de aplicação da curva de juros. Trabalhos envolvendo aplicações para dados de países em desenvolvimento ou, mais especificamente, do Brasil, tratando da decomposição da curva de juros em expectativa e prêmio a termo são mais raros.

De acordo com Cao (2016), a estrutura a termo da taxa de juros, ou a curva de juros, mostra as taxas de juros ou os yields em relação a diferentes maturidades para cada ponto no tempo e, para modelar a mesma, modelos afins da estrutura a termo ganharam popularidade, estes são, de modo geral, modelos em que os yields dos títulos são afins (ou seja, lineares mais constante) no vetor de estados. Este trabalho tratará da decomposição da estrutura a termo da curva de juros brasileira através de um modelo dinâmico afim livre de arbitragem, bem como da obtenção da estimativa do prêmio a termo para os dados do país através desta. Para atingir esse propósito será utilizado a abordagem proposta por Adrian, Crump e Moench (2013) (abreviada por ACM).

Portanto, este pretende modelar a estrutura a termo da curva de juros brasileira através de modelo dinâmico afim livre de arbitragem e decompor a mesma em componentes de expectativas e de prêmio a termo. Pretende-se modelar a estrutura a termo da curva de juros, bem como discutir, com o auxílio deste modelo, o prêmio a termo. Busca-se responder se é possível utilizar a abordagem proposta por ACM para estimar um modelo afim livre de arbitra-

gem e decompor a curva de juros brasileira em expectativas de juros e prêmio a termo. Além desta introdução, o trabalho está organizado nas seguintes seções: A Seção 2 apresenta uma breve revisão da literatura, visando expor os conceitos de curva de juros e os métodos mais utilizados para construção das mesmas, bem como os modelos afins, incluindo uma breve observação de modelos afins estimados na literatura; as Seções 3 e 4 contém, respectivamente, a apresentação do modelo utilizado neste estudo e informações sobre o mercado de títulos públicos e o mercado de Contratos de DI Futuro do Brasil, bem como a apresentação da base de dados utilizada; na Seção 5 são apontados os resultados empíricos da decomposição da estrutura a termo da curva de juros brasileira e, por fim, a Seção 6 expõe as considerações finais deste.

## 2. Revisão de Literatura

Segundo Caldeira (2011, p. 96) “Estrutura a termo é uma função que relaciona determinada variável financeira ou parâmetros, a suas maturidades.”. A Curva de juros, também conhecida como yield curve, no inglês, é uma estrutura a termo, mais precisamente a estrutura a termo da taxa de juros à vista, que relaciona essas taxas com diferentes maturidades para cada ponto no tempo. Entretanto, quando analisados os dados do mercado, observa-se um conjunto discreto de pontos com taxas de juros e maturidades diferentes, que não fornecem uma curva completa, já que nem todas as maturidades distintas são observadas nos títulos disponíveis no tempo  $t$  em análise. Para solucionar esta questão diversos modelos e técnicas foram desenvolvidos, estes modelos podem ser divididos em paramétricos, que possibilitam a interpretação econômica dos fatores que o compõem e usualmente apresentam um bom desempenho em previsões da curva de juros, e não paramétricos, que não permitem a interpretação econômica, mas tendem a apresentar um melhor ajuste da curva de juros (CALDEIRA, 2011).

A interpolação é a forma mais utilizada para estimar as taxas de juros com maturidades não disponíveis no mercado, para isso são empregados, entre outras técnicas, polinômios com formas conhecidas para relacionar maturidade e taxas de juros, através dos dados dos títulos com maturidades negociadas. Existem diferentes métodos de interpolação, que permitem que seja possível estimar estes valores tanto em modelos paramétricos, usualmente utilizando polinômios, como em não paramétricos, onde existem diversas técnicas de estimação, como interpolação exponencial e métodos baseados em splines; cabe destacar que os resultados obtidos com interpolação de uma curva de juros admitem oportunidades de arbitragem (o que não é uma característica desejável para modelos) visto que essa técnica não está associada a condições de equilíbrio (CALDEIRA, 2011).

De acordo com relatório do Bank for International Settlements, ou Banco de Compensações Internacionais, BIS (2005), os bancos centrais (participantes do relatório) ao estimar a curva de juros zero-cupom adotam os modelos de Nelson e Siegel ou a extensão de Svensson. Segundo este relatório, os modelos paramétricos têm como princípio a definição de uma função única (que varia conforme a abordagem adotada) para todo o domínio de maturidade dos títulos, onde os parâmetros do modelo são determinados por meio da minimização dos desvios quadrados entre os preços teóricos e observados. Segundo Caldeira (2011) e BIS (2015), o modelo de Nelson e Siegel tenta realizar a estimativa ajustando uma função de desconto para os dados de preços de títulos para tempo  $t$ . Svensson estendeu o modelo de Nelson e Siegel adicionando mais dois parâmetros para melhorar a flexibilidade e o ajuste das curvas.

Já os modelos não paramétricos, ou modelos baseados em splines, são o tipo de modelo em que a técnica de interpolação utilizada se dá pela definição de uma função spline que não especifica uma única forma funcional para todo o conjunto de maturidades, mas ajusta a curva de juros com base em um polinômio por partes, já que conecta os segmentos individuais aos nós estabelecidos (knot points); de outro modo, com os splines desenha-se curvas suaves através de um conjunto de pontos. Uma determinada função contínua pode ser aproximada, em um intervalo fechado, selecionando um polinômio arbitrário, onde a qualidade do ajuste aumenta com a ordem do polinômio, porém polinômios com maior ordem frequentemente apresentam insuficientes propriedades de suavização, por isso funções splines são geralmente baseadas em polinômios de baixa ordem, como um spline cúbico, que é um polinômio cúbico por partes restrito nos knot points de modo que seu nível e duas primeiras derivadas são idênticos, onde cada parâmetro corresponde a um knot no spline. (CALDEIRA, 2011; BIS, 2005).

BIS (2005) destaca o método de splines de suavização, onde o número de parâmetros a serem estimados não é fixado antecipadamente. Em vez disso, parte-se de um modelo com um excesso de parâmetros, o que garante a flexibilidade da curvatura, e determina-se o número ideal de parâmetros por meio da minimização da razão de uma medida de qualidade de ajuste para o número de parâmetros, penalizando, assim, parâmetros que não contribuem significativamente para o ajuste do modelo. Outro método não paramétrico possível é a interpolação exponencial, que, segundo Caldeira (2011), é um método linear no logaritmo dos fatores de desconto. Este é geralmente o método básico aplicado antes de qualquer outro, pois é muito estável e simples para implementar.

Modelos afins, de acordo com Cao (2016), ganharam grande popularidade na modelagem de estruturas a termo. De modo geral, modelos afins incluem

modelos em que os yields dos títulos são afins, ou seja, lineares, no vetor de variáveis de estados (variável de estado, ou state variable, é uma variável utilizada para descrever o "estado" matemático de um sistema dinâmico, esta descreve o suficiente sobre o sistema para estimar o seu comportamento futuro na ausência de externalidades). A seção transversal de um modelo afim pode ser escrita formalmente como:

$$y(n) = A(n) + B(n)x, \quad (1)$$

onde,  $y(n)$  é o yield para maturidade  $n$ ,  $A(n)$  e  $B(n)$  são parâmetros do modelo e  $x$  é o vetor de variáveis de estado. Ainda de acordo com o mesmo autor, as restrições impostas ao modelo controlam como os preços dos títulos são determinados pelas variáveis de estado.

“Desde a década de 70, a literatura passou a construir modelos de fatores não observáveis (modelos afins) para representar e prever a curva de juros [...]” (CALDEIRA, 2011, p. 97), assim, diversos trabalhos foram sendo elaborados, ao decorrer do tempo, para desenvolver, aprimorar ou aplicar modelos afins na estimação da curva de juros. Um destes foi o estudo em que Litterman e Scheinkman (1991) concluíram que três fatores são suficientes para modelar a curva de juros, sendo estes chamados de nível, inclinação e curvatura, nomeados de acordo com como choques nesses fatores afetam a curva de juros.

Entre as curvas de juros estimadas na literatura recente estão os trabalhos de Christensen, Lopez e Rudebusch (2010), Abrahams et al. (2016), Adrian, Crump e Moench (2013), Joyce, Lildholdt e Sorensen (2010) e Vicente e Kubudi (2018), cabe realizar uma breve revisão destes, observando como os autores utilizam os modelos afins em seus estudos.

Christensen, Lopez e Rudebusch (2010) desenvolvem um modelo afim livre de arbitragem Nelson-Siegel, do inglês affine arbitrage-free Nelson-Siegel model, da estrutura a termo que captura o preço de ambos (nominais e reais) títulos do Tesouro dos Estados Unidos, modelo este que permite aos autores decompor as breakeven inflation rates de qualquer vencimento em expectativas de inflação e prêmios de risco de inflação. Para estimar este modelo os autores estimam primeiramente modelos separados, visando adquirir informações para a construção do modelo conjunto. Este modelo conjunto foi estimado com quatro fatores, sendo estes um fator de nível real (específico para rendimentos reais), um fator de nível nominal (para rendimentos nominais) e fatores comuns de inclinação e curvatura. As expectativas de inflação calculadas através do modelo dos autores ficaram com uma elevada correlação com as expectativas de inflação estimadas por pesquisa, enquanto os prêmios de risco estimados oscilaram em um intervalo próximo de zero. Estes autores

estruturaram o seu estudo, construindo o modelo e, na sequência, alisando as expectativas de inflação calculadas através deste.

Outro modelo que estima ambas as curvas de juros conjuntamente com os dados do Tesouro dos Estados Unidos é o de Abrahams et al. (2016). Os autores estimam um modelo afim de estrutura a termo, bem como utilizam este modelo para analisar o efeito e transmissão de políticas monetárias. O modelo é ajustado para a relativa iliquidez dos títulos indexados à inflação e gera estimativas do prêmio de risco de inflação, para isso foi construído com seis fatores de precificação, sendo estes três componentes principais do corte transversal dos rendimentos do Tesouro, dois componentes principais extraídos dos rendimentos indexados à inflação ortogonalizados e o fator de liquidez. Este modelo produz expectativas de inflação de longo prazo ajustadas ao risco, que se alinham muito perto com pesquisas de expectativas de inflação.

Assim como ambos os trabalhos supracitados, Adrian, Crump e Moench (2013) utilizam os dados do Tesouro dos Estados Unidos na construção de seu modelo. Os autores propõem uma abordagem de modelo afim com cinco fatores e mostram como o mesmo fornece uma melhor representação dos dados do que um modelo de quatro fatores, outra característica destacada do modelo idealizado é que o mesmo não exige a disponibilidade de dados de títulos sem cupom, consegue estimar a curva de juros com uma taxa de juros de curto prazo livre de risco e um conjunto de fatores de precificação que abrangem a seção transversal dos rendimentos dos títulos. O modelo utilizado neste estudo seguirá a o método de estimação proposto por estes autores.

