Abordagens de Multiplicador Ótimo para Estratégia de Investimento do Portfólio de Proporção Constante com Segurança

André Barbosa Oliveira

(Professor da Faculdade de Economia da UFF e Pesquisador do CEQEF/FGV-SP)

Pedro Luiz Valls Pereira

(Professor da Escola de Economia de São Paulo – EESP/FGV-SP e Diretor do CEQEF/FGV-SP)

Resumo

O investimento no mercado de ações está sujeito a risco, principalmente com quedas sucessivas em conjunturas de crise. A estratégia Portfolio de Proporção Constante com Segurança (Constant Proportion Portfolio Insurance - CPPI) permite aos investidores se beneficiarem da alta do mercado, porém controlando perdas em momentos de queda. Neste artigo apresentamos uma abordagem de otimização do CPPI, com multiplicador ótimo baseado nas funções objetivo: utilidade esperada, razão de Sortino, VaR e Vega. Comparamos o desempenho das diferentes abordagens do CPPI com a estratégia de comprar e manter o Ibovespa utilizando 23 anos de dados históricos. Como resultado o CPPI baseado em utilidade esperada e Vega permitiram melhor performance em termos da razão ômega no período analisado.

Palavras-chave: CPPI; Alocação de Capital em Classes de Ativos; Otimização.
Area temática: Engenharia Financeira.

Abstract

Investment in the stock market is subject to risk, especially with successive drops in crisis conjectures. The Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) strategy allows investors to benefit from market rises, but control losses in times of decline. In this article we present a CPPI optimization approach, with optimal multipliers based on the objective functions: expected utility, Sortino ratio, VaR and Vega. We compared the performance of different CPPI approaches with the buy and hold Ibovespa strategy using 23 years of historical data. As a result, the CPPI based on expected utility and Vega allowed better performance in terms of the omega ratio in the analyzed period.

Key-words: CPPI; Asset Allocation; Optimization.

Introdução

No investimento em ações o risco de perdas não é mitigado pela diversificação. Por mais que os portfólios sejam diversificados estão sujeitos a quedas que podem resultar em perdas elevadas com quedas sucessivas em conjunturas de grande incerteza, como na crise Subprime e do Coronavírus, que afetaram o mercado financeiro em várias classes de ativos e em diferentes países.

Nas estratégias de market timing os investimentos são realizados antes das altas ocorrerem e realocados para posições mais seguras quando é projetada queda. Um exemplo desta abordagem é a análise técnica que estuda o comportamento do mercado em tendências, com indicadores que seriam capazes de antecipar os movimentos de mercado, realizando investimentos nos ativos em resposta a sinais de alta e vendendo com sinais de queda.

A venda de ativos em momentos de grande incerteza permite proteger o investidor das quedas, porém o erro de projeção que resultou na venda com a expectativa de queda não concretizada pode impedir valorização se ocorre alta. Outro instrumento de proteção dos investimentos nos ativos de risco é a renda fixa, quanto maior a participação da renda fixa na carteira menor o risco.

A estratégia do portfólio de proporção constante com segurança (CPPI – Constant Proportion Portfolio Insurance) (BLACK; JONES, 1987; BLACK; PEROLD, 1992) promove proteção na carteira que opera ativo com exposição e outro de menor risco, como a renda fixa, com o objetivo de assegurar um rendimento mínimo ou perda máxima da quantia aportada. Nesta estratégia o investimento em renda fixa é referência de rentabilidade da carteira para atingir um valor mínimo de segurança ao final do horizonte de planejamento financeiro, realizando investimento no ativo com exposição de quantia dentro da margem de segurança para obter o valor mínimo pretendido.

O CPPI aumenta o investimento sob risco com a alta do mercado, porém protegendo contra as quedas vendendo posições e direcionando para renda fixa. O CPPI realiza aporte em renda variável se beneficiando das altas do mercado, num mecanismo de colchão de segurança que aloca em risco quantias dentro da margem de segurança para obter o rendimento mínimo planejado.

O CPPI se assemelha a estratégias de market time aumentando a participação de renda variável nas altas do mercado, porém sem necessidade de antever movimentos da bolsa. O CPPI ao invés de projetar tendencias do mercado responde aos movimentos de alta e baixa para garantir um montante mínimo do resultado do investimento.

A estratégia CPPI foi ampliada para multiplicador dinâmico. Entre as abordagens de multiplicador variante no tempo o CPPI baseado no valor em risco (JIANG; MA; AN, 2009) estabelece a alocação no ativo livre de risco pelo valor em risco da carteira em relação ao valor mínimo de segurança no instante terminal. Zieling, Mahayni e Balder (2014) estudam multiplicadores ótimos para investidor com função utilidade HARA que dependem da aversão ao risco, prêmio pelo risco e volatilidade.

O CPPI é relacionado a estratégia núcleo-satélite de investimento (Core-Satellite Investing), onde investe-se em um ativo de maior risco chamado de satélite e um benchmark chamado de núcleo, com objetivo de superar o benchmark em termos de retorno relativo. Caliman; D’Hondt e Petitjean (2013) testam empiricamente multiplicadores para a estratégia core satélite baseado em heurísticas utilizando medidas de desempenho e risco, como: razão de Sharpe/volatilidade, inverso da volatilidade e inverso do máximo drawdown. Embora os multiplicadores dinâmicos propostos permitam melhor proteção contra queda e acompanhar os movimentos do mercado, não conseguiram superar com consistência a abordagem de multiplicador estático em termos de desempenho de retorno penalizado pelo risco.

Este trabalho tem o objetivo de estudar multiplicadores ótimos para a estratégia CPPI, fundamentados em maximização de funções objetivo da escolha sob incerteza e controle de risco. São apresentados multiplicadores baseados em otimização de utilidade esperada; razão de Sortino, com retorno penalizado pelo risco de perda; Valor em Risco (VaR), que quantifica a perda máxima esperada com dado nível de confiança; e Vega, da literatura de opções que mensura a sensibilidade do preço do derivativo a volatilidade do ativo subjacente.

Semelhante a Amenc, Malaise e Martellini (2004) que desenvolvem alocação percentual ótima para estratégia núcleo-satélite do excesso de retorno em relação a um benchmark, determinamos o multiplicador que está associado a alocação no ativo com exposição que maximiza utilidade esperada. Além de utilidade esperada, estudamos problemas de maximização de retorno e controle de risco que permitem cinco diferentes multiplicadores ótimos associados a medidas de risco e retorno da teoria de finanças.

Realizamos um estudo empírico com dados do Ibovespa e a taxa dos depósitos interfinanceiros sobre 23 anos, comparando o CPPI com multiplicador constante e as diferentes abordagens de multiplicador variante no tempo. Como resultado encontramos que o CPPI baseado em utilidade esperada e vega tiveram os melhores desempenhos.

O artigo está organizado em 5 seções. A primeira seção descreve o CPPI, a segunda seção estuda os multiplicadores ótimos baseados em otimização, a terceira apresenta os dados e o estudo empírico executado. A quarta seção apresenta os resultados, seguido da última seção de síntese e considerações sobre os resultados encontrados.

1 Portfólio de Proporção Constante com Segurança

Na estratégia portfólio de proporção constante com segurança (CPPI - *Constant Proportion Portfolio Insurance*) o investidor toma a decisão de investimento entre renda variável, chamado de ativo com exposição, e renda fixa. O agente aloca a sua dotação de riqueza no ativo com exposição e no ativo livre de risco a cada período assegurando uma rentabilidade mínima ao longo do horizonte de investimento e consequentemente um montante da carteira mínimo no instante terminal.

A estratégia consiste numa regra de investimento entre as classes de renda fixa e renda variável. O ativo com exposição é representado por renda variável, geralmente um índice do mercado de ações. O ativo sem exposição consiste num ativo de menor risco, geralmente o ativo livre de risco como a renda fixa de curto prazo.

A tomada de decisão de investimento entre renda fixa e renda variável depende da comparação do valor acumulado da carteira no período corrente em relação ao valor presente do montante desejado da carteira no vencimento. Quando a carteira de renda variável e renda fixa supera o montante sob o rendimento acumulado mínimo de referência descontado o investidor aporta no ativo com exposição; se o valor acumulado da carteira se torna menor ou igual ao valor acumulado mínimo desejado descontado o investidor aloca toda a riqueza em renda fixa.

A cada instante o investidor avalia o desempenho realizado da carteira de investimento no período anterior, investindo em renda variável uma proporção ou múltiplo do fluxo de caixa de segurança sobre o valor acumulado mínimo desejado a valor corrente. Se o valor da carteira é maior que o valor mínimo de segurança descontado, temos um múltiplo *m* deste "colchão" de fluxo de caixa excedente que é alocado em renda variável e o restante da dotação é destinada a renda fixa; caso contrário a carteira é inteiramente destinada a renda fixa. Temos uma estratégia de investimento em renda variável com margem de segurança, somente com valor da carteira acima da quantia que permite atingir o rendimento mínimo desejado é operado em ativos de risco.

A estratégia de investimentos CPPI é caracterizada pelo conjunto de equações:

$$e_t = m * C_t; \tag{1.1}$$

$$C_t = (V_t - P_t); \tag{1.2}$$

$$P_t = \frac{G_T}{(1 + R_f)^{(T-t)}}; \tag{1.3}$$

$$V_t = e_{t-1} * (1 + R_p) + (V_{t-1} - e_{t-1}) * (1 + R_f). \tag{1.4}$$

A equação (1.1) descreve e_t, o volume financeiro do investimento no ativo com exposição; a equação (1.4) representa o valor da carteira no período inicial, sendo resultado do aporte precedente no ativo com exposição, e_{t-1}, multiplicado pelo rendimento em renda variável, $(1 + R_p)$, somando ao investimento em renda fixa, $(V_{t-1} - e_{t-1})$, multiplicado pelo rendimento do ativo livre de risco, $(1 + R_f)$; (1.3) é chamado de piso e expressa o valor mínimo da carteira que pretende-se que seja garantido ao final do horizonte de investimento, G_T, descontado; enquanto (1.2) representa o colchão de fluxo de caixa excedente da carteira em relação ao valor mínimo de segurança descontado, formado pela diferença entre o valor da carteira e o piso.

Quanto maior a alta do mercado e o valor da carteira, maior o colchão e o aporte em renda variável. Com a queda do ativo com exposição e redução do valor da carteira é diminuído o investimento no ativo com exposição, culminando no aporte apenas em renda fixa quando o valor da carteira de investimentos se torna igual ou menor ao valor mínimo desejado no vencimento descontado pela taxa de juros livre de risco.

A estratégia CPPI sem operação de venda a descoberto e empréstimos em renda fixa pode ser expressa com a alocação no ativo com exposição como:

$$e_t = Máx\{Mín\{m * C_t; V_t\}; 0\}. \tag{2}$$

Nesse caso a maior exposição possível é com toda a riqueza alocada em renda variável, enquanto a menor alocação em renda variável é zero e todo o volume financeiro é direcionado para renda fixa.

Permitindo alavancagem em renda variável a partir do empréstimo em renda fixa, poderíamos alocar até $(1 + b) * V_t$ com exposição, para alavancagem de até b % da dotação, com $e_t = Máx\{Mín\{m * C_t; (1 + b)V_t\}; 0\}$; sem alavancagem $b = 0$. Permitindo operação de venda a descoberto em renda variável temos pesos da alocação no ativo com exposição com sinal que pode ser negativo, com até s% da dotação operando venda a descoberto temos $e_t = Máx\{Mín\{m * C_t; V_t\}; -s * V_t\}$.

O colchão funciona como um limiar de decisão, agrupando as equações (1.2) e (1.3) temos $C_t = V_t - \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}$; supondo que G_T é o valor terminal como um percentual p% da dotação inicial aportado a uma rentabilidade de benchmark $G_T = G_0 * (1 + r_{mín})^{(T-t_0)}$ para $G_0 = p * V_0$ e $0 < p < 1$. Apenas quando a valor acumulado da carteira supera o valor mínimo de segurança descontado $V_t > \frac{p*V_0*(1+r_{mín})^{(T-t_0)}}{(1+R_f)^{(T-t)}}$ operamos investimentos no ativo com exposição a risco.

A estratégia CPPI faz hedge contra queda do valor da carteira através de investimentos no ativo livre de risco, alterando o investimento no ativo com exposição frente a variações dos preços no mercado de ações para entregar um valor da carteira maior ou igual a um montante mínimo de referência no instante terminal. Se durante todos os períodos o valor da carteira é menor que o piso de segurança, com colchão negativo e a equação (2) igual a zero, $e_t = 0 =>$ pelas equações (1.2) e (1.3) $V_t = \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}$, e então $(V_t - e_t) = \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}$ com toda a dotação ao longo do horizonte de planejamento financeiro aportada em renda fixa e o montante final será o vaalor acumulado mínimo de segurança $\left[\frac{G_0*(1+r_{mín})^{(T-t_0)}}{(1+R_f)^{(T-t)}}\right] * \left(1 + R_f\right)^{(T-t)} = G_0 * (1 + r_{mín})^{(T-t_0)}$, nesse caso supondo $G_0 = V_0$.

O mesmo vale para um período t > t_0 a partir do qual ocorressem quedas sucessivas do ativo de risco, quando o valor da carteira se torna igual ao valor mínimo de segurança descontado as quantias aportadas são direcionadas a renda fixa, resultando no mesmo valor terminal que ocorreria se desde o período inicial o valor da carteira ficasse abaixo do valor de segurança descontado.

A estratégia CPPI pode ser aplicada tanto para carteiras de renda variável e renda fixa (ARDIA, BOUDT, WAUTERS, 2016), quanto para carteiras apenas com renda fixa (HAKANOGLU, KOPPRASCH, ROMAN, 1989) em que o ativo com exposição é representado por um título de vencimento longo. Nas aplicações de renda variável geralmente ao final do horizonte de investimento o investidor deseja no mínimo obter um percentual da sua dotação de riqueza no período inicial, $G_T = p * V_0$.

