

ÁREA TEMÁTICA: Operações e Logística

DEFINIÇÃO DE LINHAS DE ÔNIBUS DE TRANSPORTE URBANO COMO UM
PROBLEMA DE COLETA E ENTREGA

36º ENANGRAD

Resumo

Este estudo aborda a otimização de linhas de ônibus urbanos, inserido no contexto da necessidade de maior eficiência operacional e qualidade no sistema de transporte público de Curitiba. O objetivo central foi desenvolver um modelo de otimização matemática baseado em Programação Linear Inteira Mista (PLIM) para a operação estática das linhas, enquadrando o problema como uma variante do Problema de Coleta e Entrega com Janelas de Tempo e Transbordo (PDPTWT). A metodologia consistiu na adaptação de modelos da literatura com customizações para as regras operacionais de Curitiba, implementado em Python com Gurobi e validado através de cenários simulados. Os principais resultados indicam que o modelo é altamente eficaz na otimização da dimensão temporal, como horários e sincronização de transferências, mas as rotas espaciais são dominadas pela minimização da distância. A escalabilidade computacional revelou-se um desafio significativo, limitando a aplicação a instâncias de grande porte. Conclui-se que o modelo é uma ferramenta robusta para análise estratégica em menor escala e serve como um benchmark para o desenvolvimento de métodos heurísticos, contribuindo com uma formulação matemática detalhada e aplicável a sistemas de transporte complexos.

Palavras-chave: Otimização de Transporte; Pesquisa Operacional; Programação Linear Inteira Mista; Problema de Coleta e Entrega; Linhas de Ônibus

36º ENANGRAD

1. Introdução

A otimização do transporte público urbano é um desafio essencial para melhorar a eficiência operacional, reduzir custos e proporcionar um serviço de qualidade à população. Nas principais cidades do Brasil, foram transportados, em média, aproximadamente 210 milhões de passageiros por mês em 2023, com um tempo médio de viagem de 55 minutos (MOOVIT, 2025). Nesse contexto, a aplicação de modelos matemáticos para a definição e melhoria de linhas de ônibus torna-se fundamental.

A Pesquisa Operacional oferece classes de problemas bem estabelecidas, como o Problema de Roteamento de Veículos (VRP), introduzido por Dantzig e Ramser (1959), e o Problema de Coleta e Entrega (PDP). O PDP, em particular, é adequado para representar operações com múltiplos pontos de embarque (coleta) e desembarque (entrega), incluindo transferências (transbordo) entre linhas, uma característica central de sistemas integrados como o de Curitiba.

Este trabalho se propõe a desenvolver um modelo matemático exato, baseado na Programação Linear Inteira Mista (PLIM), para otimizar a operação das linhas de ônibus do sistema de transporte público de Curitiba. A abordagem adapta formulações existentes para o Problema de Coleta e Entrega com Janelas de Tempo e Transbordo (PDPTWT), como as de Rais, Alvelos e Carvalho (2014) e Lyu e Yu (2023), visando minimizar custos operacionais e melhorar a eficiência do serviço. Este artigo está organizado da seguinte forma: a seção 2 apresenta a fundamentação teórica; a seção 3 detalha a metodologia e a formulação matemática; a seção 4 discute os resultados obtidos; e a seção 5 apresenta as conclusões e contribuições do estudo.

2. Fundamentação Teórica

O referencial teórico se apresenta em duas frentes: os problemas relevantes de roteirização da Pesquisa Operacional e os atributos de qualidade percebida no transporte público relevantes para este trabalho.

O Problema de Roteamento de Veículos (VRP), originalmente descrito por Dantzig e Ramser (1959), busca otimizar rotas para uma frota de veículos, minimizando custos. Sendo um problema NP-hard (LENSTRA; RINNOOY KAN, 1981), sua solução para instâncias de grande porte frequentemente recorre a heurísticas e meta-heurísticas, como Tabu Search (GENDREAU; HERTZ; LAPORTE, 1994) e Simulated Annealing (OSMAN, 1993). O Problema de Coleta e Entrega (PDP) generaliza o VRP ao considerar pares de origem e destino para cada requisição, exigindo o respeito à precedência (coleta antes da entrega) (BERBEGLIA et al., 2007). Uma variante relevante é o PDP com Transbordo (PDPT), que permite a troca de cargas ou passageiros entre veículos, aumentando a eficiência do sistema (BERBEGLIA; CORDEAU; GRIBKOVSKAIA; LAPORTE, 2007). Trabalhos como o de Rais, Alvelos e Carvalho (2014) e Lyu e Yu (2022) forneceram modelos de PLIM para essa classe de problema, servindo de base para esta pesquisa.