Já Joyce, Lildholdt e Sorensen (2010) apresentam um modelo que utiliza dados do Reino Unido a partir do período em que o país adotou uma meta de inflação explícita. O estudo adota um modelo afim de estrutura a termo estimado utilizando não somente os dados dos títulos do governo como também os dados de pesquisas. Outro ponto a se destacar é que o modelo estimado não impõe restrições de arbitragem entre os rendimentos nominais e reais. Os autores consideraram que duas variáveis latentes (variáveis que não são diretamente observadas, mas sim inferidas) conduzem taxas reais esperadas de curto prazo e que esses dois fatores, acrescidos do Retail Price Index (medida de inflação antiga que ainda é publicada, mas não é considerada oficial pelo governo do Reino Unido) e mais uma variável não observada conduzem a curva nominal e os acréscimos nas taxas reais de acordo com os prazos mais longos; além disso, os autores acrescentaram como uma variável de informação adicional a inflação média esperada de cinco a 10 anos da pesquisa Consensus survey (a ideia é que, na média, as expectativas do modelo e da pesquisa sejam iguais). De modo geral, com alguns períodos de exceções,

esse modelo se adequou bem aos dados.

Estudos de curvas de juros com dados brasileiros são mais raros, um exemplo desse tipo de estudo já realizado é o trabalho de Vicente e Kubudi (2018), estes autores adotaram o modelo afim (versão Gaussiana dos modelos afins) como a estrutura paramétrica para capturar a articulação dinâmica dos rendimentos nominais e reais, modelo este estimado com o uso da técnica de filtro de Kalman. Assim como em Joyce, Lildholdt e Sorensen, houve a união de fatores latentes e variáveis macroeconômica, visando melhorar o desempenho de previsão do modelo, para isso foram inclusos dados de pesquisa no procedimento de estimativa. O modelo adotado possui quatro fatores, sendo que dois afetam conjuntamente as curvas de juros nominal e real e os outros dois são específicos de uma das curvas. Os dados utilizados pelos autores foram referentes ao mercado brasileiro de renda fixa no período entre abril de 2005 e fevereiro 2016 e os resultados desse modelo foram utilizados pelos autores para compreender, principalmente, as variações do prêmio de risco de inflação e a política monetária (é constado que a política monetária tem efeitos sobre a expectativa de inflação e o prêmio de risco). Assim como estes autores, a proposta deste é construir um modelo com os dados do mercado brasileiro.

Desta maneira, modelos afins são frequentemente utilizados na literatura, com objetivos de estudo, análises, métodos e resultados variados. Estes permitem estimar a curva de juros através de modelos onde os yields apresentam uma relação linear (com uma constante mais um parâmetro relacionado à variável explicativa) com o vetor de variáveis de estados/os parâmetros utilizados para estimar este. O método de estimação utilizado para este estudo é o proposto por Adrian, Crump e Moench (2013), visando modelar a estrutura a termo de juros brasileira e decompor a mesma em componentes de expectativas sobre as taxas de juros de curto prazo e prêmio a termo.

### 3. O Modelo

O modelo utilizado neste estudo é o estruturado por Adrian, Crump e Moench (2013), com o uso do artigo de Abrahams et al. (2016) como uma referência adicional/material de apoio para este. A abordagem de ACM captura a dinâmica da estrutura a termo através de variáveis de estado relacionadas por um vetor autorregressivo (VAR), modelado linearmente, propondo o uso dos componentes principais deste para capturar as diversas dimensões da curva de juros, defendendo especialmente o modelo que utiliza cinco fatores.

Adrian, Crump e Moench (2013) propuseram uma abordagem baseada em regressão para a precificação da taxa de juros, para isso desenvolveram um estudo com fatores observáveis e três etapas de estimação de parâmetros.

Outra característica destacada desta abordagem é que a mesma não exige a disponibilidade de dados de títulos sem cupom, pois consegue estimar a curva de juros com uma taxa de juros de curto prazo livre de risco e um conjunto de fatores de precificação que abrangem a seção transversal dos rendimentos dos títulos.

Para regredir este modelo assume-se que a dinâmica de um vetor  $K \times 1$ , sendo  $K$  o número de fatores do modelo, de variáveis de estado  $X_{t+1}$  evolui de acordo com vetor autorregressivo (VAR):

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + v_{t+1}, \quad (2)$$

onde assume-se que os choques (ou inovações, ou erros)  $v_{t+1}$  seguem condicionalmente uma distribuição Gaussiana (ou normal) com uma matriz de variância-covariância  $\Sigma$ :

$$v_t | \{X_s\}_{s=0}^t \sim N(0, \Sigma), \quad (3)$$

sendo que  $\{X_s\}_{s=0}^t$  denota todo o histórico de  $X_t$ .

A suposição do modelo ser livre de arbitragem implica que existe um Kernel de preços  $M_t$  tal que permite denotar o preço do título zero-cupom como:

$$P_t^n = E_t[M_{t+1}P_{t+1}^{(n-1)}]. \quad (4)$$

De outro modo, essa taxa estocástica de desconto (Kernel de preços) funciona como uma das restrições que garantem que a estrutura a termo seja livre de arbitragem. Assumindo que  $M_{t+1}$  é exponencialmente afim:

$$M_{t+1} = \exp\left(-r_{f,t} - \frac{1}{2}\lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \Sigma^{-1/2} v_{t+1}\right). \quad (5)$$

Os autores ainda assumem que os preços de mercado do risco,  $\lambda_t$ , são essencialmente afins, sendo que  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  são os parâmetros de risco:

$$\lambda_t = \Sigma^{-1/2}(\lambda_0 + \lambda_1 X_t). \quad (6)$$

Sendo  $r_x$  o excesso de retorno e  $r_f$  a taxa livre de risco, é possível escrever o excesso de retorno para o tempo  $t + 1$ :

$$r_{x_{t+1}}^{(n-1)} = \log P_{t+1}^{(n-1)} - \log P_t^n - r_{f,t}. \quad (7)$$

Aplicando as equações (5) e (7) em (4):

$$1 = E_t \left[ \exp\left(r_{x_{t+1}}^{(n-1)} - \frac{1}{2}\lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \Sigma^{-1/2} v_{t+1}\right) \right]. \quad (8)$$



Assumindo que  $\{r_{x_{t+1}}^{(n-1)}, v_{t+1}\}$  seguem conjuntamente uma distribuição normal, de modo que:

$$E_t \left[ r_{x_{t+1}}^{(n-1)} \right] = \text{Cov}_t \left[ r_{x_{t+1}}^{(n-1)}, v_{t+1}' \Sigma^{-1/2} \lambda_t \right] - \frac{1}{2} \text{Var}_t \left[ r_{x_{t+1}}^{(n-1)} \right]. \quad (9)$$

Definindo  $\beta_t^{(n-1)'}$  como:

$$\beta_t^{(n-1)'} = \text{Cov}_t \left[ r_{x_{t+1}}^{(n-1)}, v_{t+1}' \right] \Sigma^{-1}. \quad (10)$$

Utilizando a Equação (6):

$$E_t \left[ r_{x_{t+1}}^{(n-1)} \right] = \beta_t^{(n-1)'} [\lambda_0 + \lambda_1 X_t] - \frac{1}{2} \text{Var}_t \left[ r_{x_{t+1}}^{(n-1)} \right]. \quad (11)$$

É possível decompor o excesso de retorno não esperado pelo modelo em um componente relacionado ao  $v_{t+1}$  e outro condicionalmente ortogonal:

$$r_{x_{t+1}}^{(n-1)} - E_t[r_{x_{t+1}}^{(n-1)}] = \gamma_t^{(n-1)'} v_{t+1} + e_{t+1}^{(n-1)}, \quad (12)$$

sendo assumido que  $e_{t+1}^{(n-1)}$  é condicionalmente independente e identicamente distribuída (i.i.d.), com variância  $\sigma^2$ . Dada a Equação (10), é possível perceber que  $\gamma_t^{(n-1)} = \beta_t^{(n-1)'}$ , mas cabe destacar que por construção  $\beta$  é constante, devido ao fato de ser utilizado, para estimar os fatores do modelo, o mesmo conjunto de yields. Assim, o processo gerador de logaritmos de excesso de retorno é:

$$r_{x_{t+1}}^{(n-1)} = \underbrace{\beta_t^{(n-1)'(\lambda_0 + \lambda_1 X_t)}}_{\text{Retorno esperado}} - \underbrace{\frac{1}{2}(\beta_t^{(n-1)'} \Sigma \beta_t^{(n-1)} + \sigma^2)}_{\text{Ajuste de convexidade}} + \underbrace{\beta_t^{(n-1)'} v_{t+1}}_{\text{Inovações no retorno}} + \underbrace{e_{t+1}^{(n-1)}}_{\text{Termo de erro}}. \quad (13)$$

É possível reescrever a Equação (13) empilhando a mesma em maturidades e tempos (períodos) como:

$$rx = \beta'(\lambda_0 \mathbf{1}'_{(T-1)} + \lambda_1 X_-) - \frac{1}{2}(B^* \text{vec}(\Sigma) + \sigma^2 \mathbf{1}'_N) \mathbf{1}'_{(T-1)} + \beta' V + E, \quad (14)$$

onde  $rx$  é uma matriz  $N \times (T - 1)$  dos excessos de retorno, sendo  $N$  o número total de maturidades selecionadas para a análise e  $T - 1$  o número total de períodos de tempo contidos nos dados de  $rx$  ( $T$  é o número total de períodos nos yields, considera-se a redução de 1 do período total da base);  $\beta$  é uma matriz dos pesos dos fatores de dimensões  $K \times N$ ;  $\mathbf{1}_{(T-1)}$  e  $\mathbf{1}_N$  são vetores de 1 de dimensões  $(T - 1) \times 1$  e  $N \times 1$ , respectivamente;

$X_-$  é uma matriz  $K \times (T - 1)$  dos fatores defasados em um período;  $B^* = [\text{vec}(\beta^{(1)}\beta^{(1)'}) \dots \text{vec}(\beta^{(N)}\beta^{(N)'})]'$  é uma matriz  $N \times K^2$ ;  $V$  é uma matriz  $K \times (T - 1)$ ; e  $E$  é uma matriz  $N \times (T - 1)$ .

Deste modo, os parâmetros do modelo proposto por Adrian, Crump e Moench (2013), apresentado acima, são estimados a partir de um processo de três etapas, sendo as mesmas:

1. Estimar por Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) a Equação (2);
2. Regredir o excesso de retorno em função de uma constante, da variável de estado defasada e da inovação estimada na etapa 1, conforme a seguinte equação:

$$rx = a'_{(T-1)} + \beta' \hat{V} + cX_- + E; \quad (15)$$

3. Estimar o preço dos parâmetros de risco  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  através de regressão transversal.