Na prática empírica da estratégia CPPI, com aplicações da formulas atualizadas com os dados de mercado que se alteram no tempo, existem dois fatores que levam aumentar o colchão e os aportes no ativo com exposição: alta do ativo de renda variável, com maior valor de mercado do índice do mercado de ações maior o valor que a carteira de investimentos entrega ampliando o colchão de segurança e os investimentos de risco; alta da taxa de juros, que reduz o valor presente descontado do valor da carteira mínimo de referência no instante terminal, de forma que um menor aporte em renda fixa consegue entregar o mesmo valor mínimo de segurança.

Desta forma a regra de investimentos pelo CPPI aumenta a posição em renda variável quando o mercado está em alta, se beneficiando da alta do valor das ações. Também pode ocorrer aumento de posição em renda variável quando a taxa de juros sobe, se o desconto dos fluxos de caixa garantidos em renda fixa for mais penalizado que o desconto dos ativos do mercado de ações frente a alta dos juros.

A estratégia CPPI é caracterizada por aumentar os aportes em renda variável quando o mercado está em alta, aproveitando o mercado de alta, e reduz o investimento com exposição quando o mercado cai, postergando a compra de ativos negociados a preços descontados na baixa para majorar a posição de risco quando o mercado subir. Em estudos de desempenho comparativo a estratégia CPPI tende a ter menor rentabilidade, porém é mais eficiente na redução do risco.

2 Abordagem de Multiplicador Ótimo para Estratégia de Portfólio de Proporção Constante com Segurança

A estratégia CPPI é uma regra para alocação da dotação de riqueza em renda variável a partir de um múltiplo do fluxo de caixa de segurança do valor da carteira de renda fixa e variável acima de um montante acumulado meta descontado, não tem um processo de otimização. Consiste numa fórmula para investir em renda variável com margem de segurança de forma que eventuais quedas do ativo com exposição não comprometam a meta de valor da carteira desejado ao final do horizonte de planejamento financeiro.

Os principais parâmetros do CPPI são o período de rebalanceamento, o valor mínimo acumulado no instante terminal e o multiplicador que aloca o fluxo de caixa do colchão entre renda fixa e renda variável. Nesta seção apresentamos a estratégia do CPPI numa abordagem de otimização, onde o investidor escolhe o valor do multiplicador ótimo sobre o fluxo de caixa excedente ao montante mínimo de segurança descontado. A escolha de período de rebalanceamento é uma questão empírica, enquanto o valor mínimo da carteira desejado no instante terminal depende das preferências do investidor.

Seja o investidor avesso ao risco que prefere o maior retorno, podemos avaliar o retorno esperado e variância do valor da carteira operando a estratégia de portfólio de proporção constante com segurança. O valor da carteira no próximo período resultante da alocação do fluxo de caixa e_t em renda variável e $(V_t - e_t)$ em renda fixa é dado por $V_{t+1} = e_t * (1 + R_{p,t+1}) + (V_t - e_t) * \left(1 + R_f\right)$. E pode ser expresso na forma de retorno[1] como:

$$\frac{V_{t+1}-V_t}{V_t} = R_f + m * \left[\frac{V_t - \frac{G_0*\left(1+r_{mín}\right)^{(T-t_0)}}{\left(1+R_f\right)^{(T-t)}}}{V_t}\right](R_{p,t+1} - R_f). \tag{3}$$

Ou ainda, em (3) usando (1.1) e fazendo $\left[\frac{m*C_t}{V_t}\right] = \frac{e_t}{V_t} = y$, representando a proporção da riqueza alocada em renda variável em relação a dotação total, temos:

$$R_{V_{t+1}} = R_f + y * (R_{p,t+1} - R_f). \tag{3'}$$

[1] A partir da equação do valor da carteira 1 período a frente (1.4), colocando em evidência e_t e substituindo o fluxo de caixa alocado no ativo com exposição determinado pelas equações (1.1), (1.2) e (1.3), depois dividindo os dois lados da igualdade pelo valor da carteira no período corrente.

Conforme a teoria tradicional de alocação de capital entre renda fixa e renda variável (BODIE; KANE; MARCUS, 2014) o retorno da carteira é proporcional a parcela da dotação alocada no portfólio de ativos de risco e ao excesso de retorno do ativo com exposição.

O retorno esperado e a variância do valor da carteira no CPPI condicional a informação no período corrente, onde conhecemos o valor da carteira e fluxo de caixa excedente em relação ao valor meta desejado descontado para alocação em ativos de risco, são dados por:

$$E[R_{V_{t+1}}|I_t] = R_f + m * \left[\frac{V_t - \frac{G_0*(1+r_{mín})^{(T-t_0)}}{(1+R_f)^{(T-t)}}}{V_t}\right](E[R_{p,t+1}|I_t] - R_f); \quad (4)$$

$$VAR[R_{V_{t+1}}|I_t] = m^2 * \left[\frac{V_t - \frac{G_0*(1+r_{mín})^{(T-t_0)}}{(1+R_f)^{(T-t)}}}{V_t}\right]^2 VAR[R_{p,t+1}|I_t]. \quad (5)$$

Assim o retorno esperado da estratégia CPPI aumenta quanto maior for o excesso de retorno do portfólio de renda variável em relação ao ativo livre de risco; quanto maior o valor da carteira em excesso ao valor meta de segurança descontado; e quanto maior o multiplicador *m*, que estabelece o percentual do fluxo de caixa excedente ao piso que vai ser alocado em renda fixa. Por outro lado, o risco da carteira aumenta com maior variância do retorno do ativo com exposição e quanto maior o multiplicador *m*.

Seja a alocação do ativo com exposição pela equação (1.1), então podemos reescrever o risco e retorno da estratégia CPPI como:

$$E[R_{V_{t+1}}|I_t] = R_f + m * \left(\frac{C_t}{V_t}\right)(E[R_{p,t+1}|I_t] - R_f); \quad (4')$$

$$VAR[R_{V_{t+1}}|I_t] = m^2 * \left(\frac{C_t}{V_t}\right)^2 VAR[R_{p,t+1}|I_t]. \quad (5')$$

Considerando restrição a operações de venda a descoberto e sem alavancagem com empréstimo, usando o resultado da equação (2) temos:

$$E[R_{V_{t+1}}|I_t] = \begin{cases} R_f, se\ V_t \leq \frac{G_0 * (1 + r_{mín})^{(T-t_0)}}{(1+R_f)^{(T-t)}}; \\ R_f + m * \left(\frac{C_t}{V_t}\right)(E[R_{p,t+1}|I_t] - R_f), se\ V_t > \frac{G_0 * (1 + r_{mín})^{(T-t_0)}}{(1+R_f)^{(T-t)}}; \\ E[R_{p,t+1}|I_t], se\ m * \left(V_t - \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}\right) \geq V_t. \end{cases} \quad (4'')$$

$$VAR[R_{V_{t+1}}|I_t] = \begin{cases} 0,\ se\ V_t < \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}; \\ m^2 * \left(\frac{C_t}{V_t}\right)^2 VAR[R_{p,t+1}|I_t],\ se\ V_t > \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}; \\ VAR[R_{p,t+1}|I_t],\ se\ m * \left(V_t - \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}\right) \geq V_t. \end{cases} \quad (5'')$$

A escolha do multiplicador *m* afeta o risco e retorno na carteira de renda fixa e renda variável. Temos diferentes abordagens possíveis de função objetivo para escolha do valor do multiplicador ótimo, como maximização da razão de Sharpe e outras medidas de desempenho de carteiras de investimento obtidas com base no retorno e risco.

2.1 Otimização do CPPI com Utilidade Média Variância

Considerando investidor com utilidade média variância, crescendo no retorno esperado da carteira e penalizando o ganho da alternativa de investimento pelo risco, $U(E[R_{V_{t+1}}|I_t], VAR[R_{V_{t+1}}|I_t]) = E[R_{V_{t+1}}|I_t] - \frac{1}{2} * A * \sigma^2_{R_{V_{t+1|t}}}$. A utilidade média variância descreve as preferências do investidor por risco e retorno pelo critério média variância, considerando um agente com coeficiente de aversão ao risco descrito pelo coeficiente *A*, maior aversão ao risco descreve um investidor que penaliza em maior magnitude o retorno frente o risco incorrido.

Proposição. *O multiplicador que maximiza a utilidade média variância do retorno da carteira na estratégia CPPI é dado por:*

$$m_{t+1|t} = \left(\frac{V_t}{C_t}\right)\left[\frac{(E[R_{p,t+1}|I_t] - R_f)}{A * \sigma^2(R_{p,t+1}|I_t)}\right]. \tag{6}$$

<u>Demonstração</u>: Usando (4’) e (5’) na utilidade esperada, o problema da escolha do multiplicador *m* ótimo que maximiza a utilidade esperada do retorno da carteira durante o horizonte de planejamento do investimento a frente é dado por:

$$\max_{\{m_{t+1|t}\}} U = R_f + m * \left(\frac{C_t}{V_t}\right)(E[R_{p,t+1}|I_t] - R_f) - \frac{1}{2} * A * m^2 * \left(\frac{C_t}{V_t}\right)^2 \sigma^2(R_{p,t+1}|I_t)$$

A solução deste problema é pela condição de primeira ordem, sendo a função objetivo estritamente concava para $A > 0$. Então, $m_{t+1|t} = \frac{\left(\frac{C_t}{V_t}\right)(E[R_{p,t+1}|I_t]-R_f)}{A*\left(\frac{C_t}{V_t}\right)^2 \sigma^2(R_{p,t+1}|I_t)} = \left(\frac{V_t}{C_t}\right)\frac{(E[R_{p,t+1}|I_t]-R_f)}{A*\sigma^2(R_{p,t+1}|I_t)}$. ■

Considerando a restrição da equação (2), $e_t = Máx\{Mín\{m * C_t; V_t\}; 0\}$, temos a alocação no ativo com exposição a cada período dada por:

$$e_t = \begin{cases} 0,\ se\ V_t < \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}; \\ 0,\ se\ V_t > \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}\ e\ E[R_{p,t+1}|I_t] < R_f; \\ V_t * \left[\frac{(E[R_{p,t+1}|I_t]-R_f)}{A*\sigma^2(R_{p,t+1}|I_t)}\right],\ se\ V_t > \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}\ e\ E[R_{p,t+1}|I_t] > R_f; \\ V_t,\ se\ V_t * \left[\frac{(E[R_{p,t+1}|I_t]-R_f)}{A*\sigma^2(R_{p,t+1}|I_t)}\right] * \left(V_t - \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}\right) \geq V_t. \end{cases} \tag{7}$$

Se o valor da carteira for menor que o piso toda alocação vai ser feita em renda fixa. Se o valor da carteira for maior que o piso mas o retorno esperado do ativo com exposição for inferior a taxa de juros livre de risco toda a alocação vai ser novamente em renda fixa. Apenas se o valor da carteira for maior que o piso e o retorno esperado do mercado de ações for maior que a taxa de juros livre de risco haverá investimento no mercado de ações.

O investimento no ativo com exposição é diretamente proporcional ao prêmio pelo risco do ativo com exposição e ao valor da carteira, por outro lado é inversamente proporcional a variância e coeficiente de aversão ao risco.

2.2 CPPI que Maximiza a Razão de Sortino

Na alocação de capital numa carteira com ativos de risco e renda fixa uma função objetivo de referência é maximizar a razão de Sharpe, que permite maior eficiência dos investimentos com maior excesso de retorno por unidade de risco. Sendo a razão de Sharpe o excesso de retorno da carteira em relação a taxa de juros livre de risco dividido pelo desvio padrão.

$$SR(R_c) = \frac{E[R_c] - R_f}{\sigma(R_c)}$$

No caso de uma carteira de renda fixa e renda variável operando a estratégia CPPI o desvio padrão e retorno são proporcionais ao multiplicador *m*, portanto o índice de Sharpe não depende do multiplicador.

A razão de Sortino é uma medida de retorno ajustado pelo risco alternativa a Razão de Sharpe, considerando o excesso de retorno em relação a um retorno meta de referência e o risco pelo downside risk, $DR = \sqrt{\frac{\sum_t^T Min\{R_{v,t} - R_{min}; 0\}^2}{T}}$, de forma que apenas retornos abaixo do retorno mínimo meta representariam risco.

$$SoR = \frac{E[R_{v,t}] - R_{min}}{DR}$$

A estratégia CPPI tem uma distribuição dos retornos assimétrica, não sendo adequado aplicar o desvio padrão como medida de risco. Como o CPPI tem um valor mínimo de referência meta no vencimento, G_T , apenas retornos abaixo do retorno médio mínimo meta representariam risco a carteira de investimentos; enquanto retorno maiores que o retorno mínimo meta representariam segurança da estratégia em entregar valor superior ao de referência no vencimento.

Seja o problema de escolher o multiplicador *m* que maximiza a Razão de Sortino da carteira pela alocação de capital entre renda fixa e renda variável, operando a estratégia CPPI: $\max_{\{m_t\}} SoR\left(R_{V_{t+1}}\right), s.a.\ e_t = Máx\{Mín\{m_t * C_t; V_t\}; 0\}.$

Proposição: *O multiplicador da estratégia CPPI que maximiza a razão de Sortino do retorno da carteira a cada instante de tempo é:*

$$m_{t+1|t} = \begin{cases} 0, se\ E[R_{p,t+1}|I_t] \leq R_f; \\ \infty, se\ E[R_{p,t+1}|I_t] > R_f. \end{cases} \quad (8)$$

<u>Demonstração</u>: Supondo investidor avesso ao risco maximizador de utilidade esperada e sem operação de venda a descoberto, com retorno esperado do ativo com exposição maior que do ativo livre de risco o agente investe em renda variável. Com rebalanceamento em tempo contínuo e processo sem saltos, todos os retornos da carteira sob a estratégia CPPI seriam maiores que o retorno mínimo de referência, com Downside Risk tendendo a zero e razão de Sortino tendendo ao infinito.

Considerando o valor meta mínimo da carteira como um percentual do valor inicial da carteira, $G_T = p * V_0$, o retorno meta mínimo atenderia a condição $V_0 * (1 + r_{mín})^{(T-t_0)} = p * V_0$ sendo $r_{mín} = [p]^{1/(T-t_0)} - 1$. Em que, se $p < 1$ então $r_{mín} < 0$.