A qualidade do serviço de transporte público, por sua vez, é um fator crucial para a satisfação do usuário. Atributos como confiabilidade, pontualidade, frequência dos serviços e tempo de espera impactam diretamente a percepção do passageiro (DE OÑA ET AL., 2013; HENSHER ET AL., 2003). A Tabela 1 resume os principais atributos levantados na literatura que foram incorporados ao modelo.

TABELA 1 – Atributos da qualidade percebida no transporte público.

Dimensão da Qualidade	Atributo Específico	Descrição	Base Teórica
Dimensão Temporal e de Confiabilidade	Confiabilidade e Pontualidade	A capacidade do sistema de cumprir os horários programados, sendo um dos aspectos operacionais mais relevantes para a confiança do usuário.	Hensher et al. (2003)
	Frequência e Previsibilidade	A frequência com que os ônibus passam e a previsibilidade dos horários de chegada e partida, que impactam diretamente a percepção do serviço.	Hensher et al. (2003)
	Tempo de Espera	A redução do tempo de espera nos pontos de ônibus, que está diretamente ligada à frequência e previsibilidade e melhora a satisfação geral.	Hensher et al. (2003)
Dimensão de Conforto e Experiência	Conforto na Viagem	Fatores físicos dentro do veículo que contribuem para uma experiência de viagem positiva.	Eboli & Mazzulla (2007)
	Limpeza dos Veículos	A higiene e conservação do interior dos ônibus, um fator fundamental para o conforto dos passageiros.	Eboli & Mazzulla (2007)
	Disponibilidade de Assentos	A existência de espaço suficiente para sentar-se, o que afeta diretamente o conforto, especialmente em viagens mais longas.	Eboli & Mazzulla (2007)
	Temperatura Interna	O controle da temperatura dentro do veículo (ar-condicionado/ventilação), citado como essencial pelos passageiros.	Eboli & Mazzulla (2007)
Dimensão de Acessibilidade e Atendimento	Acessibilidade Física	A facilidade de embarque e desembarque nos pontos e veículos, crucial para todos os usuários, especialmente para idosos e pessoas com mobilidade reduzida.	De Oña et al. (2013)
	Atendimento da Equipe	A qualidade da interação com motoristas e cobradores, incluindo cortesia e disposição para ajudar.	Hensher et al. (2003)
	Comunicação e Informação	A clareza e eficiência da comunicação sobre itinerários, horários e possíveis interrupções no serviço, que constroem a imagem de confiabilidade.	Hensher et al. (2003)

FONTE: O autor (2025).

Estudos demonstram que a redução dos tempos de espera e a previsibilidade dos horários melhoram significativamente a avaliação geral do serviço (HENSHER ET

AL., 2003). A função objetivo do modelo proposto neste trabalho busca incorporar esses fatores, alinhando a eficiência operacional com a qualidade da experiência do passageiro.

3. Metodologia

A metodologia desta pesquisa foi estruturada como um processo sequencial para o desenvolvimento e validação de um modelo de otimização. A seguir, detalha-se cada etapa:

Passo 1, definição do problema e abordagem: O problema de otimização das linhas de ônibus foi enquadrado como um Problema de Coleta e Entrega com Janelas de Tempo e Transbordo (PDPTWT). Foi adotada uma abordagem de modelagem exata, utilizando Programação Linear Inteira Mista (PLIM) para buscar soluções ótimas.

Passo 2, adaptação de modelos da literatura: A formulação matemática partiu da adaptação dos modelos de PDPTWT propostos por Rais, Alvelos e Carvalho (2014) e Lyu e Yu (2022), que forneceram a estrutura base para as restrições de fluxo, tempo e transbordo.

Passo 3, customização para o sistema de Curitiba: O modelo base foi customizado para refletir as regras operacionais do transporte de Curitiba, como ilustrado na Figura 1. As principais adaptações foram: a criação de uma hierarquia de veículos (BRT e Normal) com regras de acesso específicas; a modelagem de linhas como grupos de veículos forçados a seguir rotas idênticas; e a inclusão da frequência (*headway*) como uma variável de decisão a ser otimizada.