Concluídas as três etapas resta estimar a curva de juros; as próximas subseções tratam de cada uma destas etapas, visando melhor explicar o processo de decomposição da estrutura a termo da curva de juros.

### 3.1 Etapa 1 - Variáveis de Estado e Fatores do Modelo

Para realizar a primeira etapa do modelo, é necessário obter dos dados as variáveis de estado, estas são compostas pela decomposição de  $K$  componentes principais dos yields padronizados. Com os componentes principais prontos, pode-se utilizar os mesmos para estimar a Equação 2 por meio de uma regressão de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO); os componentes principais são incluídos em  $X_{t+1}$  e em  $X_t$  ou, de forma similar,  $X_t$  e  $X_{t-1}$ , considerando a possibilidade de utilizar uma adaptação da Equação 2 com defasagem do tempo, como  $X_t = \mu + \Phi X_{t-1} + v_t$ , cabendo chamar a atenção que caso seja optado por realizar essa alteração é necessário realiza-la para todas as equações do modelo.

Com isso, decompõem-se  $X_{t+1}$  em uma componente previsível dependente de seu passado e uma componente de choque  $v_{t+1}$ . Os  $v_{t+1}$  são empilhados em uma matriz  $\hat{V}$  de dimensões  $K \times (T - 1)$ , considerando que ao incluir os componentes principais em  $X_{t+1}$  e  $X_t$  “perde-se” uma referência de tempo de  $T$ , dado que é necessário comparar cada dado de tempo  $t$  com um dado de tempo  $t + 1$ . Com a matriz  $\hat{V}$  calcula-se a matriz de variância-covariância  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \frac{1}{(T - 1)} \hat{V}' \hat{V}. \quad (16)$$

### 3.2 Etapa 2 - Regredir o Excesso de Retorno

Nesta etapa, deve-se regredir o excesso de retorno em função de uma constante, da variável de estado defasada ( $X_{-}$ ) e da matriz  $\hat{V}$  estimada na etapa 1, conforme a Equação 15. A estimação desta por MQO é feita coletando os regressores na matriz  $\tilde{Z} = [1_T \hat{V}' X_{-}']'$ , de modo que os estimadores se tornam:

$$[\hat{a} \hat{\beta}' \hat{c}] = r_x Z' (\tilde{Z} \tilde{Z}')^{-1}. \quad (17)$$

Coleta-se os resíduos da regressão em uma matriz  $\hat{E}$ , com dimensões  $N \times (T - 1)$ . Com isso, estima-se  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{tr}(\hat{E} \hat{E}')}{N(T-1)}$ , lembrando que o traço de uma matriz quadrada é a soma de sua diagonal principal. Aqui também se deve construir o  $B^*$ , que é uma matriz  $N \times K^2$ , com base no  $\hat{\beta}$ :

$$B^* = [\text{vec}(\hat{\beta}^{(1)} \hat{\beta}^{(1)'}) \dots \text{vec}(\hat{\beta}^{(N)} \hat{\beta}^{(N)'})]'. \quad (18)$$

Convém ainda nessa etapa relacionar a Equação (15) com a Equação (14), visto que os estimadores  $\hat{a}$  e  $\hat{c}$  da primeira correspondem a:

$$a = \hat{\beta}' \lambda_0 - \frac{1}{2} (B^* \text{vec}(\hat{\Sigma}) + \hat{\sigma}^2 \iota_N) \quad (19)$$

e

$$c = \hat{\beta}' \lambda_1. \quad (20)$$

### 3.3 Etapa 3 - Parâmetros de Risco e Estrutura a Termo

Com base nas Equações (19) e (20) é possível obter os seguintes estimadores para os parâmetros de risco:

$$\hat{\lambda}_0 = (\hat{\beta} \hat{\beta}')^{-1} \hat{\beta} (\hat{a} + \frac{1}{2} (B^* \text{vec}(\hat{\Sigma}) + \sigma^2 \iota_N)) \quad (21)$$

e

$$\hat{\lambda}_1 = (\hat{\beta} \hat{\beta}')^{-1} \hat{\beta} \hat{c}. \quad (22)$$

Com todos os parâmetros descritos nas três etapas estimados é possível construir a curva de juros em função dos parâmetros de risco  $\hat{\lambda}_0$  e  $\hat{\lambda}_1$ , bem como construir a curva de juros na medida neutra ao risco assumindo esses dois parâmetros como zero. Sob as hipóteses assumidas na construção deste, pode-se afirmar que os preços dos títulos são exponencialmente afins no vetor de variáveis de estado:

$$\ln P_t^n = A_n + B_n' X_t + u_t^n. \quad (23)$$

Substituindo a Equação (23) na Equação (7):

$$r_{t+1}^{n-1} = A_{n-1} + B'_{n-1}X_{t+1} + u_{t+1}^{n-1} - A_n - B'_n X_t - u_t^n + A_1 + B_1' X_t + u_t^1. \quad (24)$$

Igualando o excesso de retorno da Equação (24) com a da Equação (13):

$$A_{n-1} + B'_{n-1}X_{t+1} + u_{t+1}^{n-1} - A_n - B'_n X_t - u_t^n + A_1 + B_1' X_t + u_t^1 = \hat{\beta}_t^{(n-1)'} (\lambda_0 + \lambda_1 X_t) - \frac{1}{2} (\beta_t^{(n-1)'} \Sigma \beta_t^{(n-1)} + \sigma^2) + \beta_t^{(n-1)'} v_{t+1} + e_{t+1}^{(n-1)} \quad (25)$$

sendo  $A_0 = 0$ ,  $A_1 = -\delta_0$ ,  $B_0 = 0$  e  $B_1 = -\delta_1$ , combinando os termos, obtém-se o seguinte sistema de restrições lineares recursivas para os parâmetros de precificação de títulos:

$$A_n = A_{n-1} + B'_{n-1}(\mu - \lambda_0) + \frac{1}{2}(B'_{n-1}\Sigma B_{n-1} + \sigma^2) - \delta_0, \quad (26)$$

$$B'_n = B'_{n-1}(\Phi - \lambda_1) - \delta_1', \quad (27)$$

$$u_{t+1}^{n-1} - u_t^n + u_t^1 = e_{t+1}^{(n-1)}, \quad (28)$$

onde  $\delta_0$  e  $\delta_1$  são obtidos pela regressão por MQO de:

$$rf_t = \delta_0 + \delta_1' X_t. \quad (29)$$

Aqui  $A_n$  e  $B_n$  devem ser estimados para todas as maturidades possíveis, e não somente para as maturidades selecionadas utilizadas na etapa 2.

#### 4. Títulos Públicos Brasileiros e Base de Dados

Os títulos da dívida pública brasileira são emitidos pelo Tesouro Nacional no mercado primário e, de acordo com Brasil (2020), “Uma vez emitidos, os títulos podem ser livremente negociados entre as partes, formando assim o mercado secundário de títulos públicos.”; a existência desse mercado secundário e a circulação de títulos públicos no mesmo é importante, entre várias outras razões, para garantir e elevar a liquidez desses títulos. Os principais títulos emitidos pelo tesouro nacional, segundo Brasil (2020), são as Letras do Tesouro Nacional (LTN), as Notas do Tesouro Nacional F (NTN-F), as Notas do Tesouro Nacional B (NTN-B) e as Letras Financeiras do Tesouro (LFT). Cabe observar os três primeiros títulos citados. Os títulos prefixados são as LTN e NTN-F. As Letras do Tesouro Nacional são títulos sem cupom (não possuem uma remuneração periódica do título) enquanto as Notas do Tesouro Nacional F pagam cupons semestrais. Já as Notas do Tesouro Nacional

B são títulos indexados ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA).

Entretanto, o Contrato de DI Futuro da Bolsa de Mercadorias e Futuros é um dos principais instrumentos para construir a curva de juros brasileira, pois é um dos maiores mercados de renda fixa entre as economias emergentes. O mesmo tem por característica negociar a taxa efetiva do Certificado de Depósito Interbancário (CDI) diário, de hoje até a data de vencimento do contrato futuro, o CDI representa a taxa média pela qual os bancos trocaram depósitos com vencimento no dia útil seguinte, essa taxa tem grande correlação com a taxa SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia), que é a taxa básica de juros da economia brasileira (CALDEIRA; MOURA; PORTUGAL, 2010; CALDEIRA; MOURA; SANTOS, 2016; FRANÇA, 2010).

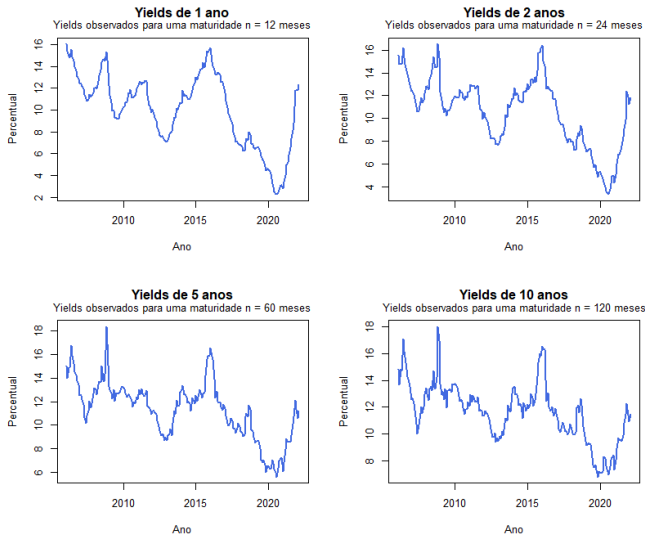
Para a construção do modelo proposto são utilizados os dados do Contrato Futuro de Depósitos Interfinanceiros (DI Futuro) como referência de títulos nominais. Estes podem ser obtidos através das informações fornecidos pela B3 (Brasil, Bolsa, Balcão - sigla da Bolsa de Valores oficial do Brasil). Os dados consistem nos valores de taxas de juros, nos yields, dos contratos de DI Futuro da Bolsa de Mercadorias e Futuros e, para o estudo, foram utilizados os valores de fim de mês de janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidades de um mês até 10 anos (120 meses).

**Tabela 1**  
**Estatísticas descritivas dos yields dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 com maturidades selecionadas**

<b>Maturidade (anos)</b>	<b>Mín.</b>	<b>Med.</b>	<b>Média</b>	<b>Máx.</b>	<b>Desv. Padrão</b>	<b>Ass</b>	<b>Curt</b>
0,5	1,96	10,72	9,80	16,39	3,47	-0,44	-0,60
1	2,32	10,76	10,06	16,01	3,35	-0,44	-0,59
1,5	2,84	11,16	10,34	16,24	3,18	-0,43	-0,53
2	3,38	11,30	10,59	16,63	3,02	-0,41	-0,45
3	4,34	11,56	10,94	17,53	2,76	-0,34	-0,31
4	5,07	11,72	11,16	18,10	2,59	-0,26	-0,19
5	5,62	11,76	11,31	18,42	2,48	-0,19	-0,09
6	6,03	11,81	11,42	18,53	2,39	-0,13	-0,01
7	6,35	11,78	11,49	18,51	2,33	-0,08	0,05
8	6,55	11,85	11,55	18,40	2,28	-0,04	0,07
9	6,67	11,85	11,60	18,23	2,24	-0,02	0,08
10	6,76	11,85	11,64	18,03	2,20	0,00	0,08

Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 1**  
**Yields dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidades de 1, 2, 5 e 10 anos**



Fonte: Elaborado pelos autores.