Sob rebalanceamento não contínuo e $E[R_p] > R_f$, a estratégia CPPI terá retornos esperados maiores ou iguais ao retorno meta mínimo, apresentando Dowside Risk tendendo a ser cada vez menor quanto maior a frequência de rebalanceamento. Comparando o CPPI com mesma frequência de rebalanceamento para dois multiplicadores m' > m, com m' = m + δ para δ não nulo e suficientemente pequeno, tendem a ter o mesmo Dowside Risk; porém quanto maior o multiplicador maior o retorno esperado. Desta forma a maximização da Razão de Sortino ocorre com o maior multiplicador possível.

Tendo como função objetivo o índice de Sortino, supondo o retorno esperado dos ativos de risco superior a taxa de juros livre de risco, bem como superior ao retorno meta mínimo, como $e_t = m * C_t$ então quanto maior possível *m* resulta em maior e_t e o excesso de retorno penalizado pelo Downside Risk.

Sob rebalanceamento discreto e sem venda a descoberto, se $E[R_p] < R_f$, o valor da carteira que aloca parte da dotação em renda variável será menor que o retorno da renda fixa com queda do valor da carteira até que se iguale ao piso e a regra do CPPI aloque toda dotação em renda fixa. Nesse caso o investidor tem maior retorno e menor risco operando apenas renda fixa equivalente a operar com multiplicador nulo.

Para este caso, considerando os retornos da renda fixa estritamente positivos e valor meta de referência no vencimento menor que o valor da carteira inicial, o retorno meta mínimo será negativo e consequentemente o Downside Risk tende a zero e a razão de Sortino tende para infinito. ■

O CPPI com multiplicador infinito se torna uma regra de stop-loss, que investe toda dotação no ativo com exposição e encerrando a posição de investimento e destinando para renda fixa a totalidade dos recursos sempre que o valor da carteira se iguala ao piso (BLACK; PEROLD, 1992). O CPPI com multiplicador que maximiza a razão de Sortino é uma abordagem de stop loss modificada, saindo do ativo com exposição sempre que o valor da carteira se torna menor ou igual ao piso e/ou o retorno da renda fixa supera do ativo com exposição.

Desta forma a alocação de riqueza no ativo com exposição na estratégia CPPI que maximiza a Razão de Sortino é:

$$e_t = \begin{cases} 0, se\ V_t \leq \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}; \\ 0, se\ V_t > \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}\ e\ E[R_{p,t+1}|I_t] \leq R_f; \\ V_t, se\ V_t > \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}\ e\ E[R_{p,t+1}|I_t] > R_f. \end{cases} \quad (9)$$

2.3 CPPI que Minimiza o Valor em Risco

No CPPI o valor da carteira que excede o piso definido por um multiplicador é alocado no ativo com exposição, se beneficiando da alta do mercado e com objetivo de entregar uma rentabilidade acumulada mínima de referência. Quanto maior o multiplicador maior o retorno esperado e maior o risco. Porém se ocorre uma queda rápida e acentuada no mercado de ações não tem tempo para balancear a carteira para o ativo livre de risco, com a regra do CPPI entregando para o investidor um valor da carteira abaixo do piso de segurança (ARDIA; BOUDT; WAUTERS, 2016).

Podemos formular o multiplicador do CPPI baseado no valor em risco, aqui consideramos que o multiplicador deve ser o suficiente para entregar o valor mínimo de rentabilidade acumulada de referência frente a perda máxima esperada do valor em risco para o próximo período. Desta forma temos o problema do multiplicador que minimiza o valor em risco da carteira sujeito a que a rentabilidade no próximo período seja maior ou igual ao valor do piso.

$$\min_{\{m\}} VaR\left[R_{V_{t+1}}(m)\right]_{1-\alpha\%} s.a. V_t(1 + R_{V_{t+1}}(m)) \geq \frac{G_T}{\left(1 + R_f\right)^{T-(t+1)}}$$

Proposição: *O multiplicador que minimiza o valor em risco da carteira operando a estratégia CPPI, sujeito a restrição que o valor da carteira no próximo período seja maior ou igual ao valor presente descontado do montante desejado na data de vencimento é:*

$$m_{t+1|t} = \frac{\left(1 + R_f\right)}{|Z_\alpha|\sigma[R_{p,t+1}|I_t] - (E[R_{p,t+1}|I_t] - R_f)}. \tag{10}$$

<u>Demonstração</u>: A solução deste problema é caracterizada por restrição ativa com igualdade, pois o retorno e desvio padrão do valor da carteira são proporcionais a *m*.

$$V_t(1 + VaR\left[R_{V_{t+1}}(m)\right]_{1-\alpha\%}) = \frac{G_T}{\left(1 + R_f\right)^{T-(t+1)}}.$$

Sendo *m* que minimiza o valor em risco da carteira em relação ao valor da carteira meta desejado expresso $m_{t+1|t} = \frac{\left[\frac{G_T(1+R_f)}{\left(1+R_f\right)^{(T-t)}} - V_t(1+R_f)\right]}{C_t(E[R_{p,t+1}|I_t]-R_f)-|Z_\alpha|C_t\sigma[R_{p,t+1}|I_t]}$. Essa solução pode ser reescrita.

Como via de regra $\sigma[R_{p,t+1}|I_t] > [R_{p,t+1}|I_t] - R_f$ e para os níveis de confiança relevantes (99%, 95%) $|Z_\alpha| > 1$, então o denominador da expressão é negativo; e $V_t > \frac{G_T}{\left(1+R_f\right)^{(T-t)}}$, pois o valor em risco está relacionado a uma carteira com exposição que opera ativos arriscados, que pela regra do CPPI ocorre quando o valor da carteira é maior que o piso no período corrente, o numerador também é negativo. Então podemos reescrever o multiplicador conforme $\frac{\left[V_t(1+R_f)-\frac{G_T(1+R_f)}{\left(1+R_f\right)^{(T-t)}}\right]}{C_t(E[R_{p,t+1}|I_t]-R_f)-|Z_\alpha|C_t\sigma[R_{p,t+1}|I_t]} = \frac{C_t(1+R_f)}{C_t(E[R_{p,t+1}|I_t]-R_f)-|Z_\alpha|C_t\sigma[R_{p,t+1}|I_t]}$, cancelando o termo comum do numerador e denominador chegamos a equação (10). ∎

Pelo multiplicador do CPPI que minimiza o valor em risco, temos: (i) quanto maior o retorno esperado do ativo com exposição em relação a seu desvio padrão, aumenta o multiplicador; (ii) maior volatilidade e coeficiente de confiança do VaR, tudo o mais constante, diminuem o multiplicador.

Incorporando a esta regra a restrição a operações de venda a descoberto e sem empréstimo, temos:

$$e_t = \begin{cases} 0, se\ V_t \leq \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}; \\ 0, se\ V_t > \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}\ e\ E[R_{p,t+1} - R_f|I_t] > |Z_\alpha|\sigma[R_{p,t+1} - R_f|I_t]; \\ \left[\frac{(1+R_f)}{|Z_\alpha|\sigma[R_{p,t+1}-R_f|I_t]-(E[R_{p,t+1}|I_t]-R_f)}\right] * C_t, se\ V_t \geq \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}\ e\ E[R_{p,t+1}|I_t] - R_f < |Z_\alpha|\sigma[R_{p,t+1}|I_t]; \\ V_t, se\ V_t > \frac{G_T}{(1+R_f)^{(T-t)}}\ \ e\ \left[\frac{(1+R_f)}{|Z_\alpha|\sigma[R_{p,t+1}-R_f|I_t]-(E[R_{p,t+1}|I_t]-R_f)}\right] C_t > V_t. \end{cases} \tag{11}$$

O multiplicador apresentado minimiza no período corrente o valor em risco da carteira no próximo período estar abaixo do valor presente descontado do valor mínimo de segurança, difere da abordagem do CPPI baseado em valor em risco de Jiang, Ma e An (2009) que propõe um multiplicador baseado na diferença entre o valor da carteira e o valor mínimo meta no vencimento, utilizando tempo contínuo na estrutura do modelo de BlackSholes. A abordagem que propomos é mais simples, por analisar um problema em tempo discreto; e baseada em otimização a cada período, permitindo resposta a atualização do valor em risco e aos movimentos do mercado.

Se o retorno da carteira é maior que o desvio padrão multiplicado pelo quantil da distribuição dos retornos o multiplicador fica com sinal negativo, considerando a restrição a operação de venda a descoberto a alocação de fluxo de caixa no ativo com exposição se torna zero. Retorno maior que o desvio padrão multiplicado por $|Z_\alpha|$ representaria uma situação de valor em risco, que representa a perda máxima esperada com (1-α)% de probabilidade, na forma de ganho. O multiplicador que minimiza o valor em risco venderia a posição com exposição para realizar ganho.

O multiplicador do CPPI que minimiza o valor em risco é definido pela razão do ganho da renda fixa sobre o valor em risco da carteira. Considerando 1 período de tempo para rebalanceamento temos a previsão do valor em risco 1 período a frente como na equação 10, porém com rebalanceamento após h períodos avaliamos o ganho da renda fixa sobre o valor em risco esperado por h períodos a frente, expresso por:

$$m_{t+h|t} = \frac{(1 + R_{f[t,t+h]})}{|Z_\alpha|\sigma[R_{p,t+1}|I_t]\sqrt{(h-t)} - \{E[R_{p,t+1}|I_t] * (h-t) - R_{f[t,t+h]}\}}. \tag{10'}$$

Onde $R_{f[t,t+h]}$consiste no retorno acumulado da renda fixa entre o período t até t+h e Z_α é o quintil da distribuição normal padrão associado ao nível de confiança (1-α)% (nível de significância de α%).

2.4 Minimização do Vega na Estratégia CPPI

Uma das principais críticas ao CPPI é que a estratégia é caracterizada por ter *vega* negativo, ou seja, aumentos de volatilidade reduzem o valor da carteira (BERTRAND; PRIGENT, 2005). A estratégia CPPI com multiplicador constante aumenta a posição com exposição na alta do mercado de ações e reduz a posição com queda, desta forma operando esta estratégia pode-se comprar ativos de risco na alta e vender na baixa, reduzindo o valor da carteira em momentos de maior volatilidade.

O *vega* é referência entre as gregas na literatura de opções, mensurando a variação do valor do derivativo frente ao aumento da volatilidade do ativo subjacente. Podemos definir o multiplicador *m* que minimiza a variação do valor esperado do retorno da carteira na estratégia CPPI frente a variações da volatilidade, $\frac{\partial E[R_{V_{t+1}}|I_t]}{\partial \sigma(R_{p,t+1}|I_t)}$.

Proposição: O multiplicador do CPPI que minimiza variações do valor esperado da carteira em relação a variações de volatilidade é dado por:

$$m = \left(\frac{V_t}{C_t}\right) \frac{\sigma(R_{V_{t+1}}|I_t)}{\sigma(R_{p,t+1}|I_t)}. \tag{12}$$

<u>Demonstração</u>: Seja o retorno esperado e variância da carteira com renda variável e renda fixa na estratégia CPPI, conforme as equações (4') e (5'). O desvio padrão do retorno da carteira é:

$$\sigma(R_{V_{t+1}}|I_t) = m * \left(\frac{C_t}{V_t}\right) * \sigma(R_{p,t+1}|I_t). \tag{13}$$

Desta relação podemos escrever $m * \left(\frac{C_t}{V_t}\right) = \frac{\sigma(R_{V_{t+1}}|I_t)}{\sigma(R_{p,t+1}|I_t)}$, substituindo em (4') chegamos a uma relação retorno e risco da equação da linha de alocação de capital da teoria do portfólio.

$$E[R_{V_{t+1}}|I_t] = R_f + \frac{(E[R_{p,t+1}|I_t] - R_f)}{\sigma(R_{p,t+1}|I_t)} \sigma(R_{V_{t+1}}|I_t). \tag{14}$$

O multiplicador que minimiza o *vega* da carteira na estratégia CPPI pode ser aproximado pela derivada implícita da linha de alocação de capital em relação a volatilidade do retorno do ativo com exposição.

$$\frac{\partial E[R_{V_{t+1}}|I_t]}{\partial \sigma(R_{p,t+1}|I_t)} = -(1) \frac{E[R_{p,t+1} - R_f|I_t]}{\sigma(R_{p,t+1}|I_t)^2} \sigma(R_{V_{t+1}}|I_t) + \frac{E[R_{p,t+1} - R_f|I_t]}{\sigma(R_{p,t+1} - R_f|I_t)} \frac{\partial \sigma(R_{V_{t+1}}|I_t)}{\partial \sigma(R_{p,t+1}|I_t)} \tag{15}$$

De (13), temos $\frac{\partial \sigma(R_{V_{t+1}}|I_t)}{\partial \sigma(R_{p,t+1}|I_t)} = m * \left(\frac{C_t}{V_t}\right)$. (16)

Substituindo (16) no segundo termo de (15), temos:

$$\frac{\partial E[R_{V_{t+1}}|I_t]}{\partial \sigma(R_{p,t+1}|I_t)} = -(1) \frac{E([R_{p,t+1}|I_t] - R_f)}{\sigma(R_{p,t+1}|I_t)^2} \sigma(R_{V_{t+1}}|I_t) + \frac{(E[R_{p,t+1}|I_t] - R_f)}{\sigma(R_{p,t+1}|I_t)} m * \left(\frac{C_t}{V_t}\right) \tag{17}$$

No ponto de mínimo *vega*, estamos num ponto crítico, portanto $\frac{\partial E[R_{V_{t+1}}|I_t]}{\partial \sigma(R_{p,t+1}|I_t)} = 0$. A derivada parcial positiva iria aumentar a variação do retorno esperado com a volatilidade, e se negativa aumentaria as perdas esperadas com aumento do risco. Então de (17) o multiplicador que minimiza o *vega* na estratégia CPPI é dado por:

$$m = \left(\frac{V_t}{C_t}\right) \left[\frac{\sigma(R_{V_{t+1}}|I_t)}{\sigma(R_{p,t+1}|I_t)}\right] \qquad \blacksquare$$

O multiplicador aumenta quanto mais a volatilidade projetada do retorno da carteira para o próximo período se aproximar da previsão volatilidade do ativo com exposição, como em momentos de elevado risco sistêmico quando o risco de todos os ativos de diferentes classes aumenta. O multiplicador diminui quanto maior a previsão do risco do ativo com exposição em relação ao risco da carteira. Maior valor corrente da carteira em relação ao colchão também eleva o multiplicador.