A Tabela 1 apresenta um compilado de estatísticas descritivas para os dados dos yields dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual para as maturidades de 6, 12, 18, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses. Nesta se observa nos valores de mínimo, mediana, média e máximo que para maturidades maiores os títulos tendem a ter maiores taxas de juros. Verifica-se que há uma assimetria negativa, assimetria à esquerda, para as menores maturidades e que essa assimetria vai reduzindo, gradativamente, para maiores maturidades (em relação às diferentes maturidades analisadas na Tabela 1) tornando-se simétrica (o coeficiente de assimetria da maturidade de 10 anos é igual a zero), isso indica que os yields de maturidades menores tendem a ter um deslocamento da distribuição à esquerda, tendem a se repetir mais em valores menores (mais do que a distribuição normal). Os dados apresentam valores de curtose negativos para títulos com menor maturidade, isso indica que a distribuição tem caudas mais leves do que a distribuição normal, com as maiores maturidades apresentadas na tabela 1, a curtose vai se aproximando de zero (distribuição normal) e até tornando-se levemente positiva com maiores maturidades (um valor de curtose positiva indica que a distribuição tem caudas mais pesadas do que a distribuição normal).

A Figura 1 apresenta gráficos das informações dos valores em percentual dos yields dos contratos de DI Futuro brasileiros para as maturidades de 12, 24, 60 e 120 meses em relação ao tempo, observando o movimento das taxas de juros no tempo para a mesma maturidade. A Tabela 1, em conjunto com a Figura 1, contribuem para observação das características das taxas de juros dos contratos de DI Futuro, com os mesmos observa-se que, assim como o indicado pela literatura, maturidades maiores tendem a apresentar maiores taxas de juros (inclusive devido ao prêmio a termo). Através da Figura 1 também é observado que parece haver uma relação entre as diferentes maturidades de um mesmo período, visto que as quatro maturidades apresentam um comportamento relativamente similar em períodos próximos (mas, em “níveis” diferentes, visto que maturidades maiores tendem a ter maiores yields), sendo que isto é mais aparente em maturidades mais próximas entre si (como de 1 e 2 anos).

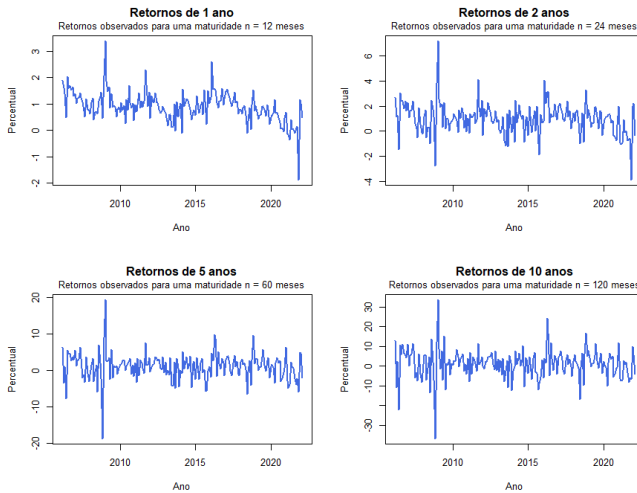
**Tabela 2**  
Estatísticas descritivas do retorno dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 com maturidades selecionadas

Maturidade (anos)	Mín.	Med.	Média	Máx.	Desv. Padrão	Ass	Curt
0,5	-0,23	0,88	0,84	1,79	0,34	-0,25	0,09
1	-1,87	0,91	0,90	3,38	0,56	-0,07	4,21
1,5	-3,11	0,98	0,95	5,28	0,88	0,13	4,37
2	-3,89	1,12	0,99	7,19	1,24	0,19	3,75
3	-7,71	1,27	1,04	11,06	2,01	0,06	4,12
4	-13,25	1,45	1,07	15,15	2,83	-0,12	5,41
5	-18,67	1,49	1,09	19,34	3,65	-0,25	6,45
6	-23,60	1,64	1,11	23,33	4,45	-0,33	6,89
7	-27,88	1,65	1,13	26,87	5,23	-0,36	6,79
8	-31,47	1,79	1,14	29,79	5,98	-0,38	6,28
9	-34,43	1,98	1,16	32,00	6,71	-0,39	5,54
10	-36,83	2,03	1,18	33,49	7,43	-0,38	4,73

Fonte: Elaborado pelos autores.

A Tabela 2 apresenta o compilado de estatísticas descritivas para os dados dos retornos dos contratos de DI Futuro brasileiros para as maturidades de 6, 12, 18, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses. Os dados de 0,5 e 1 ano de maturidade, bem como os com maturidades maiores ou iguais a 4 anos, apresentados na Tabela 2, exibem valores de assimetria negativos, em diferentes graus, enquanto maturidades de 1,5, 2 e 3 anos exibem assimetrias

**Figura 2**  
**Retorno dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidades de 1, 2, 5 e 10 anos**



Fonte: Elaborado pelos autores.

positivas. Já em todas as maturidades apresentadas na tabela observa-se um valor positivo de curtose (a curtose que mais se aproxima de uma normal é a de 0,5 ano, com um valor de 0,09), isso indica que a distribuição de dados para cada uma dessas maturidades tem caudas mais pesadas do que a distribuição normal.

Já a Figura 2 apresenta a informação dos valores em percentual dos retornos dos contratos de DI Futuro brasileiros para as maturidades de 12, 24, 60 e 120 meses em relação ao tempo, observando o movimento das taxas de retorno no tempo para a mesma maturidade. Observando-se a Tabela 2 em conjunto com a Figura 2, é possível constatar algumas características dos retornos calculados: como o fato de que, maturidades maiores tendem a apresentar maiores taxas de retorno na média (e mediana), entretanto a amostra tem maior desvio padrão conforme maior a maturidade, de modo que maiores maturidades são “mais arriscadas”, ou seja, apresentam a possibilidade de maior variação no retorno (lembrando que o retorno é a diferença entre o logaritmo do preço de um mês com o do mês anterior – este último com a maturidade maior em um mês).

A Tabela 3 apresenta o compilado de estatísticas descritivas para os dados dos excessos de retornos dos contratos de DI Futuro brasileiros para as



**Tabela 3**  
**Estatísticas descritivas dos excessos de retorno contratos de DI Futuro**  
**brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 com**  
**maturidades selecionadas**

<b>Maturidade (anos)</b>	<b>Mín.</b>	<b>Med.</b>	<b>Média</b>	<b>Máx.</b>	<b>Desv. Padrão</b>	<b>Ass</b>	<b>Curt</b>
0,5	-0,78	0,02	0,02	0,64	0,14	-0,26	6,85
1	-2,42	0,12	0,08	2,22	0,44	-0,31	7,19
1,5	-3,65	0,19	0,14	4,12	0,80	-0,08	5,08
2	-4,43	0,25	0,18	6,04	1,18	0,00	4,09
3	-8,86	0,40	0,22	9,90	1,97	-0,10	4,47
4	-14,39	0,56	0,25	14,00	2,80	-0,26	5,78
5	-19,81	0,66	0,28	18,19	3,62	-0,37	6,77
6	-24,74	0,93	0,29	22,18	4,43	-0,42	7,17
7	-29,02	0,99	0,31	25,71	5,20	-0,45	7,02
8	-32,61	1,02	0,33	28,63	5,96	-0,46	6,47
9	-35,57	1,21	0,34	30,84	6,69	-0,45	5,70
10	-37,97	1,24	0,36	32,33	7,41	-0,45	4,87

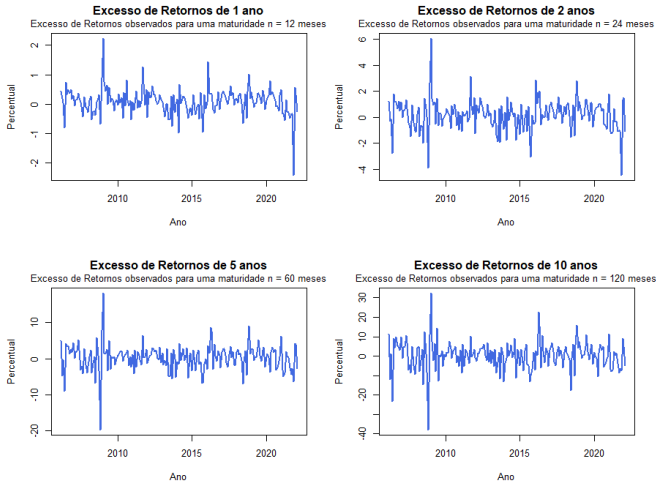
Fonte: Elaborado pelo autor.

maturidades de 6, 12, 18, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses. As diferentes maturidades apresentadas na Tabela 3 denotam valores de assimetria negativos, exceto a maturidade de 2 anos que é simétrica (as maturidades mais próximas a dois anos na tabela, que são 1,5 e 3 anos, também apresentam um menor grau de assimetria ao serem comparadas com as outras maturidades). Todas as maturidades apresentadas nesta tabela possuem um valor positivo de curtose, o que indica que a distribuição de dados para cada uma dessas maturidades tem caudas mais pesadas do que a distribuição normal.

Já a Figura 3 apresenta a informação dos valores em percentual dos excessos de retorno dos contratos de DI Futuro brasileiros para as maturidades de 12, 24, 60 e 120 meses em relação ao tempo, observando o movimento das taxas de excesso de retorno no tempo para a mesma maturidade. Observando-se a Tabela 3 em conjunto com a Figura 3, é possível constatar algumas características dos excessos de retornos calculados, como o fato de que, maturidades maiores tendem a apresentar maiores taxas de retorno na média (e mediana), entretanto a amostra tem maior desvio padrão conforme maior a maturidade, de modo que maiores maturidades são “mais arriscadas”, ou seja, apresentam a possibilidade de maior variação do excesso de retorno.

Com as principais características dos dados dos contratos de DI Futuro brasileiros observadas, cabe verificar os resultados do modelo estimado.

**Figura 3**  
**Excesso de retorno dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidades de 1, 2, 5 e 10 anos**



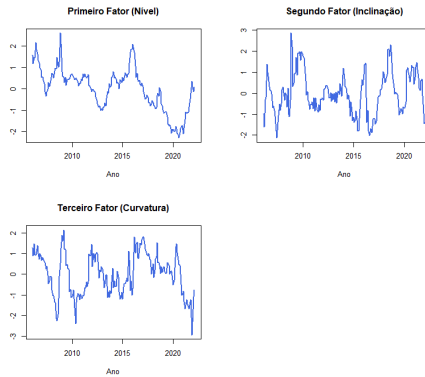
Fonte: Elaborado pelos autores.

## 5. Resultado Empírico

A decomposição da estrutura a termo da curva de juros brasileira foi realizada através de um modelo dinâmico afim livre de arbitragem, proposto por Adrian, Crump e Moench (2013), para isso foram utilizados dados de Contrato de DI Futuro. A estrutura a termo foi estimada com a adoção de  $N=12$ , selecionando as maturidades  $n$  de 6, 12, 18, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses, assemelhando-se ao modelo estimado por Adrian, Crump e Moench (2013), e foi estimada com duas quantidades de fatores distintos, utilizando nível, inclinação e curvatura em um modelo de 3 fatores, e, estendendo a análise para 5 fatores, este último o recomendado pelos autores.

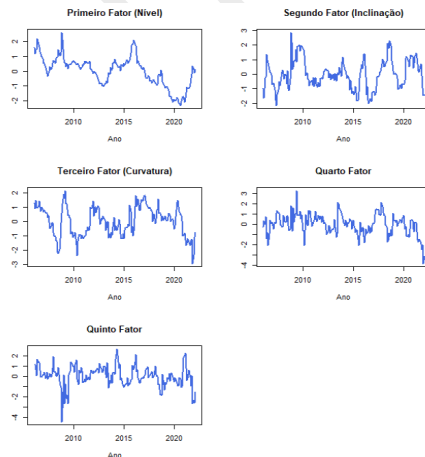
Na Figura 4 são traçadas as séries temporais dos três fatores utilizados no modelo de 3 fatores. Estes são os três primeiros componentes principais extraído do cross-section das observações de fim de mês dos yields. Já na Figura 5, as mesmas informações são traçadas, porém com todos os 5 fatores utilizados, sendo que o quarto fator pode ser chamado de inclinação-2 e o quinto de curvatura-2. Na sequência é apresentado os resultados de cada um dos modelos, com 3 e 5 fatores.

**Figura 4**  
**Três fatores utilizados para decomposição da estrutura a termo da curva de juros brasileira com dados entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 5**  
**Cinco fatores utilizados para decomposição da estrutura a termo da curva de juros brasileira com dados entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022**

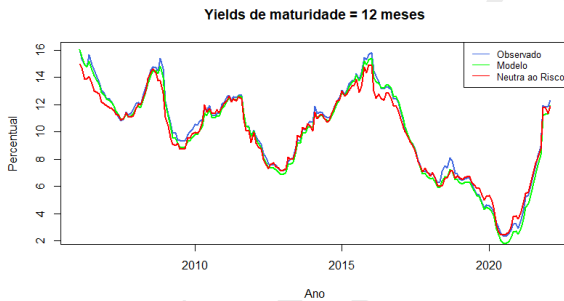


Fonte: Elaborado pelos autores.

## 5.1 Modelo de Três Fatores

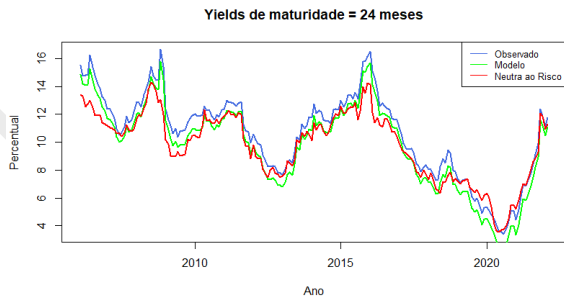
Para o modelo de três fatores obtiveram-se os resultados apresentados abaixo para yields, retorno e excesso de retorno. Os resultados dos yields ajustados e na medida neutra ao risco são comparados com os yields observados, extraídos diretamente dos dados, na Figura 6, para os valores referentes à títulos com maturidades de 12 meses, e nas Figuras 7, 8 e 9 para 24, 60 e 120 meses, respectivamente.

**Figura 6**  
**Yields observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 12 meses**



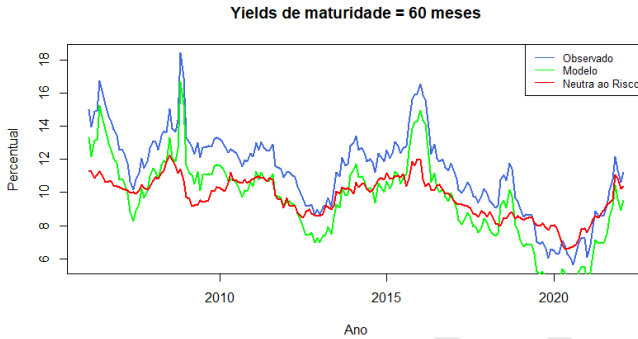
Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 7**  
**Yields observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 24 meses**



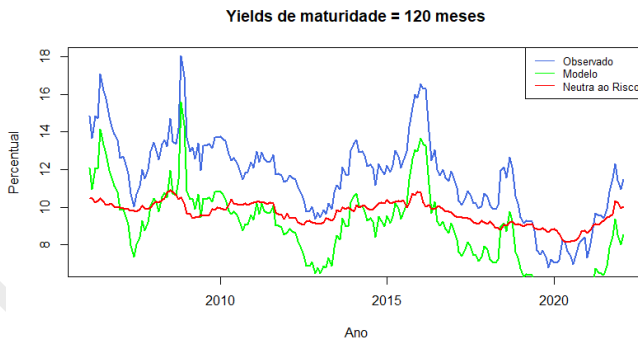
Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 8**  
**Yields observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 60 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 9**  
**Yields observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 120 meses**



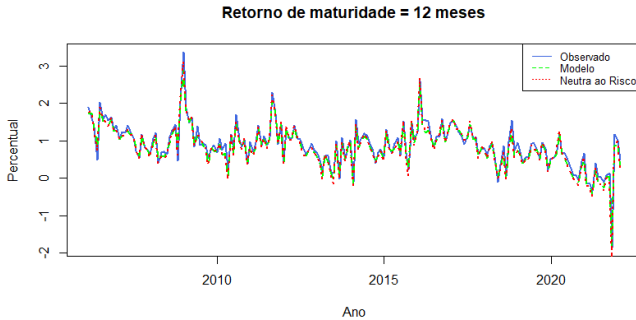
Fonte: Elaborado pelos autores.

Ao observar as Figuras 6, 7, 8 e 9 é possível perceber visualmente que o modelo apresenta uma melhor aderência aos dados com menor maturidade (12 e 24 meses) do que aos dados de maior maturidade (60 e 120 meses). Também é possível verificar que a taxa neutra ao risco de prazos mais longo exibem menor variabilidade do que as de prazo mais curto, isso pode ser

explicado pelo fato de que as taxas de curto prazo são utilizadas para realizar política monetária pelo Banco Central do Brasil, de modo que a expectativa da taxa de juros de longo prazo seja mais estável (mais próxima a uma taxa “natural” da economia).

**Figura 10**

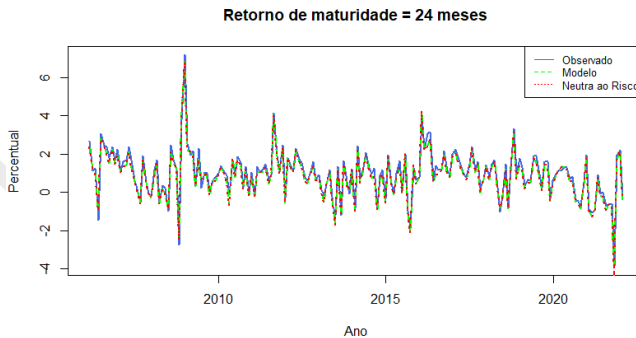
**Retornos observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 12 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 11**

**Retornos observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 24 meses**

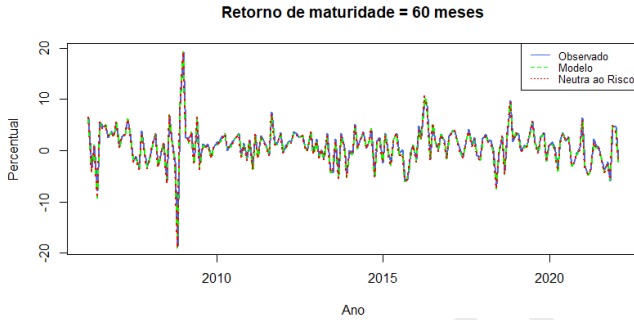


Fonte: Elaborado pelos autores.

As Figuras 10, 11, 12 e 13, apresentadas na sequência, mostram o comparativo dos retornos (calculado como a diferença entre dois meses) observados

**Figura 12**

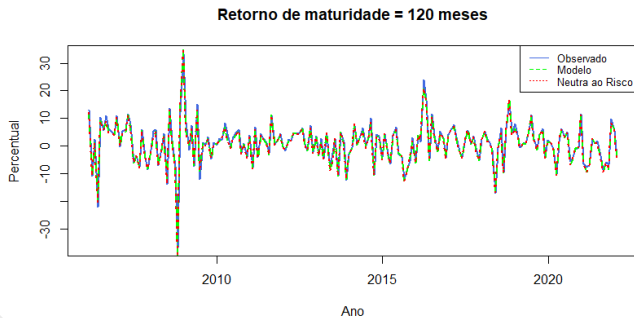
**Retornos observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 60 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 13**

**Retornos observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 120 meses**



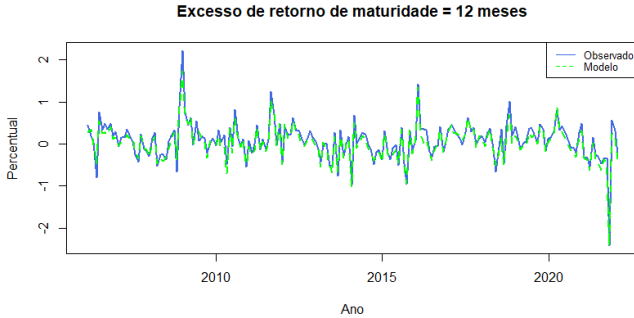
Fonte: Elaborado pelos autores.

nos dados e os resultados para os retornos ajustados e neutros ao risco, sendo estes para maturidades de, respectivamente, 12, 24, 60 e 120 meses.