Considerando a restrição de operação de venda a descoberto e alavancagem, o fluxo de caixa aportado no ativo com exposição na estratégia CPPI que minimiza perdas do retorno da carteira frente a aumentos de volatilidade é:

$$
e_t = \begin{cases} 0, se\ V_t \leq \dfrac{G_T}{\left(1+R_f\right)^{(T-t)}}\ e\ E[R_{p,t+1}|I_t] \leq\ R_f; \\ 0, se\ V_t > \dfrac{G_T}{\left(1+R_f\right)^{(T-t)}}\ e\ E[R_{p,t+1}|I_t] \leq\ R_f; \\ V_t \dfrac{\sigma(R_{V_{t+1}}|I_t)}{\sigma\left(R_{p,t+1}|I_t\right)}, se\ V_t > \dfrac{G_T}{\left(1+R_f\right)^{(T-t)}}\ e\ E[R_{p,t+1}|I_t] >\ R_f; \\ V_t, se\ \left(\dfrac{V_t}{C_t}\right) \dfrac{\sigma(R_{V_{t+1}}|I_t)}{\sigma\left(R_{p,t+1}|I_t\right)} * C_t \geq V_t\ e\ \ E[R_{p,t+1}|I_t] >\ R_f. \end{cases} \tag{18}
$$

A carteira com ativo livre de risco e ativos arriscados tem sua alocação sobre a linha de alocação de capital, ocorrendo aporte em renda variável apenas quando o retorno esperado é maior que a taxa de juros livre de risco, caso contrário toda a dotação de riqueza é destinada ao ativo sem exposição.

Uma interpretação possível da linha do mercado de capitais é que o retorno de uma carteira eficiente é a taxa de juros livre de risco somada ao preço de risco de mercado (razão de Sharpe) multiplicado pela quantidade de risco. Tudo o mais constante, um aumento da volatilidade do ativo com exposição diminui o “preço do risco de mercado”, uma forma de proteger o valor da carteira seria aumentar a “quantidade de risco” - a posição no ativo com exposição.

Na literatura de *asset pricing* o retorno esperado dos ativos em equilíbrio tem diferentes determinantes: pelo beta no CAPM, fator estocástico de desconto no CAPM consumo ou pela exposição a um conjunto de fatores de risco nos modelos multifatoriais/APT. Dado o retorno esperado do portfólio de ativos de risco, o investidor aumenta a sua posição em ativo com exposição quando a volatilidade aumenta e o preço do risco de mercado cai, tudo o mais constante, para manter a rentabilidade de sua carteira que tem maior retorno esperado em renda variável que na renda fixa.

A implementação do multiplicador que minimiza o vega na estratégia CPPI, precisa de uma informação indisponível no período inicial que é $\sigma(R_{V_1}|I_0)$ que depende da volatilidade do retorno projetado fora da amostra da carteira operando a estratégia CPPI. O agente só opera ativos arriscados se o retorno esperado do ativo com exposição é maior que a taxa de juros livre de risco. Uma combinação convexa de renda fixa e renda variável como a alocação do CPPI, sem operação de venda a descoberto e alavancagem, tem retorno esperado entre a taxa de juros livre de risco e o retorno do ativo com exposição. Portanto ao operar a estratégia CPPI com alocação na renda variável o retorno projetado deve estar situado entre o retorno esperado do ativo com exposição e a taxa de juros livre de risco.

Para a inicialização podemos empregar o desvio padrão do retorno da carteira pela raiz da variância dos ganhos (upside risk) do retorno do ativo de renda variável em relação a taxa de juros livre de risco numa janela de K observações históricas, $\sigma(R_{V_1}|I_0) = \sqrt{\sum_{j=1}^{K} \frac{Máx\{R_{p,t-j} - R_f\,;0\}^2}{K}}$. Esta mesma estimativa do risco de upside amostral poderia ser empregada a cada período, $\sigma(R_{V_{t+1}}|I_t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{K} \frac{Máx\{R_{p,t-j} - R_f;0\}^2}{K}}$. Alternativamente podemos utilizar o risco de upside ponderado exponencialmente com constante de suavização $0 <$

$\lambda < 1$, dos retornos da carteira após a inicialização: $\sigma(R_{V_{t+1}}|I_t) = \sqrt{\lambda\sigma(R_{V_t}|I_t)^2 + (1-\lambda)Máx\{R_{p,t} - R_f; 0\}^2}$.

De acordo com o multiplicador que minimiza a variação do retorno esperado da carteira CPPI em relação a alterações da variância do ativo com exposição nesta abordagem de implementação empírica com o risco de upside, os aportes no ativo com exposição aumentam quando maior o risco de upside do CPPI em relação ao risco do ativo com exposição. Quanto maior o risco de upside em relação ao risco do mercado de ações maior o volume de aportes no ativo de risco. Quanto maior o risco em renda variável sem ser acompanhado de expectativa de recuperação pelo upside, menor o multiplicador do CPPI.

Como o desvio padrão inclui tanto o risco de upside quanto de downside, a razão do risco de upside sobre o desvio padrão tende a ser inferior a unidade, enviesando o multiplicador para baixo. Podemos fazer um ajuste, considerando que o risco relevante para o investidor em renda variável seja o downside risk, desta forma o multiplicador ajustado seria a razão do upside risk da carteira na estratégia CPPI em relação ao downside risk do ativo com exposição.

Proposição: O multiplicador do CPPI de mínimo Vega ajustado é dado por:

$$m = \left(\frac{V_t}{C_t}\right)\frac{UR(R_{V_{t+1}}|I_t)}{DR(R_{p,t+1}|I_t)} \tag{12'}$$

Onde $UR(R_{V_{t+1}}|I_t)$ é o upside risk da carteira CPPI em relação a taxa de juros livre de risco; e $DR\big(R_{p,t+1}|I_t\big)$ é downside risk da renda variável em relação a taxa de juros livre de risco.

Quanto maior o upside risk da carteira em relação ao downside risk do ativo com exposição maior o multiplicador. Quando a distribuição condicional dos retornos é simétrica, com expectativa do upside risk igual ao downside risk o multiplicador é dado pela razão do valor da carteira sobre o piso. Quanto menor o upside risk da carteira em relação ao downside risk do ativo com exposição menor o multiplicador.

Empiricamente iremos estimar o risco de upside ponderado exponencialmente com constante de suavização $0 < \lambda < 1$, dos retornos da carteira após a inicialização: $UR(R_{V_{t+1}}|I_t) = \sqrt{\lambda UR(R_{V_t}|I_t)^2 + (1-\lambda)Máx\{R_{p,t} - R_f; 0\}^2}$. Enquanto o risco de downside do ativo com exposição será estimado por $DR(R_{p_{t+1}}|I_t) = \sqrt{\lambda DR(R_{p_t}|I_t)^2 + (1-\lambda)Mín\{R_{p,t} - R_f; 0\}^2}$.

3 Descrição do Estudo Empírico

Para a análise de desempenho do CPPI com abordagens de otimização vamos usar o IBOVESPA para representar o ativo com exposição e o CDI como ativo livre de risco. Os dados do Ibovespa e CDI são para 23 anos, entre o primeiro dia útil de 2000 e o último dia útil de 2022. O IBOVESPA é um índice das ações mais negociadas na bolsa, um índice com preços ajustados para desdobramento, agrupamento e proventos, o investidor manteria uma carteira com os ativos pertencentes ao índice e na mesma composição da carteira. A taxa DI reflete o custo de oportunidade de curto prazo, pela taxa média das operações de crédito de 1 dia entre instituições financeiras no mercado interbancário.

No mercado brasileiro ações não pagam imposto sobre ganho de capital, se os ganhos com operação em bolsa forem menores que R$20 mil mensais, e para qualquer valor os dividendos e juros sobre capital próprio não pagam impostos. Consideramos que o investidor opera um volume de recursos de forma que em nenhum mês realiza ganhos de capital superiores a R$20 mil. No mercado financeiro brasileiro várias corretoras não cobram taxa de corretagem. A análise em renda variável não incorpora impostos no investimento do ativo com exposição e incorre apenas nas taxas de liquidação e negociação da B3 no valor de 0,03% do valor comprado/vendido, com taxa de corretagem zero.

Para a renda fixa consideramos que o investidor opera títulos de curto prazo com vencimento em 1 mês, sempre no último dia útil do mês, com rentabilidade pós-fixada em 100% do DI. Nesse caso, quando avaliarmos o desempenho com impostos ocorrerá a alíquota de 22,50% sobre os juros da operação de renda fixa. Avaliamos a alíquota de imposto de renda fixa com a maior carga tributária, todas operações com prazo maior de 6 meses incorrem em alíquota decrescente que chega até 15% para prazos maiores que 2 anos.

Comparamos o desempenho do CPPI padrão e com diferentes abordagens de otimização: CPPI com multiplicador que maximiza a utilidade esperada (UCPPI); CPPI com multiplicador que maximiza a razão de Sortino (SorCPPI); CPPI com multiplicador que minimiza o valor em risco (VaRCPPI); CPPI com multiplicador que minimiza a variação esperada do retorno em relação a alteração da volatilidade (VegaCPPI) e Vega CPPI ajustado para relação de risco de upside sobre downside (AdjVegaCPPI).

As abordagens de otimização do CPPI estão associadas a multiplicadores variantes no tempo, que em dois casos dependem de parâmetros. No CPPI com multiplicador que maximiza a utilidade esperada consideramos os casos de menor a maior aversão ao risco, com coeficiente de aversão ao risco (A) com os valores 2, 3 e 4. No CPPI com multiplicador que minimiza o valor em risco consideramos os coeficientes de confiança de 95%, 98% e 99%.

Avaliamos o desempenho do CPPI considerando horizonte de investimento pelo prazo de 1 ano, porém com rebalanceamento das alocações entre renda fixa e variável com frequência mensal para as abordagens de otimização. Adotamos frequência mensal para rebalanceamento porque o investimento de renda fixa para operações de curtíssimo prazo é fortemente penalizado com impostos no mercado brasileiro, com incidência do IOF que começa com alíquota de 96% sobre os rendimentos para operações de 1 dia e que mesmo após 15 dias ainda é 50%. Apenas a partir do 30º dia a alíquota de IOF sobre os rendimentos de renda fixa cai para zero.

O CPPI tem uma distribuição de probabilidade assimétrica, tornando inadequado a avaliação de performance com medidas baseadas em média e variância, que estão associadas a distribuições simétricas. Além de considerar a média e desvio padrão, avaliamos o valor da carteira CPPI nas diferentes abordagens nos quartis de 25%, 50% e 75%.

Adotamos como métrica de desempenho das carteiras baseadas no CPPI a razão ômega, que avalia a razão do ganho médio acima de um limiar sobre a perda média abaixo do mesmo limiar. A referência de limiar foi o valor mínimo meta da carteira sobre o CPPI ao final do horizonte de investimento (L=V0*p), uma vez que esse é um valor de referência para a carteira. A razão ômega é expressa por:

$$\Omega = \frac{E[Máx\{V_t - L; 0\}]}{E[Máx\{L - V_t; 0\}]} \;=>\; \Omega_{CPPI} = \frac{E[Máx\{V_t - \mathrm{V}_0 * \mathrm{p}; 0\}]}{E[Máx\{\mathrm{V}_0 * \mathrm{p} - V_t; 0\}]}.$$

O ômega também pode ser interpretado como a razão do prêmio de uma opção de compra sobre o prêmio de uma opção de venda, com ativo objeto a carteira de investimentos e para o mesmo preço de exercício (KAZEMI; SCHNEEWEIS; GUPTA, 2004). A razão ômega está relacionada a aversão a perda (BETRAND, PRIGENT, 2011) sendo uma medida de retorno sobre risco que utiliza o *downside risk*. A razão Omega é aplicável a amplas classes de ativos e carteiras de investimentos sem depender de retorno do portfólio acima da taxa de juros livre de risco para ranquear alternativas de investimento, por outro lado a razão de Sharpe e Sortino enquanto medidas de retorno penalizado pelo risco são mal comportadas para ativos com performance abaixo da taxa de juros livre de risco (ISRAELSEN, 2005) pois neste caso as alternativas de maior risco e menor retorno podem obter melhor indicador de desempenho.

O desempenho do CPPI foi estudado ao longo do horizonte de investimento de 1 ano e entre os rebalanceamentos mensais. Consideramos que o investidor começa investindo R$100 no primeiro dia do ano operando a estratégia até o final do ano quando realiza ganho/perda e no primeiro dia do ano seguinte volta a aportar o valor de R$100 até o último dia do próximo ano. Assim podemos estudar o desempenho médio homogeneizado da estratégia pelo prazo de 1 ano, reduzindo a influência de um resultado atípico de um ano sobre o resultado do ano seguinte. Além do desempenho anual, a evolução do valor da carteira ao longo dos rebalanceamento periódicos permite avaliar o controle de risco entre as variações das cotações e resposta do algoritmo a volatilidade de mercado ao longo do tempo.

A razão Ômega foi utilizada tanto para o valor da carteira mensal pelo horizonte de investimento de 1 ano, quanto pelo valor do retorno anual nos 23 anos da amostra de avaliação de desempenho.

Inicialmente avaliamos o CPPI padrão em condições ideais, sem custos de transação (taxas de corretagem, liquidação, registro e negociação) e impostos (IOF e IR). Considerando a análise do CPPI sem impostos de renda fixa, que são muito elevados para curtíssimo prazo, avaliamos a frequências de rebalancemento diário, semanal e mensal. Quando impostos são considerados os rendimentos de renda fixa de poucos dias são penalizados de forma importante pelo IOF, na análise com taxas e impostos consideramos rebalanceamento mensal e comparamos o CPPI com diferentes abordagens de otimização.