Os retornos ajustados e neutros ao risco apresentam uma boa aderência aos dados, conforme as Figuras 10, 11, 12 e 13 (visualmente as curvas são muito similares para todas as maturidades selecionadas), isso indica que o comportamento da diferença dos logaritmos dos preços entre um mês e outro (retorno este referente ao tempo de um mês) é similar para as três informa-

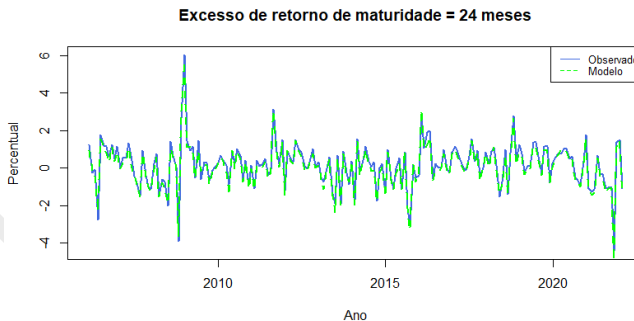
ções (calculado diretamente pelos dados e pelo modelo de três fatores com os dados ajustados e neutros ao risco).

**Figura 14**  
**Excessos de retorno observados e ajustados a partir do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 12 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 15**  
**Excessos de retorno observados e ajustados a partir do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 24 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

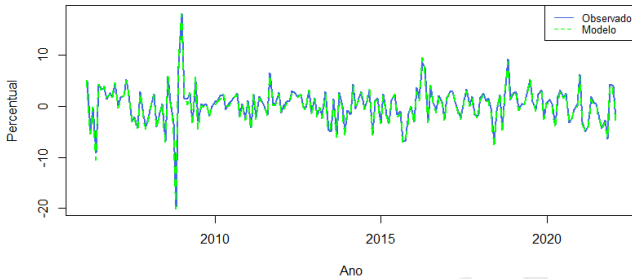
Cabe ainda verificar o comparativo do excesso de retorno observados nos dados com os resultados para os excessos de retorno do modelo para as maturidades de 12, 24, 60 e 120 meses. Esse comparativo é realizado com os gráficos presentes nas Figuras 14, 15, 16 e 17.



**Figura 16**

**Excessos de retorno observados e ajustados a partir do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 60 meses**

Excesso de retorno de maturidade = 60 meses

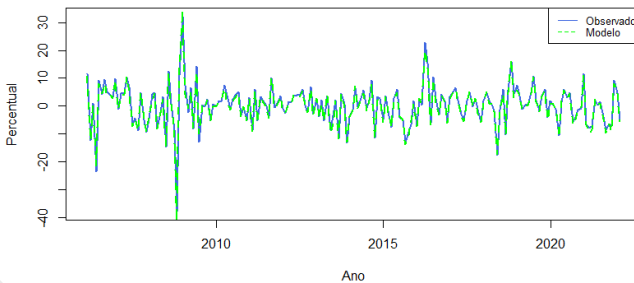


Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 17**

**Excessos de retorno observados e ajustados a partir do modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 120 meses**

Excesso de retorno de maturidade = 120 meses



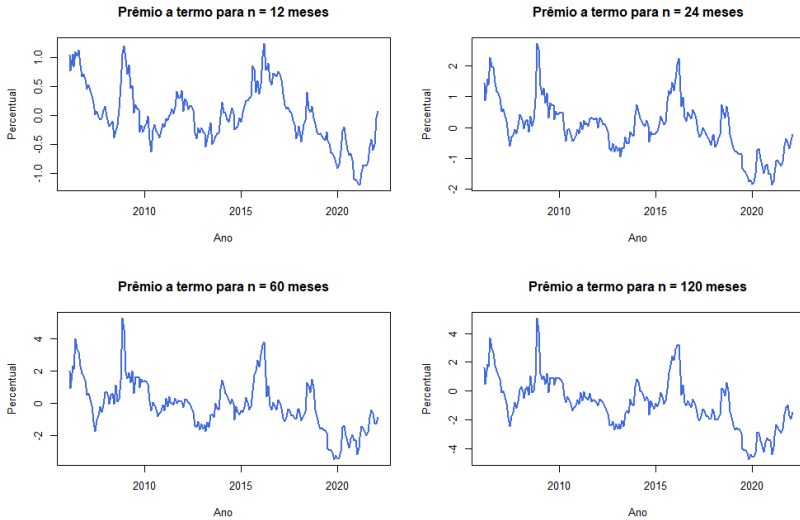
Fonte: Elaborado pelos autores.

Como esperado, dado o a aderência dos retornos estimados com os dados observados, os dados de excesso de retorno estimados pelo modelo, para todas as maturidades analisadas, também são aderentes aos dados.

Nas Figura 18 são representados os prêmios a termo para as mesmas quatro maturidades que vem sendo analisadas para as variáveis de yields, retorno e excesso de retorno.

O prêmio a termo foi calculado como a diferença da curva de juros esti-

**Figura 18**  
**Prêmio a termo dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidades de 12, 24, 60 e 120 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

mada e da curva de juros na medida neutra ao risco. Visualmente percebe-se que o mesmo se comporta de maneira similar (com valores diferentes, dependendo da maturidade) para todos os períodos, mas de forma mais perceptível para períodos mais próximos.

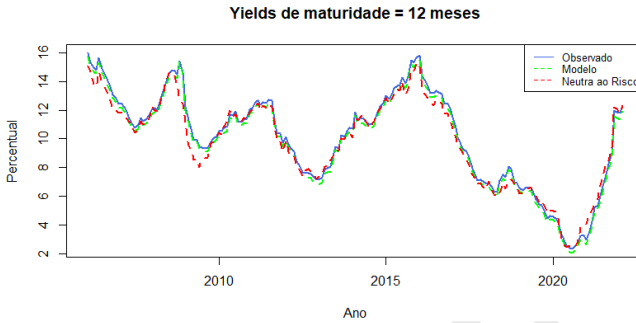
## 5.2 Modelo de Cinco Fatores

Cabe observar estes mesmos resultados gerados a partir do modelo de cinco fatores. As figuras 19, 20, 21 e 22 apresentam, em gráficos, os yields observados e os yields ajustados e neutros ao risco do modelo de cinco fatores para os valores referentes à títulos com maturidades de 12, 24, 60 e 120 meses, respectivamente.

Ao observar as Figuras 19, 20, 21 e 22 é possível perceber visualmente que o modelo apresenta uma melhor aderência aos dados com menor maturidade (12 e 24 meses) do que aos dados de maior maturidade (60 e 120 meses), bem como que ambos os modelos estimados, com três ou cinco fatores, são muito similares. Também é possível verificar, assim como no modelo de três fatores, que a taxa neutra ao risco de prazos mais longo exibem menor variabilidade do que as de prazo mais curto.

**Figura 19**

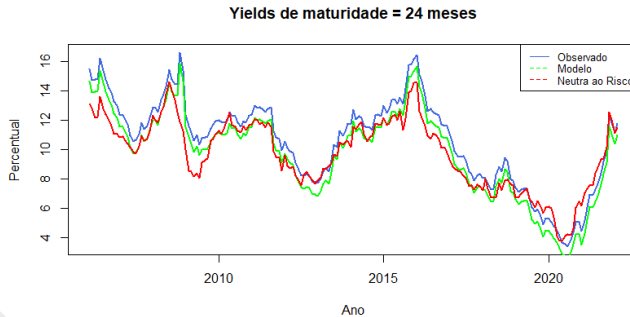
**Yields observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 12 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 20**

**Yields observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 24 meses**

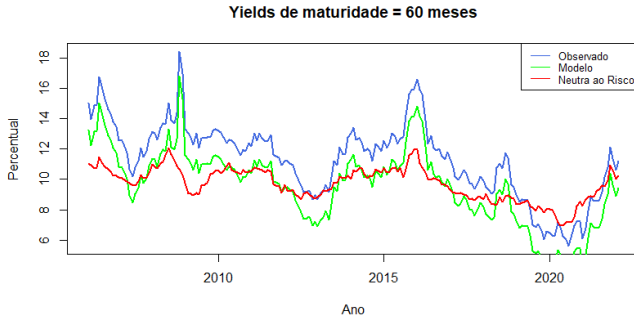


Fonte: Elaborado pelos autores.

As Figuras 23, 24, 25 e 26, apresentadas na sequência, mostram o comparativo dos retornos observados nos dados e os resultados ajustados e neutros ao risco para os retornos do modelo de cinco fatores, sendo estes para maturidades de, respectivamente, 12, 24, 60 e 120 meses.

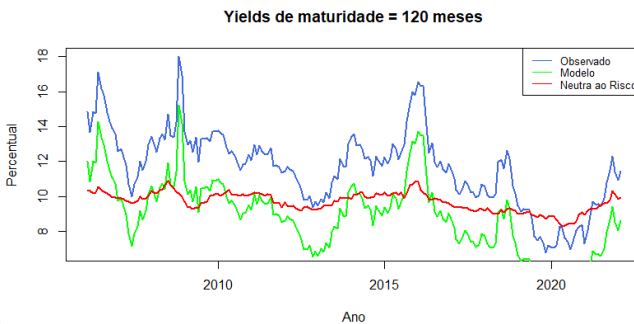
Os retornos apresentam uma boa aderência aos dados, conforme as Figuras 23, 24, 25 e 26 (visualmente as curvas são muito similares para todas as maturidades selecionadas), assim como os analisados para o modelo de três

**Figura 21**  
**Yields observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 60 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 22**  
**Yields observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 120 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

fatores.

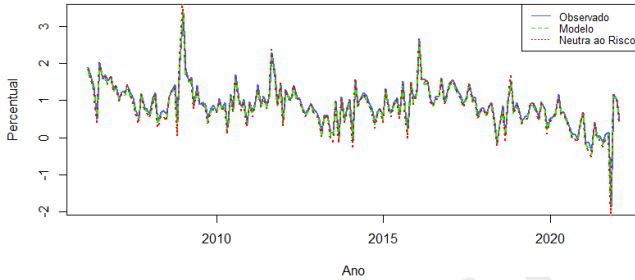
O comparativo do excesso de retorno observados nos dados com os resultados para os excessos de retorno do modelo para as maturidades de 12, 24, 60 e 120 meses é realizado nas figuras 27, 28, 29 e 30.

Como esperado, dado a aderência dos retornos estimados com os dados observados, os dados de excesso de retorno estimados pelo modelo de cinco fatores, para todas as maturidades analisadas, também são aderentes aos da-

**Figura 23**

**Retornos observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre a janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 12 meses**

Retorno de maturidade = 12 meses

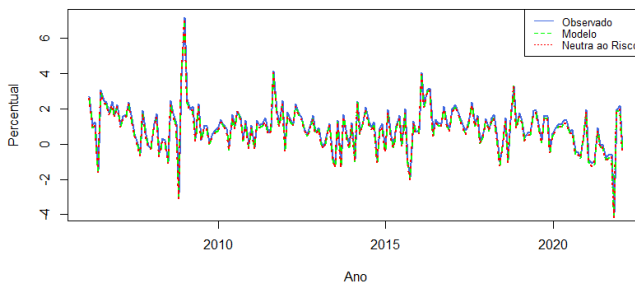


Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 24**

**Retornos observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre a janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 24 meses**

Retorno de maturidade = 24 meses



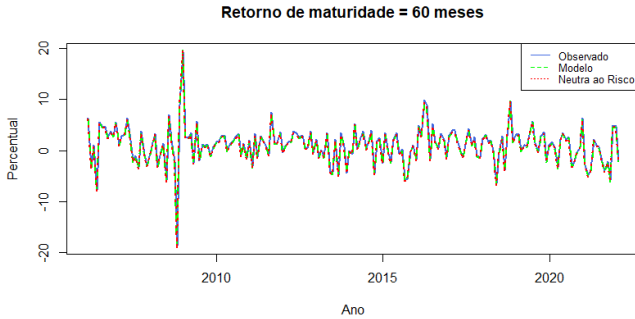
Fonte: Elaborado pelos autores.

dos.

Na Figura 31 são representados os prêmios a termo para as mesmas quatro maturidades que vem sendo analisadas para as variáveis de yields, retorno e excesso de retorno.

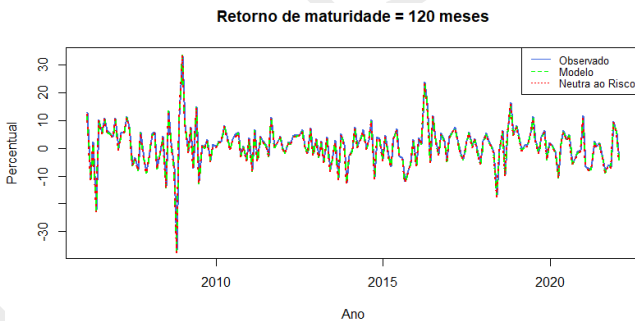
O prêmio a termo foi calculado como a diferença da curva de juros estimada e da curva de juros na medida neutra ao risco. Visualmente percebe-se que o mesmo se comporta de maneira similar para todos os períodos (no for-

**Figura 25**  
**Retornos observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre a janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 60 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 26**  
**Retornos observados, ajustados e neutros ao risco do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre a janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 120 meses**



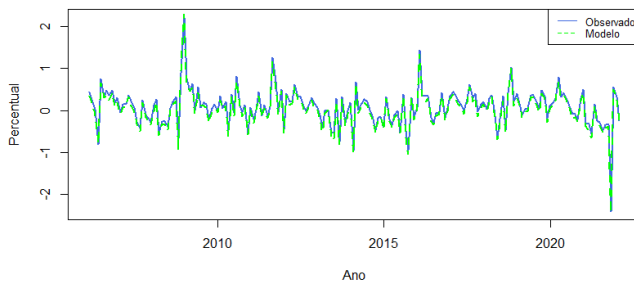
Fonte: Elaborado pelos autores.

mato das curvas, não em valor do prêmio a termo), isso sendo mais perceptível para períodos mais próximos. Esse comportamento do prêmio a termo pode ocorrer pelos dados refletirem as incertezas do cenário da economia, como cenário político e crises internacionais, que ocasionam modificações em todas as maturidades, um pouco mais sobre isso é discutido no próximo tópico.

**Figura 27**

**Excessos de retorno observados e ajustados a partir do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 12 meses**

Excesso de retorno de maturidade = 12 meses

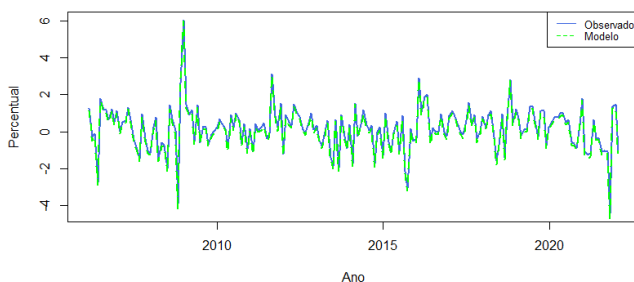


Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 28**

**Excessos de retorno observados e ajustados a partir do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 24 meses**

Excesso de retorno de maturidade = 24 meses



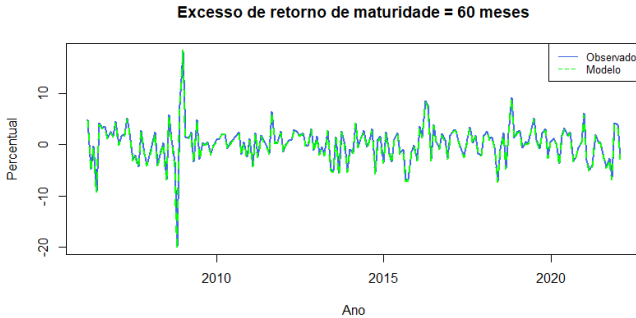
Fonte: Elaborado pelos autores.

### 5.3 Análise do Prêmio a Termo

Um exemplo da relação do cenário econômico com o prêmio a termo são as elevadas taxas de prêmio a termo no final de 2008, movimento este compatível com a conjuntura de grande incerteza dos mercados devido à crise de 2008 dos Estados Unidos (crise financeira que ocorreu devido à bolha imobiliária). Outro momento em que o prêmio a termo chama a atenção é o final de 2015 e o ano de 2016, em que o mesmo se eleva (especialmente para

**Figura 29**

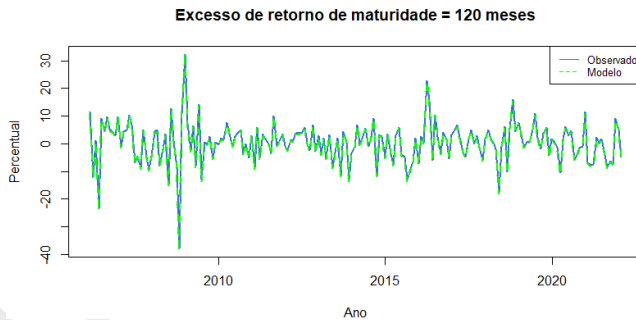
**Excessos de retorno observados e ajustados a partir do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 60 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 30**

**Excessos de retorno observados e ajustados a partir do modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidade de 120 meses**



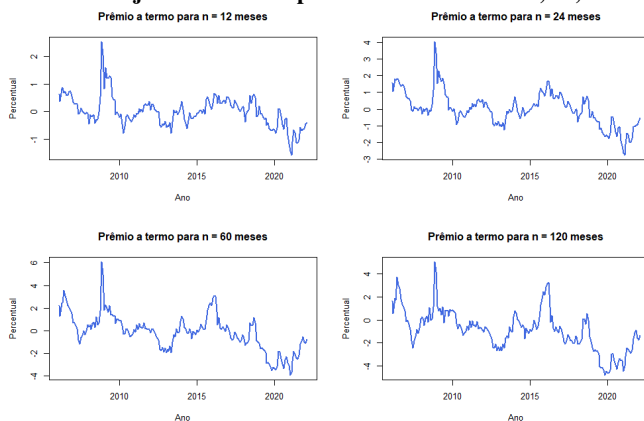
Fonte: Elaborado pelos autores.

maturidades de 60 e 120 meses), esse período foi marcado pelo processo de impeachment de Dilma Rousseff, o que pode ter elevado o grau de incerteza do mercado.

No período mais recente dos dados, nos anos de 2020, 2021 e 2022, período influenciado pela pandemia de COVID-19 e crise e inflação decorrentes, percebe-se que o prêmio a termo ficou negativo, isso ocorre, provavelmente, devido ao fato de que os agentes foram surpreendidos pela inflação, e, como



**Figura 31**  
**Prêmio a termo dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 para maturidades de 12, 24, 60 e 120 meses**



Fonte: Elaborado pelos autores.

títulos de renda fixa são sujeitos à risco de inflação, com a mesma acima do esperado, o prêmio a termo resultou em taxas negativas. É a inflação, inclusive, a provável causa das médias e medianas das Tabelas 4 e 5 apresentarem um comportamento diferente do esperado pela literatura, que é de aumentos do prêmio a termo para maturidades mais longas.

A Tabela 4 apresenta as estatísticas descritivas do prêmio a termo calculado através da diferença da curva de juros estimada e da curva de juros na medida neutra ao risco do modelo de três fatores para as maturidades de 6, 12, 18, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses.

A Tabela 5 apresenta as estatísticas descritivas do prêmio a termo do modelo de cinco fatores para as mesmas maturidades da Tabela 4.

O máximo de ambas as tabelas, com o prêmio a termo de cada um dos modelos estimados, mostra que há a tendência de títulos com maiores maturidades exigirem maiores prêmios a termo, entretanto a média e a mediana apresentam um comportamento diferente do esperado, com prêmios a termo negativos e com tendência a redução do seu valor para maiores maturidades. Isso possivelmente ocorre devido ao prêmio a termo dever-se, ao menos em parte, à expectativa (e risco) de inflação, como em mais de um momento no tempo o prêmio a termo tornou-se negativo, especialmente nos anos mais recentes (2020, 2021 e 2022) dos dados, isso indica que essas expectativas não se alinharam a realidade, o que pode ter alterado os resultados da média e mediana do prêmio a termo.

**Tabela 4**  
**Estatísticas descritivas do prêmio a termo estimado através de modelo de três fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 com maturidades selecionadas**

<b>Maturidade (anos)</b>	<b>Mín.</b>	<b>Med.</b>	<b>Média</b>	<b>Máx.</b>	<b>Desv. Padrão</b>	<b>Ass</b>	<b>Curt</b>
0,5	-0,738	-0,038	0,000	0,686	0,31	0,21	-0,41
1	-1,211	-0,049	0,001	1,253	0,52	0,20	-0,20
1,5	-1,560	0,001	0,002	1,883	0,69	0,22	0,13
2	-1,870	-0,017	0,002	2,732	0,87	0,32	0,46
3	-2,557	-0,101	-0,014	4,127	1,18	0,49	0,79
4	-3,117	-0,188	-0,062	4,932	1,40	0,51	0,83
5	-3,524	-0,236	-0,141	5,292	1,54	0,45	0,76
6	-3,845	-0,256	-0,244	5,417	1,63	0,37	0,67
7	-4,114	-0,356	-0,369	5,423	1,69	0,32	0,60
8	-4,348	-0,474	-0,514	5,368	1,73	0,29	0,56
9	-4,564	-0,622	-0,678	5,250	1,75	0,27	0,53
10	-4,771	-0,815	-0,859	5,083	1,76	0,26	0,52

Fonte: Elaborado pelos autores.

## 5.4 Ajuste dos Modelos

Como uma possibilidade adicional de comparação entre os dois modelos, de três e de cinco fatores, é pertinente verificar, ainda, a raiz do erro quadrático médio de ambos os modelos para maturidades selecionadas, o cálculo do mesmo para os yields dos modelos pode ser verificado na tabela 6.