3.2 A Razão C/V no CPPI nas Abordagens de Baseada em Utilidade Esperada e Vega

A solução analítica do multiplicador que maximiza a utilidade esperada e minimiza o Vega da carteira dependem da razão $\left(\frac{V_t}{C_t}\right)$. A razão valor da carteira sobre o colchão representa um fator de segurança, quanto maior o valor da carteira em relação ao colchão tudo o mais constante menor a exposição a renda variável. Enquanto seu recíproco expresso pela razão $\left(\frac{C_t}{V_t}\right)$ representa um fator de exposição ao risco, pela equação do retorno e variância o retorno esperado e desvio padrão aumentam de forma proporcional a esta razão, quanto maior a razão colchão sobre valor da carteira maior a exposição a renda variável, retorno e risco tudo o mais constante.

Na implementação do CPPI baseado em utilidade esperada e no Vega temos a otimização entre o período inicial até o final do horizonte de planejamento de investimento, definimos o multiplicador ótimo dado a condição inicial e com momentos de risco e retorno que se atualizam com a chegada de informação entre os rebalanceamentos, mantendo a condição inicial da razão colchão sobre valor da carteira constante. Este recurso permite a razão valor sobre colchão com melhores propriedades: limitada, positiva e constante; trazendo estabilidade ao multiplicador; além de aproximar o resultado de otimização intertemporal.

Seja o problema de otimização que maximiza a utilidade esperada média variância sobre o rendimento acumulado do valor da carteira ao longo do horizonte de investimento do CPPI, aproximado pelo problema de definir a cada instante t o multiplicador que maximiza a utilidade esperada do rendimento acumulado da carteira do período inicial (t_0) até o instante terminal (T) dado o valor inicial da carteira e a condição inicial da proporção do colchão sobre valor da carteira.

$$\max_{\{m_{t+h|t_0}\}} U = R_f + m * \left(\frac{C_{t_0}}{V_{t_0}}\right)\left(E[R_{p,t+h}|I_{t_0}] - R_f\right) - \frac{1}{2} * A * m^2 * \left(\frac{C_{t_0}}{V_{t_0}}\right)^2 \sigma^2(R_{p,t+h}|I_{t_0}) \quad (Problema\ 1)$$

$$=> \max_{\{m_{t+h|t,V_0,C_0}\}} U = R_f + m * \left(\frac{C_0}{V_0}\right)\left(E[R_{p,t+h}|I_t] - R_f\right) - \frac{1}{2} * A * m^2 * \left(\frac{C_0}{V_0}\right)^2 \sigma^2(R_{p,t+h}|I_t)$$

$$m_{t+h|t,V_0,C_0} = \left(\frac{V_0}{C_0}\right)\frac{\left(E[R_{p,t+h}|I_t] - R_f\right)}{A * \sigma^2(R_{p,t+h}|I_t)}.$$

$$Como \left(\frac{V_0}{C_0}\right) = \frac{V_0}{V_0\left[1 - \left(\frac{p}{(1+R_f)^{(T-t)}}\right)\right]} = \frac{(1+R_f)^{(T-t)}}{\left[(1+R_f)^{(T-t)} - p\right]}, então:$$

$$m_{t+h|t,V_0,C_0} = \frac{(1+R_f)^{(T-t_0)}}{(1+R_f)^{(T-t_0)} - p} * \left[\frac{\left(E[R_{p,t+h}|I_t] - R_f\right)}{A * \sigma^2(R_{p,t+h}|I_t)}\right], onde\ t \in \{t_0, t+1, t+2, \ldots, T\}.$$

Para o multiplicador baseado em Vega definimos a cada instante o multiplicador que minimiza o Vega do rendimento acumulado da carteira do período inicial até o instante terminal, em relação ao valor da carteira inicial.

$$\min_{\{m_{t+h|t_0}\}} \frac{\partial E[R_{p,t+h}|I_{t_0}]}{\partial \sigma(R_{p,t+h}|I_{t_0})} = \min_{\{m_{t+h|t,V_0,C_0}\}} \frac{\partial E[R_{p,t+h}|I_t]}{\partial \sigma(R_{p,t+h}|I_t)} \quad (Problema\ 2)$$

$$=> m_{t+h|t,V_0,C_0} = \left(\frac{V_0}{C_0}\right)\left[\frac{\sigma(R_{V_{t+h}}|I_t)}{\sigma(R_{p,t+h}|I_t)}\right]$$

$$m_{t+h|t,V_0,C_0} = \frac{(1+R_f)^{(T-t_0)}}{(1+R_f)^{(T-t_0)} - p} * \left[\frac{\sigma(R_{V_{t+h}}|I_t)}{\sigma(R_{p,t+h}|I_t)}\right], onde\ t \in \{t_0, t+1, t+2, \ldots, T\}.$$

O resultado de interesse é sobre o rendimento acumulado sem considerar a cada instante o valor da carteira no período anterior, mas sim otimizando o retorno a cada período calculado em relação ao valor inicial da carteira e com atualização do multiplicador com as novas expectativas de risco e retorno. Dado o valor inicial da carteira e a condição inicial da alocação em renda fixa e no ativo com exposição que definem o percentual do valor da carteira sobre o colchão constante, alteramos o multiplicador para otimizar a alocação em renda variável.

Assim, na implementação empírica atualizamos os parâmetros de risco e retorno com a chegada de informação a cada rebalanceamento, porém mantendo a razão de valor da carteira sobre colchão constante e fixo pela condição inicial da otimização entre o primeiro e o último multiplicador adotados ao longo de 1 ano de horizonte de investimento do planejamento financeiro. Alterando a razão valor da carteira/colchão no primeiro dia útil e mantendo até o último dia útil do ano, assim no exercício de desempenho entre 2000 e 2022 a razão foi alterada 23 vezes e sempre mantida por 1 ano.

O multiplicador que maximiza a utilidade esperada e minimiza Vega dependem da razão valor da carteira sobre o colchão, quanto maior o valor da carteira em relação ao colchão menor a exposição ao risco.

A razão valor da carteira sobre colchão é invariante a multiplicação da carteira por escalar $\frac{V_0}{C_0} = \frac{k * V_0}{k * \left[V_0 - \frac{p * V_0}{(1+R_f)^{(T-t)}}\right]}$, é inversamente proporcional aos juros e diretamente proporcional ao valor meta mínimo da carteira no vencimento. Para p igual a 90% fica com valores entre 5 e 9 (Quadro 1), quanto maior p maior o valor meta mínimo no vencimento, o colchão diminui e maior a razão. Em mercados com maior juro reduz o piso, aumenta o colchão e torna menor a razão valor da carteira sobre o colchão.

O CPPI que maximiza a utilidade esperada e minimiza Vega na aplicação empírica entre 2000 e 2022 realizada neste estudo, como dependem da razão valor da carteira sobre colchão que é inversamente proporcional aos juros, tem multiplicador que aumentou principalmente no final da série quando não só a taxa de juros teve redução em torno do seu ciclo como em 2021 alcançou o menor registro de juros da série histórica.

Quadro 1 – Análise de Sensibilidade da Razão V/C.

		p																
	V_0/C_0	0.99	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.9	0.89	0.88	0.87	0.86	0.85	0.84	0.83	0.82	0.81	0.8
	0.15	7	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3
Rf	0.14	8	6	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3
	0.13	8	6	6	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3
	0.12	9	7	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4
	0.11	9	7	7	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4
	0.10	10	7	7	6	6	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
	0.09	11	8	7	7	6	6	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4
	0.08	12	8	8	7	7	6	6	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4
	0.07	13	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4
	0.06	15	10	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4
	0.05	18	11	10	9	8	7	7	7	6	6	6	5	5	5	5	4	4
	0.04	21	12	10	9	9	8	7	7	6	6	6	5	5	5	5	5	4
	0.03	26	13	11	10	9	9	8	7	7	6	6	6	5	5	5	5	4
	0.02	34	15	13	11	10	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5	5	5
	0.01	51	17	14	13	11	10	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5	5

3.3 – Atualização das Estimativas de Risco e Retorno

Todos os multiplicadores baseados em otimização dependem de estimativas de risco e retorno. O retorno esperado do índice de mercado foi calculado pela média anualizada dos retornos diários com janela de 1 ano, 252 observações de dias úteis mais recentes.

Por sua vez a volatilidade foi calculada pelo modelo Riskmetrics para estimação de volatilidade com parâmetro lambda igual a 0.94, conforme sua referência para implementação para dados diários. O upside risk e downside risk também foram baseados em modelos de suavização exponencial com parâmetro 0.94.

As estimativas de risco e retorno foram baseadas na estimativa de retornos diários, com a informação até o último dia útil disponível e usando como previsão um passo a frente para o rebalanceamento da carteira em frequência mensal. No cálculo do valor em risco ao final de cada mês, além do Riskmetrics para estimação da volatilidade foi adotado o ewma (Exponentially Weighted Moving Average) para estimativa do retorno diário esperado.

4 Resultados Empíricos

Inicialmente vamos analisar o desempenho do CPPI padrão sem custos de transação, impostos e taxas de negociação e intermediação, o objetivo é avaliar as propriedades do CPPI padrão em diferentes frequências de rebalanceamento. Depois consideramos taxas e impostos para o CPPI e as abordagens de otimização em frequência mensal.

4.1 CPPI sem Impostos e Taxas

Começamos avaliando o CPPI padrão sem impostos e taxas em diferentes frequências de rebalanceamento. Foi adotado o multiplicador $m = 5$, o que corresponde proteção do valor da carteira acima do piso até uma queda de 20% entre 1 período de rebalanceamento – sendo necessário uma queda do ativo com exposição maior que 20% para que a carteira fique abaixo do piso (CESARI; CREMONINI, 2003). Este valor está em linha com a literatura, que adota valores do multiplicador principalmente entre 5 e 8 (ARDIA; BOUDT; WAUTERS, 2016)

Na análise homogeneizada durante o período de investimento de 1 ano, começando com 100 unidades monetárias no primeiro dia do ano e realizando o ganho/perda no último dia do ano para voltar a investir 100 unidades monetárias no primeiro dia do ano seguinte, comparamos o desempenho do CPPI em diferentes frequências de rebalanceamento com o IBOVESPA.

Pela análise das estatísticas descritivas pelo desempenho da estratégia comprar e manter em Ibovespa com aporte de 100 unidades monetárias durante 1 ano homogeneizado (Tabela 1 e Gráfico 1), considerando 2000 a 2022, o menor valor da carteira diária em 1 ano foi de uma perda de -53,14% e o maior ganho em 1 ano foi de 91,66%. O valor diário do investimento de 100 unidades monetárias no primeiro dia do ano em média tem valor de 103,15 durante os dias do ano de horizonte de investimento, com primeiro quartil em 93,49 e terceiro quartil em 111,02. Assim em torno da média de

3,15% de ganho pelo retorno de investir no primeiro dia do ano ao longo de 1 ano temos 25% dos menores valores em 93,49 (perda de 7,51%) e 25% dos maiores valores em 111,02 (ganho de 11,02%).

O retorno médio diário anualizado da estratégia comprar e manter Ibovespa pelo horizonte de investimento de 1 ano foi de 11,48%, com desvio padrão de 28,15%. Enquanto 18,89% das observações diárias estavam abaixo de uma perda de 10% relativo ao aporte inicial de R$100 no primeiro dia do ano, e 28,87% das observações do valor da carteira estiveram abaixo de uma perda de 5%.

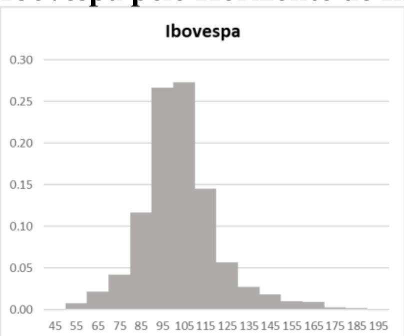
Pela análise do histograma e tabela da estratégia comprar e manter em Ibovespa em 1 ano, a média é maior que a mediana, com distribuição levemente assimétrica a direita. Com maior frequência de ganhos em relação a perdas no investimento de comprar e manter Ibovespa por um ano, com aporte de 100 unidades monetárias no primeiro dia do ano.

Tabela 1 – Estatísticas Descritivas do Ibovespa sob Estratégia Comprar e Manter por 1 ano Homogeneizado: 2000 a 2022.

Estatísticas	Ibov
Retornos	
E[R]	11.48
σ(R)	28.15
Valor da Carteira	
Mín	46.86
1st Quartil	93.49
Mediana	101.48
Média	103.15
3st Quartil	111.02
Máx	191.66
freq < p*V0	18.89% / 28.87%
Omega(Vt)	2.36 / 2.01

Nota: (1) A tabela descreve as estatísticas descritivas diárias da estratégia de comprar e manter 100 unidades monetárias de Ibovespa no 1º dia do ano e vender no último dia do ano; (2) E[R] é o retorno médio diario anualizado e σ(R) é o desvio padrão anualizado; (2) Freq < p*V0 descreve o percentual de valores da carteira de comprar e manter Ibovespa abaixo de 90 (p=0.90) e depois da barra abaixo de 95 (p=0.95); Omega(V_t) descreve a razão Omega tendo como valor limiar 90 e depois da barra limiar de 95.

Gráfico 1 – Histograma do Valor da Carteira com a Estratégia Comprar e Manter Ibovespa pelo Horizonte de Investimento de 1 ano: 2000 a 2022.



Nota: O histograma descreve o valor diário da estratégia de comprar e manter Ibovespa após investir 100 unidades monetárias no 1º dia do ano e vender no último dia do ano.

Para o CPPI com horizonte de investimento de 1 ano (Tabela 2), podemos observar que com valor mínimo meta da carteira ao final de 1 ano de 90 (p=0.90) permite menor percentual de violações, com menor percentual de valores da carteira abaixo de 90 após investir 100 no primeiro dia do ano. Quando o valor meta mínimo da carteira ao final de 1 ano aumenta para 95 (p=0.95) temos maior percentual de observações de valor da carteira abaixo de 95 nas diferentes frequências de rebalanceamento.