Ambos os modelos possuem uma menor raiz do erro quadrático médio para menores maturidades e um aumento dessa para maiores maturidades, o que era esperado, dado que a aderência dos yields com os dados verificadas nas Figuras 6, 7, 8 e 9, para o modelo de três fatores, e 19, 20, 21 e 22, para o modelo de cinco fatores, reduz para maiores maturidades. O modelo de três fatores apresenta os valores da raiz do erro quadrático médio, de modo geral, um pouco mais elevados do que o modelo de cinco fatores, entretanto isso não ocorre para todas as maturidades, a média dos valores da tabela para o modelo de três fatores é 0,01525, enquanto para o de cinco fatores é 0,01516 (para um nível de confiança de 95% essa diferença entre as médias não é significativa).

## 6. Considerações Finais

Esta pesquisa teve como objetivo central modelar a estrutura a termo da curva de juros brasileira através de modelo dinâmico afim livre de arbitragem

**Tabela 5**

**Estatísticas descritivas do prêmio a termo estimado através de modelo de cinco fatores dos contratos de DI Futuro brasileiros em percentual entre janeiro de 2006 até janeiro de 2022 com maturidades selecionadas**

<b>Maturidade (anos)</b>	<b>Mín.</b>	<b>Med.</b>	<b>Média</b>	<b>Máx.</b>	<b>Desv. Padrão</b>	<b>Ass</b>	<b>Curt</b>
0,5	-0,712	-0,010	-0,000	1,356	0,25	1,24	5,44
1	-1,589	-0,031	0,000	2,547	0,55	0,69	2,88
1,5	-2,287	-0,043	0,002	3,389	0,81	0,43	1,75
2	-2,777	-0,007	0,002	4,056	1,02	0,29	1,25
3	-3,348	0,050	-0,012	5,098	1,32	0,19	0,93
4	-3,719	0,112	-0,058	5,780	1,51	0,20	0,89
5	-3,936	-0,059	-0,136	6,099	1,62	0,23	0,88
6	-4,073	-0,138	-0,240	6,130	1,68	0,25	0,83
7	-4,171	-0,260	-0,369	5,972	1,72	0,25	0,73
8	-4,352	-0,431	-0,518	5,709	1,75	0,25	0,63
9	-4,589	-0,614	-0,688	5,396	1,77	0,24	0,55
10	-4,822	-0,820	-0,876	5,065	1,78	0,23	0,49

Fonte: Elaborado pelos autores.

**Tabela 6**

**Raiz do erro quadrático médio dos modelos de três e cinco fatores com maturidades selecionadas**

<b>Maturidade (em anos)</b>	<b>Raiz do EQM do modelo de 3 fatores</b>	<b>Raiz do EQM do modelo de 5 fatores</b>
0,5	0,00097	0,00091
1	0,00353	0,00284
1,5	0,00603	0,00571
2	0,00829	0,00825
3	0,01210	0,01216
4	0,01506	0,01504
5	0,01747	0,01742
6	0,01965	0,01958
7	0,02174	0,02169
8	0,02386	0,02384
9	0,02604	0,02605
10	0,02830	0,02837

Fonte: Elaborado pelos autores.

e decompor a mesma em componentes de expectativas sobre as taxas de juros futuras de curto prazo e prêmio a termo. A revisão da literatura auxiliou a estruturar uma base teórica para compreender a dinâmica da curva de juros e do prêmio a termo. Também permitiu apresentar o conceito e a estruturação de modelos afins da curva de juros, que serviu de base para uma breve revisão de trabalhos recentes que utilizam modelos afins para estimar a estrutura a

termo da taxa de juros.

A abordagem utilizada para estimar a curva de juros foi a de Adrian, Crump e Moench (2013), esta permite capturar a dinâmica da estrutura a termo através de variáveis de estado, mediante estudo com fatores observáveis e três etapas de estimação de parâmetros. Dada as restrições impostas pelos autores na estruturação do modelo este é um modelo dinâmico afim livre de arbitragem, que permite a decomposição da estrutura a termo da curva de juros.

Ao avaliar os resultados obtidos por ambos os modelos econométricos estimados, com três ou cinco fatores, observa-se que, de modo geral, ambos apresentam uma boa aderência aos dados e são muito similares, entretanto, os modelos apresentam uma melhor aderência aos dados de yields com menor maturidade do que aos dados de maior maturidade. Além disso, o prêmio a termo, calculado como a diferença da curva de juros estimada e da curva de juros na medida neutra ao risco, apresenta um comportamento de acordo com o esperado para os seus valores máximos, visto que é crescente com as maturidades, mas informa valores de média e mediana negativos e decrescentes em relação à maturidade.

Esse comportamento do prêmio a termo pode refletir o fato de que o mesmo inclui em seu valor a expectativa e o risco de inflação, de modo que pode tornar-se negativo caso a inflação efetiva seja maior do que a esperada, caso os agentes sejam surpreendidos pela inflação. Títulos de renda fixa são sujeitos à risco de inflação, com a mesma acima do esperado, o prêmio a termo pode resultar em taxas negativas, desse modo, os períodos de inflação elevada, especialmente os últimos anos da amostra, podem ter alterado os resultados das estatísticas descritivas do prêmio a termo do período analisado.

Uma sugestão para futuros trabalhos é estimar, através de modelo similar, conjuntamente as curvas de juros real e nominal da economia brasileira e, através destas, estimar a inflação implícita. De modo geral, o modelo de Adrian, Crump e Moench (2013), que é um modelo dinâmico, afim e livre de arbitragem, permite estimar a curva de juros brasileira e decompor a mesma em expectativas de juros e em prêmio a termo.

## Referências

ABRAHAMS, Michael et al. Decomposing real and nominal yield curves. *Journal Of Monetary Economics*, [S. L.], v. 84, n. 1, p. 182-200, dez. 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmoneco.2016.10.006>. Acesso em: 01 nov. 2021. Acesso exclusivo para assinantes da coleção eletrônica.

ADRIAN, Tobias; CRUMP, Richard K.; MOENCH, Emanuel. Pricing the

term structure with linear regressions. *Journal Of Financial Economics*, Nova Iorque, v. 110, n. 1, p. 110-138, out. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2013.08.001>. Acesso em: 27 fev. 2022. Acesso exclusivo para assinantes da coleção eletrônica.

BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS - BIS. Zero-coupon yield curves: technical documentation. BIS Papers n. 25. Bank for International Settlements (Department Monetary and Economic), oct. 2005. Disponível em: <https://www.bis.org/publ/bppdf/bispap25.htm>. Acesso em: 6 jul. 2022.

BRASIL. Tesouro Nacional. Mercado Secundário: informações sobre o mercado secundário brasileiro de títulos públicos. 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/br/divida-publica-federal/mercado-interno/mercado-secundario>. Acesso em: 06 fev. 2022.

BRASIL. B3. Taxa DI: Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia. 2022. Disponível em: [https://www.b3.com.br/pt\\_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm](https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm). Acesso em: 02 jul. 2022.

CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; PORTUGAL, Marcelo S.. Efficient Yield Curve Estimation and Forecasting in Brazil. *Economia*, Brasília, v. 11, n. 1, p. 27-51, jan./abr. 2010.

CALDEIRA, João F.. Estimação da estrutura a termo da curva de juros no Brasil através de modelos paramétricos e não paramétricos. *Análise Econômica*, Porto Alegre, v. 29, n. 55, p. 95-122, 21 jul. 2011. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.22456/2176-5456.13198>. Acesso em: 10 dez. 2021.

CALDEIRA, João F.; FURLANI, Luiz G. C.. Inflação implícita e o prêmio pelo risco: uma alternativa aos modelos var na previsão para o IPCA. *Estudos Econômicos*, São Paulo, v. 43, n. 4, p. 627-645, dez. 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/s0101-41612013000400001>. Acesso em: 06 dez. 2021.

CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; SANTOS, André A.P.. Predicting the yield curve using forecast combinations. *Computational Statistics Data Analysis*, [S.L.], v. 100, p. 79-98, ago. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.csda.2014.05.008>. Acesso em: 27 fev. 2022.

CAO, Shuo. Essays on the Term Structure of Interest Rates. 2016. 186 f. Tese (Doutorado) - Curso de Filosofia, Adam Smith Business School, University Of Glasgow, [Glasgow, Escócia], 2016. Disponível em: <http://theses.gla.ac.uk/id/eprint/> Acesso em: 21 jun. 2022.

CHRISTENSEN, Jens H. E.; LOPEZ, Jose A.; RUDEBUSCH, Glenn D.. Inflation Expectations and Risk Premiums in an Arbitrage-Free Model of Nominal and Real Bond Yields. *Journal Of Money, Credit And Banking*. [S. L.], set. 2010. Suplemento 1, p. 143-178. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/40784965>. Acesso em: 1 nov. 2021. Acesso exclusivo para assinantes da coleção eletrônica.

FILIPOVIC, D. Term-structure models: a graduate course. [S.L.]: Springer, 2009, 256 p. (Springer Finance).

FRANÇA, Daniel Mussi. Derivativos cambiais do mercado brasileiro: precificação e administração de riscos. 2010. 58 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Finanças e Economia Empresarial, Fundação Getulio Vargas, Rio de Janeiro, 2010.

GAMAGE, Rangika Dodampe. Empirical analysis and forecasting of yield curves. 2021. 64 f. TCC (Graduação) - Curso de Ciência, Graduate Program In Mathematics And Statistics, University Of Calgary, Calgary, 2021. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1880/113887>. Acesso em: 21 jun. 2022.

JOYCE, Michael A.S.; LILDHOLDT, Peter; SORENSEN, Steffen. Extracting inflation expectations and inflation risk premia from the term structure: A joint model of the UK nominal and real yield curves. *Journal Of Banking Finance*, [S. L.], v. 34, n. 2, p. 281-294, fev. 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2009.07.018>. Acesso em: 3 nov. 2021. Acesso exclusivo para assinantes da coleção eletrônica.

LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J. Common Factors Affecting Bond Returns. *The Journal of Fixed Income*, [S. L.], v. 1, n. 1, p. 54-61, 1991.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. 277p.

ROSSI, J. W. A estrutura a termo da taxa de juros: uma síntese. Pesquisa e Planejamento Econômico, [S.L.], v. 26, n. 3, p. 521–548, 1996.

SAARINEN, Jaakko A.. Using the Yield Curve in Predicting Real Economic Growth – Application to Finland. 2012. 43 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Economia, Department Of Political And Economic Studies, University Of Helsinki, [Helsinki, Finlândia], 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10138/3>  
Acesso em: 21 jun. 2022.

VICENTE, José V. M.; GRAMINHO, Flávia Mourão. Decompondo a Inflação Implícita. Revista Brasileira de Economia, Rio de Janeiro, v. 69, n. 2, p. 263-284, jun. 2015. Disponível em: <https://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbe/article/>  
Acesso em: 05 dez. 2021.

VICENTE, José; KUBUDI, Daniela. Extracting inflation risk premium from nominal and real bonds using survey information. Journal Of Economic Studies, [S. L.], v. 45, n. 2, p. 307-325, 14 maio 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1108/JES-03-2017-0066>. Acesso em: 05 nov. 2021. Acesso exclusivo para assinantes da coleção eletrônica.