Com maior valor meta de 95 ao final do horizonte de investimento a estratégia CPPI tem menor risco em diferentes frequências de balanceamento, pois reduz a exposição a renda variável e aumenta a proporção da carteira em renda fixa. A estratégia CPPI de menor risco foi acompanhada de maior retorno numa estratégia que tudo o mais constante implica em venda do ativo com exposição numa menor baixa quando o mercado cai se opera maior valor meta, acompanhado de maior alocação em renda fixa e beneficiada pelas elevadas taxas de juros no Brasil.

Os maiores valores da razão Ômega ocorrem para p=0.90, com maior resultado dos ganhos sobre as perdas em relação ao limiar na frequência diária seguido por semanal e depois mensal. Contudo no ômega calculado pelo valor da carteira de investir 100 unidades monetárias na estratégia CPPI durante 1 ano, para p=0.90 o maior ômega ocorre para o CPPI de rebalanceamento diário e para p=0.95 o maior ômega ocorre com rebalanceamento mensal.

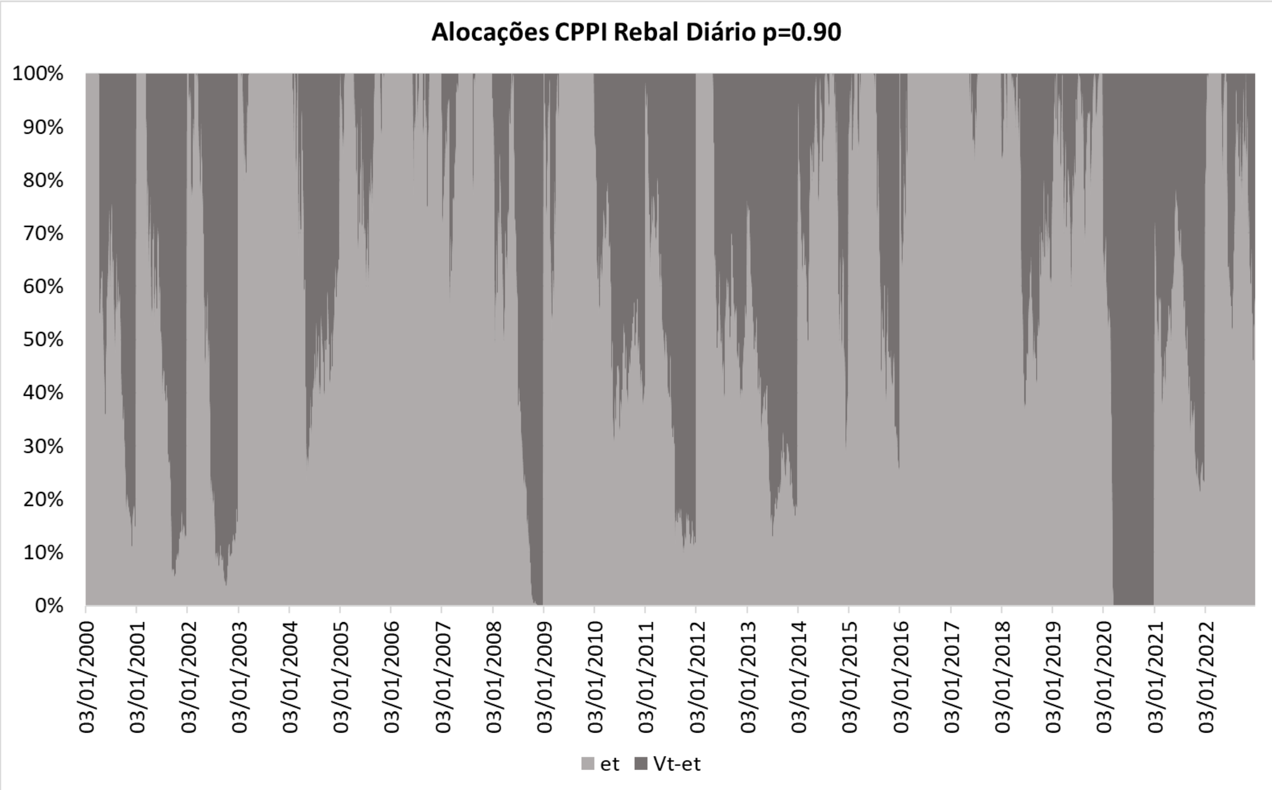
Com rebalanceamento diário temos ajuste fino da estratégia de fazer hedge de proteger o valor da carteira contra quedas no ativo de exposição operando renda fixa, porém se o valor meta protegido aumenta de 90 (perda de 10%) para 95 (perda de 5%) temos menor performance de obter valor esperado dos ganhos sobre a perdas em relação ao limiar com rebalanceamento diário e melhor performance no rebalanceamento mensal.

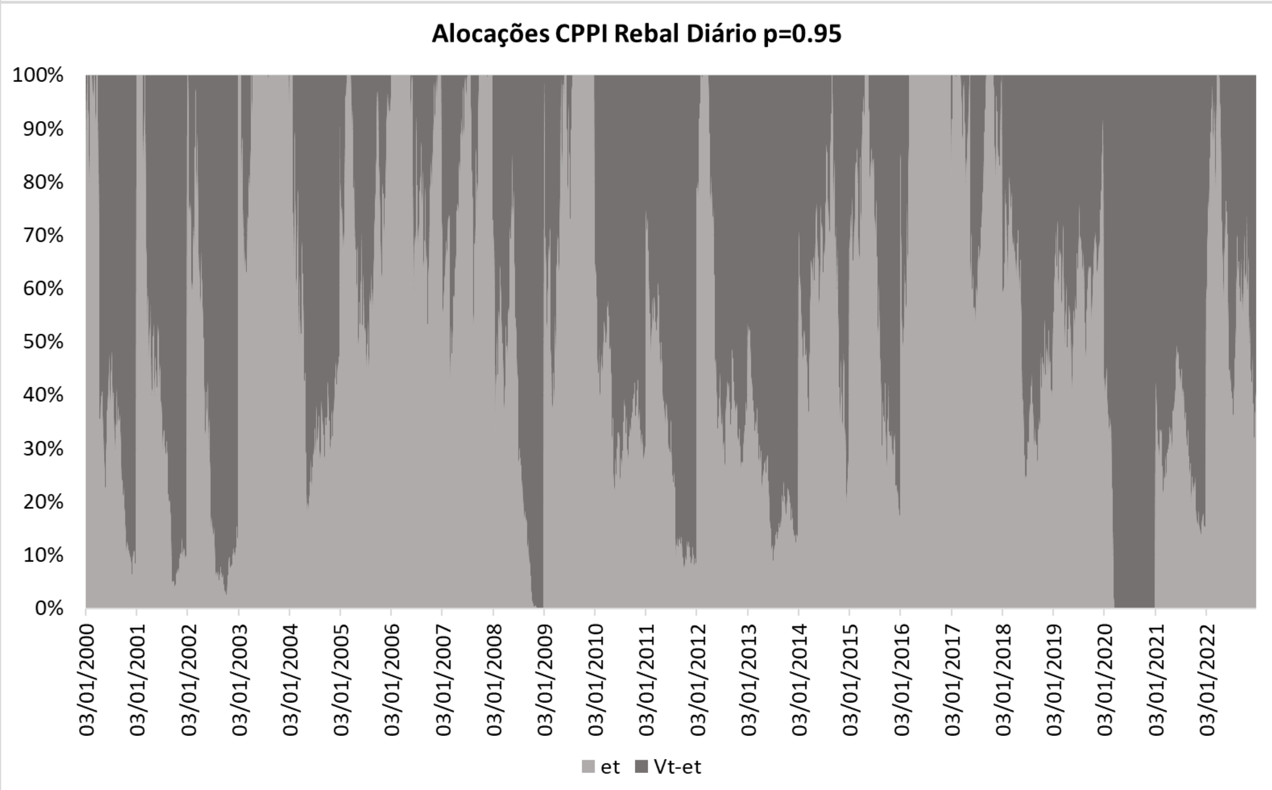
Tabela 2 – Estatísticas Descritivas do Valor do CPPI em Diferentes Frequências de Rebalanceamento.

	p= 0.90			p=0.95		
	CPPI rebal dia	CPPI rebal semana	CPPI rebal mês	CPPI rebal dia	CPPI rebal semana	CPPI rebal mês
Estatísticas: retornos						
E[R]	10.20	9.97	10.97	10.59	10.57	11.66
σ(R)	18.53	17.92	17.89	15.72	15.21	15.42
Estatísticas: Valor da Carteira						
Mín	85.07	84.58	84.27	87.84	87.65	89.08
1st Quartil	93.82	94.02	94.66	96.09	96.21	96.41
Mediana	99.29	99.81	100.00	100.14	100.15	100.00
Média	103.03	103.35	104.02	103.37	103.69	104.29
3st Quartil	108.15	108.36	108.64	106.64	106.87	107.39
Máx	188.64	190.17	189.21	185.71	187.11	185.23
freq < p*V0	10.64%	10.69%	9.70%	17.72%	18.43%	17.06%
Omega(Vt)	20.00	18.47	17.32	12.67	12.52	15.25

Nota: (1) A tabela descreve as estatísticas descritivas da estratégia CPPI que investe 100 unidades monetárias no 1º dia do ano e realiza ganho ou perdas no último dia do ano, para voltar a investir novamente 100 unidades monetárias a partir do primeiro dia do ano seguinte por 1 ano; (2) E[R] é o retorno médio anualizado e σ(R) é o desvio padrão anualizado; (3) Freq < p*V0 descreve o percentual valores da estratégia de investimento de 100 no primeiro dia do ano abaixo de p^*V_0.

Gráfico 2 – Alocação em Renda Fixa e Variável do CPPI com Rebalanceamento Diário: 2000 a 2022.





Nota: Gráficos das alocações em renda variável (e_t) e renda fixa (V_t-e_t) para o CPPI com rebalanceamento diário e p=0.90 e p=0.95.

O excesso de alteração da carteira em frequências diária e um limiar de perda alto acaba prejudicando a estratégia CPPI de entrar e manter posição no ativo com exposição que tem maior retorno esperado, aumentando o número de períodos com ativo sem exposição na carteira e o percentual de alocação em renda fixa (Gráfico 2) que reduz o ganho esperado da carteira. Mesmo com um valor meta mínimo alto a menor frequência de rebalanceamento mensal permite operar por mais tempo um aporte em renda variável, aumentando o terceiro quartil com frequência mensal em relação a frequência diária com p=0.95.

O CPPI com maior valor meta mínimo tem maior aporte em renda fixa e maior valor do quartil abaixo da média, enquanto o CPPI com menor valor meta tem maior aporte em renda variável e maior valor do quartil acima da média. Com maior frequência de violação do piso e aporte em renda fixa aumentam os valores do primeiro quartil e valor mínimo para o CPPI com p=0.95 em relação a p=0.90, porém aumentam os valores do 3º quartil e valor máximo para o CPPI com p=0.90 que aloca comparativamente maior posição em renda variável.

Para o resultado acumulado anual do investimento pelo CPPI em diferentes frequências de rebalanceamento (Tabela 3) o maior rendimento acumulado anual médio foi para o caso de frequência de rebalanceamento mensal e p=0.95, o menor risco dos retornos acumulados anuais foi para CPPI com frequência de rebalanceamento diário e p=0.95. Frente as limitações de risco e retorno para analisar distribuições assimétricas a razão ômega é a principal medida de desempenho. Novamente, assim como pelo valor ao longo do ajuste da carteira entre aporte e realização de ganhos/perdas, considerando retornos anuais o melhor desempenho pelo ômega foi do CPPI com rebalanceamento diário e p=0.90.

Tabela 3 – Estatísticas Descritivas do Rendimento Acumulado ao final de 1 ano do CPPI em Diferentes Frequências de Rebalanceamento.

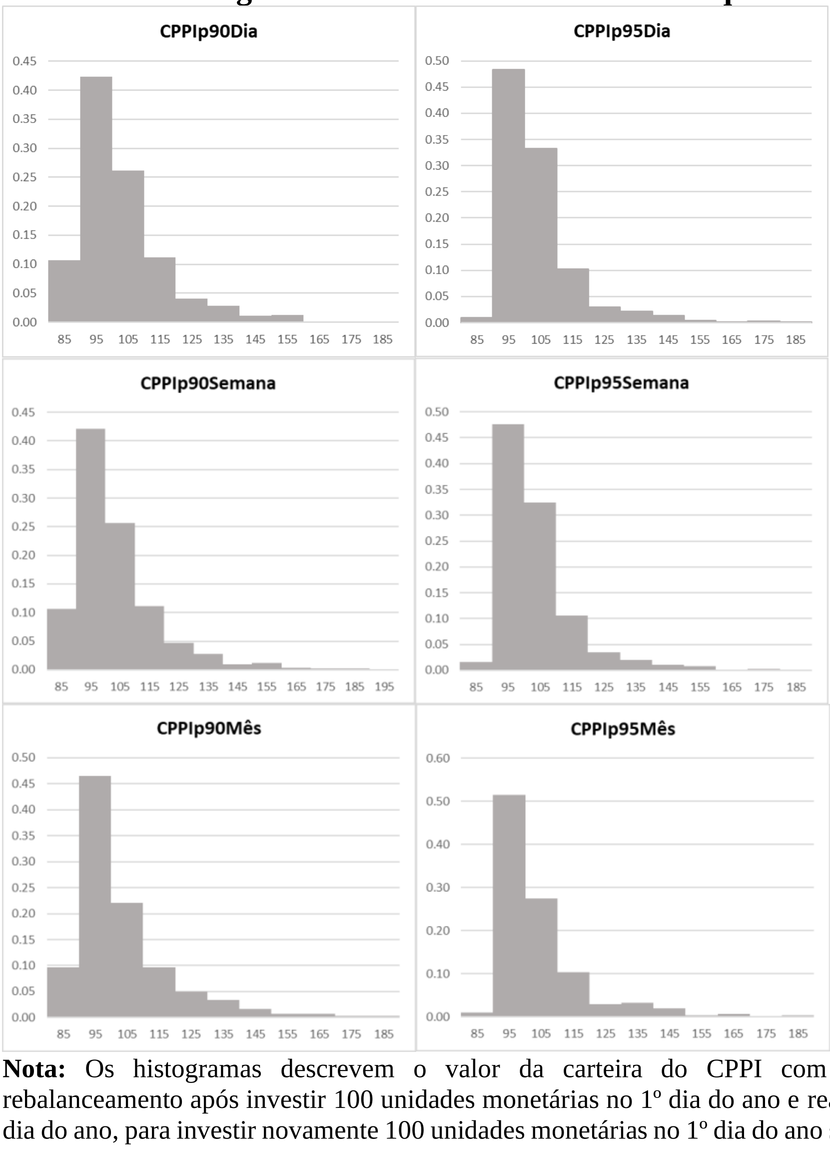
	Rend. Acum. Ano		
	Média	**Sigma**	**Omega**
CPPI p=0.90, rebal diário	10.95	25.21	90.41
CPPI p=0.90, rebal semana	11.17	25.82	85.87
CPPI p=0.90, rebal mensal	12.45	26.96	23.18
Ibov B&H	11.44	30.89	3.36/2.74
CPPI p=0.95, rebal diário	11.25	21.70	75.42
CPPI p=0.95, rebal semana	11.72	22.64	73.60
CPPI p=0.95, rebal mensal	13.03	23.84	27.84

Nota: (1) A tabela descreve as estatísticas descritivas do rendimento acumulado anual da estratégia CPPI que investe 100 unidades monetárias no 1º dia do ano e realiza ganho ou perdas no último dia do ano, para voltar a investir novamente 100 unidades monetárias por 1 ano; (2) Ibov B&H se refere a estratégia de comprar e manter 100 unidades monetárias de Ibovespa no 1º dia do ano e vender no último dia do ano; (3) O primeiro ômega para comprar e manter Ibovespa utiliza limiar de perda de 90, o segundo que vem após a barra utiliza como limiar de perda 95.

Pela análise do ômega, tanto em termos de valor da carteira ao longo dos rebalanceamento periódicos quanto pelo resultado do rendimento acumulado anual, a estratégia CPPI supera o desempenho de comprar e manter o Ibovespa. A estratégia CPPI permitiu entregar maior ganho esperado em relação a perda esperada a partir do valor meta desejado da carteira ao final de 1 ano, comparativamente ao Ibovespa.

Embora o Ibovespa tenha maior retorno médio, tem maior risco que para uma distribuição mais próxima de simétrica aumenta o valor da perda esperada. O valor mínimo e primeiro quartil, 25% das menores perdas, é maior no CPPI em comparação ao Ibovespa; porém o terceiro quartil, 25% dos maiores ganhos é maior no Ibovespa do que no CPPI.

Gráfico 3 – Histogramas do CPPI em Diferentes Frequências de Rebalanceamento.



Nota: Os histogramas descrevem o valor da carteira do CPPI com diferentes frequências de rebalanceamento após investir 100 unidades monetárias no 1º dia do ano e realizar ganho/perda no último dia do ano, para investir novamente 100 unidades monetárias no 1º dia do ano seguinte pelo prazo de 1 ano.

Uma característica importante da estratégia CPPI é o controle de risco, entregando distribuição do valor da carteira ao longo do horizonte de investimento assimétrica (Gráfico 3). Com maior valor meta mínimo no vencimento, p=0.95 > p=0.90, resultou numa carteira ao longo dos rebalanceamentos durante o horizonte de investimento com maior valor mínimo e maior frequência de valores em torno da média.

Considerando a performance tanto em termos de controle do valor da carteira entre rebalanceamentos quanto o resultado acumulado ao final do horizonte de investimento de 1 ano, a estratégia CPPI com rebalanceamento diário e p=0.90 permitiu entregar maior razão omega para todos rebalanceamentos e valores meta.

Embora o resultado desta seção apresente o CPPI com melhor desempenho com frequência de rebalanceamento diário, as taxas de IOF penalizadoras sobre rendimentos de renda fixa que começam em 96% para 1 dia e permanecem em 50% mesmo após 15 dias consiste em uma restrição do mercado financeiro nacional que leva a análise do CPPI em rebalanceamento mensal na próxima seção.

4.2 Desempenho do CPPI para Abordagens de Otimização com Impostos e Taxas

Agora vamos analisar o desempenho do CPPI com impostos e taxas em rebalanceamento mensal com as propostas de multiplicador baseado em otimização. Pela análise do valor da carteira entre os rebalanceamentos mensais (Tabela 4) o maior ômega ocorre para o UCPPI com p=0.90 e o segundo melhor foi do VegaCPPI com p=0.90.

O melhor desempenho pela razão ômega foi do CPPI com multiplicador baseado em maximização de utilidade, que para p=0.90 não fica abaixo do limiar de 90 após o investimento de 100 no primeiro dia do ano em nenhum mês, de forma que o valor esperado da carteira de investimentos abaixo de 90 é zero e a razão ômega se torna infinita. O maior ômega pelos valores da carteira ao longo dos rebalanceamentos mensais para p=0.95 ocorre para o CPPI com multiplicador baseado em minimização do Vega.

O CPPI com multiplicador baseado em otimização supera o CPPI tradicional pelo ômega pelo valor mensal entre balanceamentos nas abordagens de maximização de utilidade (UCPPI), Vega (VegaCPPI) e Vega ajustado (VegaAdjCPPI). Em todos os casos ao aumentar o valor de referência para perda de 90 para 95, aumentando o valor percentual mínimo em relação ao valor inicial projetado ao final do horizonte de investimento de p=0.90 para p=0.95, aumenta a frequência de realizações da carteira abaixo do limiar.

O menor desvio padrão anualizado dos retornos mensais ocorre para o UCPPI, seguido do SorCPPI para p=0.90 e Vega CPPI para p=0.95. O Vega CPPI promove menor variações do retorno ao longo dos rebalanceamentos do que o CPPI tradicional com multiplicador constante, aprimorando a pretendida performance da estratégia CPPI de estabilidade do retorno da carteira.

Os maiores retornos médio mensais anualizados ocorrem para o VaRCPPI com p=0.95, SorCPPI com p=0.95 e VaRCPPI com p=0.90. Os maiores valores de terceiro quartil ocorrem para o VaRCPPI, SorCPPI e VegaAdjCPPI, que apresentaram maior alocação no ativo com exposição que tem maior retorno esperado em recompensa de seu maior risco (Gráficos 4 e 5). No entanto o CPPI com multiplicador baseado em valor em risco (VaRCPPI) e maximização da razão de Sortino pelo valor da carteira entre os rebalanceamentos tem menor razão ômega do que o CPPI padrão com multiplicador constante, enquanto o VegaAdjCPPI tem maior ômega que o CPPI padrão.

A parametrização do CPPI pelo maior valor meta mínimo ao longo do horizonte de investimentos, especificando maior percentual em relação a dotação da riqueza inicial investida, implica num perfil mais conservador e maior investimento em renda fixa quanto maior o percentual associado a maior valor mínimo meta ao final do horizonte de investimento. Em todas as abordagens de CPPI o maior valor mínimo meta, p=0.95, opera maior percentual da carteira em renda fixa do que a parametrização com menor valor mínimo meta, p=0.90, conforme os gráficos 4 e 5.

O parâmetro p é determinante para o risco da carteira que em todos os casos têm menor desvio padrão para p=0.95 do que na especificação de p=0.90, como podemos ilustrar pelo caso do SorCPPI. Embora o SorCPPI tenha um perfil mais arriscado, alternando entre renda variável e renda fixa com alocação de forma binária da totalidade da alocação, ao operar stop loss modificado pelo retorno esperado da carteira acima da taxa de juros livre de risco acompanhado de colchão positivo com maior p reduz de forma relevante o risco a ponto de permitir o terceiro menor desvio padrão dos retornos mensais da carteira. O SorCPPI executa uma regra de stop loss modificada com melhor desempenho pelo ômega que comprar e manter o índice Ibovespa numa comparação anual homogeneizada.

Tabela 4 – Estatísticas Descritivas do CPPI ao Longo do Horizonte de Investimento de 1 ano com Impostos e Taxas, para Diferentes Abordagens de Otimização e Frequência de Rebalanceamento Mensal.

	CPPI		UCCPI A=5		SorCPPI		VaRCPPI alfa=1%		VegaCPPI		VegaAdjCPPI	
	p=0.90	p=0.95	p=0.90	p=0.95	p=0.90	p=0.95	p=0.90	p=0.95	p=0.90	p=0.95	p=0.90	p=0.95
Estatísticas: Retornos												
E[R]	10.36	9.05	10.07	10.12	10.90	11.06	11.03	11.54	9.82	10.09	10.22	10.61
σ(R)	17.84	17.23	10.12	9.92	16.48	14.06	17.92	16.21	14.55	14.12	17.15	16.43
Estatísticas: Valor da Carteira												
Mín	84.25	88.74	90.01	89.69	61.58	84.36	83.53	87.62	88.41	91.24	86.48	89.18
1st Quartil	94.51	96.08	99.47	99.46	99.97	97.27	93.57	94.86	96.24	96.47	94.26	94.71
Mediana	100.00	100.00	102.89	102.83	102.89	102.64	100	99.92	100.00	100.00	99.79	99.05
Média	103.81	103.90	103.87	103.92	103.55	103.86	103.94	104.09	103.55	103.67	103.57	103.72
3st Quartil	108.54	106.96	107.14	107.15	108.47	108.12	109.58	109.02	106.87	106.43	108.87	107.77
Máx	189.09	184.61	177.92	177.68	181.27	181.27	189.57	189.93	173.77	172.78	181.06	179.15
freq < p*V0	11.04%	18.39%	0.00%	8.70%	9.70%	19.73%	12.71%	26.09%	2.68%	16.05%	8.36%	27.42%
Omega(Vt)	17.22	14.30	Inf	15.58	3.21	8.11	15.38	12.86	52.58	20.66	25.90	14.45

Nota: (1) A tabela descreve as estatísticas descritivas diárias da estratégia investir 100 unidades monetárias na estratégia do CPPI com abordagem de otimização no primeiro dia do ano e realizar ganho/perda no último dia do ano; (2) E[R] é o retorno médio mensal anualizado e σ(R) é o desvio padrão anualizado; (3) CPPI é o CPPI padrão, UCPPI é o CPPI com multiplicador que maximiza a utilidade esperada, SorCPPI é o CPPI que maximiza a razão de Sortino, VaRCPPI é o CPP com multiplicador que minimiza o valor em risco da carteira em relação ao valor meta no vencimento, VegaCPPI é o CPPI com multiplicador que minimiza a variação esperada do valor da carteira em resposta a mudanças na volatilidade; (4) Freq < p*V0 descreve o percentual valores diários da estratégia de investimento de 100 no primeiro dia do ano abaixo de p^*V_0.

Gráfico 4 – Alocações CPPI Padrão e com Multiplicador Baseado em Otimização, em Rebalanceamento Mensal e parâmetro p=0.90, com Impostos e Taxas.

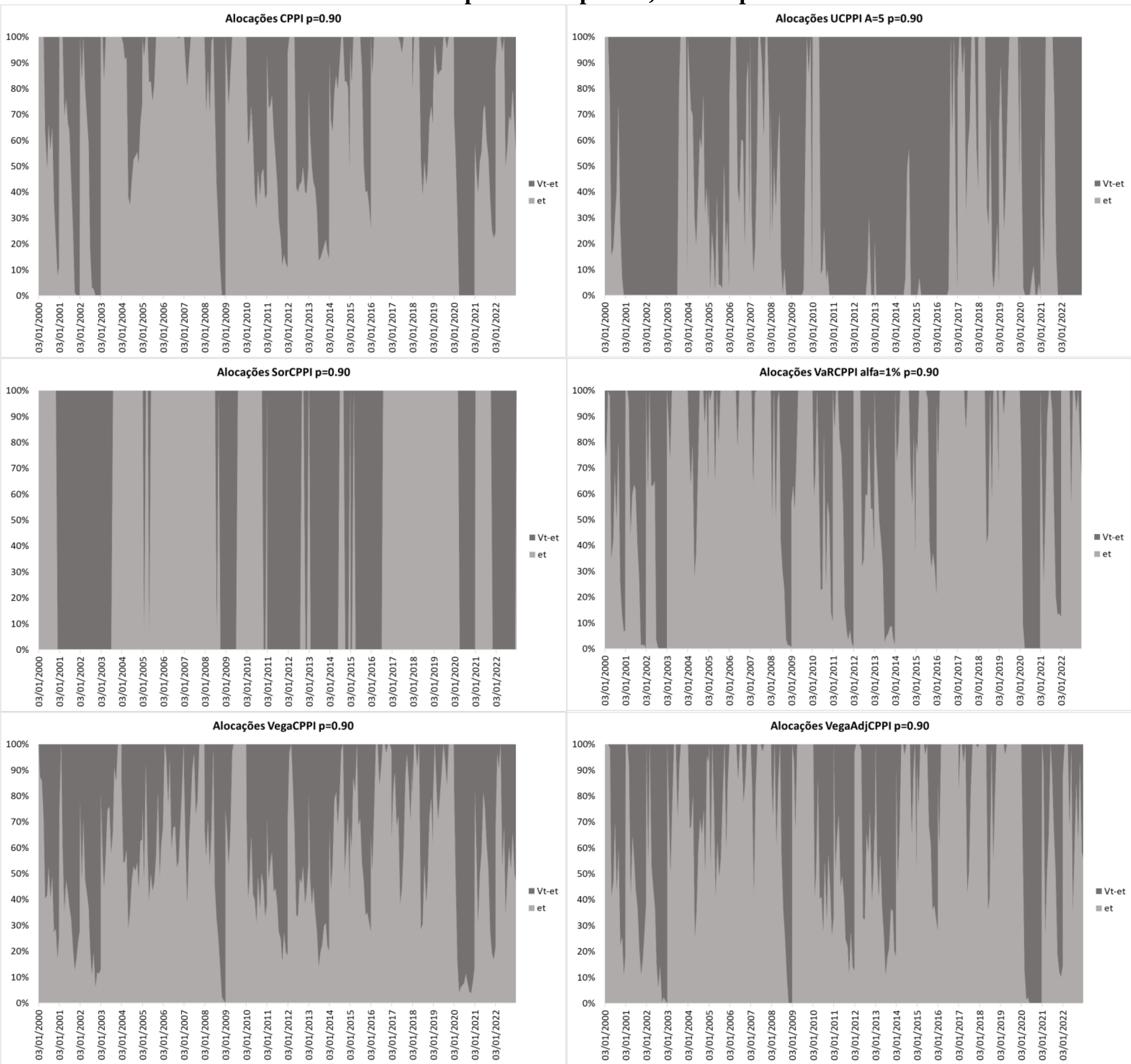
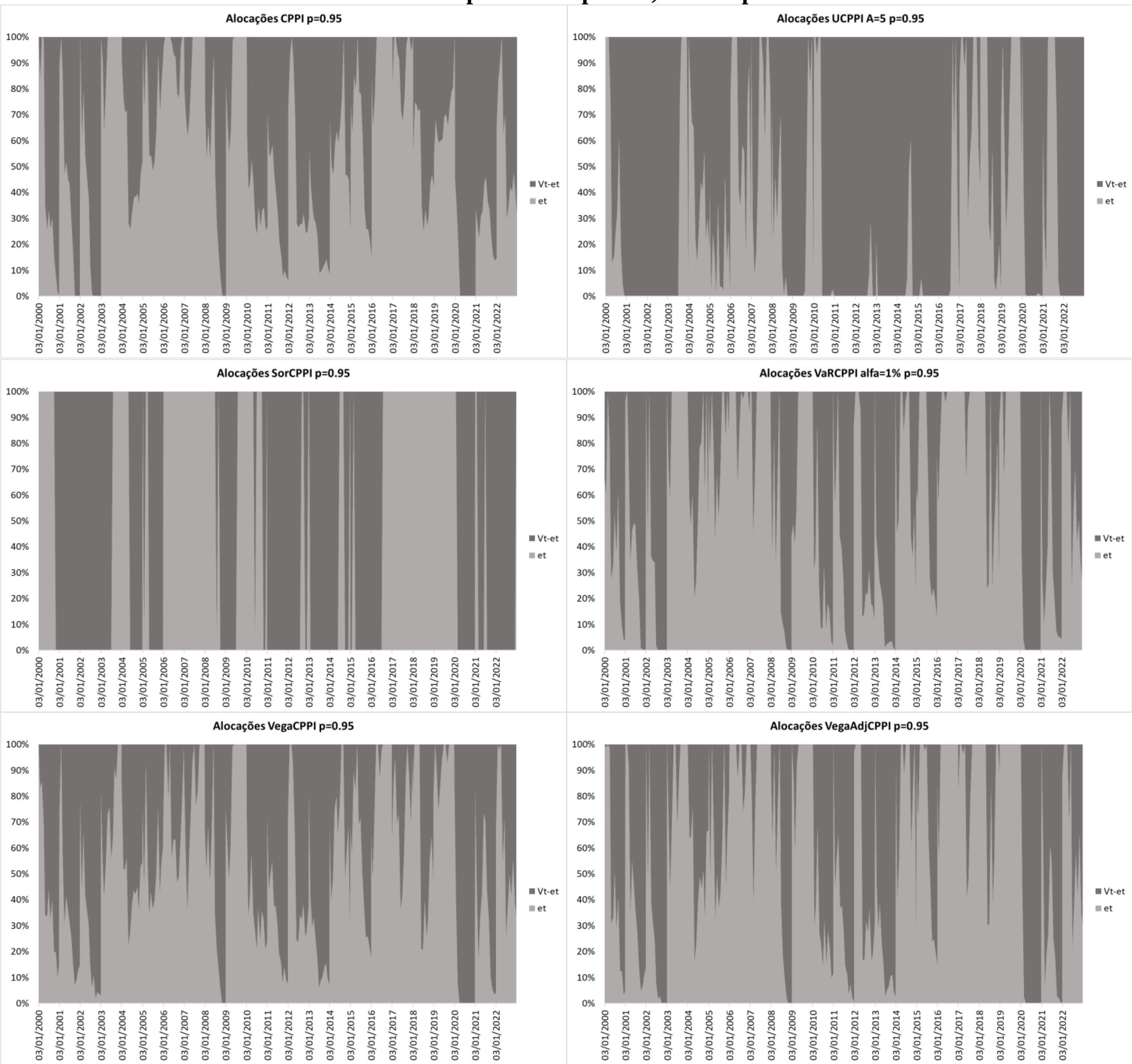


Gráfico 5 – Alocações CPPI Padrão e com Multiplicador Baseado em Otimização, em Rebalanceamento Mensal e parâmetro p=0.95, com Impostos e Taxas.



Em termos de resultados ao final do horizonte de 1 ano de execução da estratégia, em 23 anos de análise de 2000 a 2022, os melhores desempenho com maiores valores do ômega foi novamente para o UCPPI com p=0.90 seguido pelo VegaCPPI com p=0.90 (Tabela 5). O maior retorno médio anual foi do VaRCPPI, que também apresentou maior retorno médio mensal com p=0.95. O menor risco foi para o UCPPI seguido do SorCPPI com p=0.95 e VegaCPPI com p=0.95.

O melhor ômega do CPPI baseado em utilidade com p=0.90 que também ocorre comparando os CPPI com multiplicador baseado em otimização para p=0.95, é resultado de um grande conservadorismo, com pouca exposição a renda variável e que opera Ibovespa apenas nos períodos de alta mais pronunciada e recorrente. Comparando entre diferentes alternativas do CPPI com multiplicador baseado em utilidade esperada o melhor desempenho foi para o maior coeficiente de aversão ao risco, com coeficiente de aversão ao risco variando entre 3 e 5 conforme a faixa de valores de referência na literatura.

Excluindo da análise a abordagem baseada em utilidade, que é a mais conservadora, no CPPI direcionado a maior exposição a renda variável, com menor valor limiar associada ao valor mínimo meta de referência de 90 ao final do horizonte de investimento com p=0.90, o segundo melhor ômega foi para o VegaCPPI. Enquanto com maior piso, com p=0.95, o segundo melhor resultado de ômega foi do VaRCPPI.

Tabela 5 – Estatísticas Descritivas do Retorno Acumulado Anual do CPPI com Frequências de Rebalanceamento Mensal, Impostos e Taxas.

	Rend. Acum. Ano		
	Média	Sigma	Omega
CPPI p=0.90	11.87	27.24	21.39
CPPI p=0.95	12.08	23.98	24.78
UCPPI p=0.90 A=5	11.07	17.41	Inf
UCPPI p=0.95 A=5	11.11	17.14	70.37
SorCPPI p=0.90	12.24	23.35	3.31
SorCPPI p=0.95	12.26	21.29	10.84
VaRCPPI p=0.90 alfa 1%	12.59	27.19	86.60
VaRCPPI p=0.95 alfa 1%	13.02	25.24	62.94
VegaCPPI p=0.90	10.94	22.09	2309.75
VegaCPPI p=0.95	11.17	21.40	37.05
VegaAdjCPPI p=0.90	11.52	25.51	111.17
VegaAdjCPPI p=0.95	11.82	24.23	44.84

Nota: Inf denota valor infinito, no caso do UCPPI p=0.90 não teve um rendimento acumulado anual com valor abaixo de 90 após aportar 100 unidades monetárias no primeiro dia e realizar o ganho/perda no ultimo dia do ano.

Com menor piso associado a menor valor mínimo meta a estratégia CPPI fica mais direcionado a operar renda variável com expectativa de menor número de realizações de valor da carteira abaixo do piso, sendo menos conservadora com maior e mais recorrente em alocações no índice do mercado de ações ao longo do tempo. Nessa parametrização o VegaCPPI ao ter objetivo de reduzir a variações dos retornos frente ao aumento do risco permitiu a segunda melhor razão ômega.

Num ajustamento para maior exposição em renda fixa, com maior valor meta mínimo de referência e maior expectativa de frequência do valor da carteira abaixo do piso tudo o mais constante, a segunda melhor razão ômega foi para o VaRCPPI. Ao conjugar o maior stop de perdas com maior exposição a renda variável do multiplicador baseado no valor em risco alcançou-se melhores resultados. Da mesma forma, no VegaCPPI, melhoramos os resultados compensando a maior exposição ao risco do menor stop de perdas a função objetivo de minimização de variações de retorno em relação ao aumento do risco.

As abordagens de utilidade esperada e do Vega com p=0.90 se destacaram pelos 2 maiores valores de ômega seja pelos valores mensais da carteira ou retornos acumulados anuais. A estratégia CPPI com multiplicadores baseados em utilidade esperada ou Vega resultaram em carteiras mais estáveis, com menor risco e com maior posição em renda fixa ao longo do tempo. Os elevados valores das taxas de juros no mercado brasileiro no período contribuíram para o desempenho dessas abordagens mais defensivas.

5 Considerações Finais

Nesse artigo estudamos o modelo CPPI com propostas de otimização. A estratégia CPPI opera renda fixa e renda variável com regra de alteração entre as classes de ativos ao longo do tempo e tem como principal característica uma distribuição assimétrica. O CPPI permite os investidores se beneficiarem da alta do mercado protegendo contra quedas sucessivas do ativo com exposição sobre o valor da carteira, ao operar hedge trocando a posição da carteira de renda variável para renda fixa.

Após analisar o desempenho pelo horizonte de investimento de 1 ano, utilizando 23 anos de dados históricos de janeiro de 2020 a dezembro de 2022, podemos verificar o menor risco da estratégia CPPI em relação a estratégia de comprar e manter por 1 ano o índice amplo do mercado de ações. O CPPI permite reduzir o valor esperado das perdas, através do qual aumenta o ômega em comparação a estratégia de comprar e manter Ibovespa.

Nesse trabalho apresentamos abordagens de otimização do CPPI com multiplicador ótimo relacionados a diferentes funções objetivo: CPPI com multiplicador que maximiza a utilidade esperada; CPPI com multiplicador que maximiza a razão de Sortino; CPPI com multiplicador que minimiza o valor em risco; CPPI com multiplicador que minimiza o Vega; CPPI com multiplicador baseado em Vega ajustado. O multiplicador tem efeito sobre o retorno e risco da carteira com renda fixa e renda variável na estratégia CPPI, permitimos que o CPPI dependa de fundamentos de escolha ótima sob incerteza ao invés de valores predeterminados por análise empírica.

Entre as diferentes abordagens de otimização consideradas, o CPPI com multiplicador que maximiza a utilidade esperada teve melhor performance pelo ômega, com maior razão dos ganhos esperados sobre as perdas em relação ao valor meta mínimo da carteira no vencimento, porém se caracterizando com uma alocação muito conservadora com grande e recorrente alocação em renda fixa. Num perfil que opera mais renda variável com p=0.90 o Vega CPPI apresentou o segundo melhor resultado. Num perfil que opera mais renda fixa com p=0.95 o VaRCPPI apresentou segundo maior omega.

A abordagem de utilidade esperada e do Vega com p=0.90 apresentaram os maiores ômega tanto com retornos mensais quanto com retornos acumulados anuais. Estas abordagens do CPPI, resultaram em carteiras mais estáveis, com menor risco e com maior posição em renda fixa ao longo do tempo. Os elevados valores das taxas de juros no mercado brasileiro no período contribuíram para o melhor desempenho dessas abordagens mais defensivas.

Além de contribuir para aplicação do CPPI com multiplicadores fundamentados na escolha com otimização sob incerteza, este artigo integrou o CPPI a teoria do portfólio no estudo de alocação ótima de capital entre renda fixa e renda variável, além de descrever com fórmula fechada em tempo discreto o risco e retorno da carteira de investimentos sob a estratégia CPPI em função do valor do multiplicador.

Referências Bibliográficas

AMENC, N.; MALAISE, P.; MARTELLINI, L. Revisiting Core-satellite Investing. *Journal of Portfolio Management*, v. 31, n. 1, 2004.

ARDIA, D.; BOUDT, K.; WAUTERS, M. Smart Beta and CPPI Performance. *Finance*, v. 37, n. 3, 2016.

BERTRAND, P.; PRIGENT, J.-L. Portfolio Insurance Strategies: OBPI versus CPPI. *Finance*, v. 26, n. 1, 2005.

BERTRAND, P.; PRIGENT, J.-L. Omega Performance Measure and Portfolio Insurance. *Journal of Banking and Finance*, v. 35, n. 7, 2011.

BLACK, F.; JONES, R. Simplifying Portfolio Insurance. *Journal of Portfolio Management*, v. 14, n. 1, 1987.

BLACK, F.; PEROLD, A. F. Theory of Constant Proportion Portfolio Insurance. *Journal of Economics Dynamic and Control*, v. 16, n. 3-4, 1992.

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. J. *Investments.* 10th edition, McGraw Hill, 2014.

CALIMAN, T.; D'HONDT, C.; PETITJEAN, M. Determining an Optimal Multiplier in Dynamic Core-satellite Strategies. *Journal of Asset Management*, v. 14, n. 4, 2013.

CESARI, R.; CREMONINI, D. Benchmarking, Portfolio Insurance and Technical Analysis: A Monte Carlo Comparison of Dynamic Strategies of Asset Allocation. *Journal of Economics Dynamic and Control*, v. 27, n. 6, 2003.

HAKANOGLU, E.; KOPPRASCH, R.; ROMAN, E. Constant Proportion Portfolio Insurance for Fixed-Income Investment. *Journal of Portfolio Management*, v. 15, n. 4, 1989.

ISRAELSEN, C. L. A Refinement to the Sharpe Ratio and Information Ratio. *Journal of Asset Management*, v. 5, n. 6, 2005.

JIANG, C.; MA, Y.; AN, Y. The Effectiveness of the VaR-based Portfolio Insurance Strategy: An Empirical Analysis. *International Review of Financial Analysis*, v. 18, n. 4, 2009.

KAZEMI, H.; SCHNEEWEIS, T.; GUPTA, R. Omega as Performance Measure. *Journal of Performance Measurement*, v. 8, 2004.

ZIELING, D.; MAHAYNI, A.; BALDER, S. Performance Evaluation of Optimized Portfolio Insurance Strategies. *Journal of Banking and Finance*, v. 43, 2014.