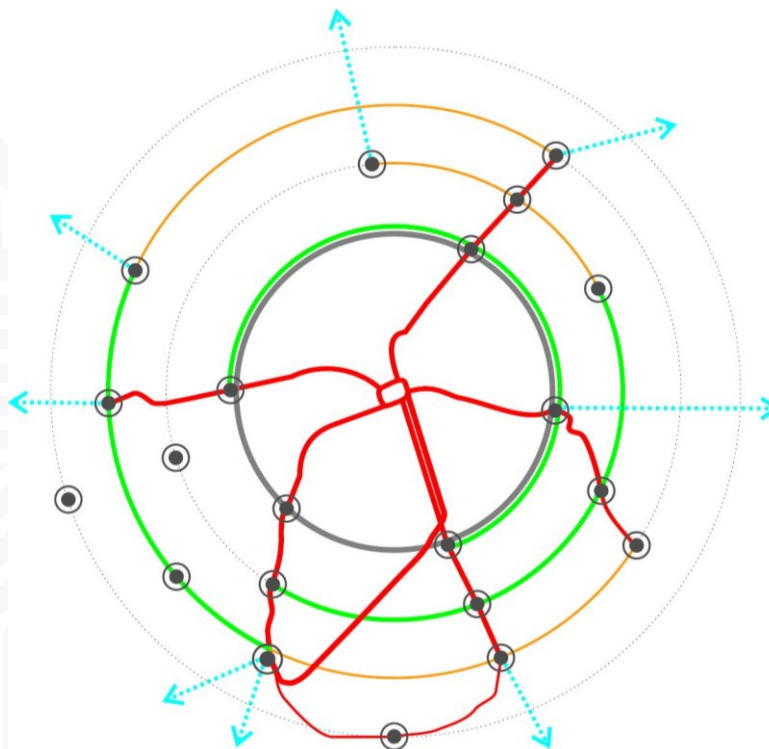
Passo 4, formulação matemática detalhada: O modelo foi formalmente descrito com seus conjuntos, parâmetros, variáveis de decisão, função objetivo e restrições, conforme detalhado a seguir.

Passo 5, implementação e geração de cenários: O modelo foi implementado na linguagem Python com o auxílio do solver Gurobi. Foram gerados cenários de teste com diferentes tamanhos de frota, volumes de demanda e horizontes de tempo para validar a formulação e avaliar sua performance computacional.

Passo 6, análise dos resultados: Os resultados das otimizações foram analisados sob três óticas: desempenho computacional (tempo de execução e gap de otimalidade), indicadores de qualidade de serviço por requisição (tempos de espera e de viagem) e indicadores de eficiência por veículo (distância percorrida e utilização).

36º ENANGRAD

Figura 1 – Esquema ilustrativo da estrutura espacial dos tipos de linhas em Curitiba, onde o traço vermelho representa os corredores expressos, o traço cinza representa a integração da linha direta, o traço verde representa a integração interbairros, o traço laranja representa a integração alimentador, os traços pontilhados ciano representam a integração com a área metropolitana e os círculos representam os terminais de integração urbanos



FONTE: URBS (2025)

3.1. Definições do Modelo

Conjuntos:

V : Conjunto de todos os nós (pontos de ônibus).

K : Conjunto de todos os veículos (ônibus).

R : Conjunto de requisições de transporte (passageiros).

T : Subconjunto de V representando os nós de transbordo.

Parâmetros:

O_k, D_k : Nó de origem e destino do veículo k .

Q_k : Capacidade (lotação) do veículo k .

c_{ij}, τ_{ij} : Custo e tempo de deslocamento na aresta (i,j) .

p_r, d_r : Nó de coleta (embarque) e entrega (desembarque) da requisição r .

q_r : Quantidade de passageiros na requisição r .

$[E_r, L_r]$: Janela de tempo para o início do serviço da requisição r .

W_{max} : Tempo máximo de espera em transbordo.

Variáveis de Decisão:

$x_{ijk} \in \{0,1\}$: 1 se o veículo k percorre o trecho (i,j) , 0 caso contrário.

$y_{ijkr} \in \{0,1\}$: 1 se a requisição r é transportada pelo veículo k no trecho (i,j) , 0 caso contrário.

$s_{tr,k1,k2} \in \{0,1\}$: 1 se a requisição r é transferida de $k1$ para $k2$ no nó de transbordo t , 0 caso contrário.

$e_{ik}, b_{ik} \in R^+$: Instante de chegada e partida do veículo k no nó i .

$w_{ijk} \in R^+$: Tempo de folga do veículo k no trecho (i,j) .

$H_g \in R^+$: *Headway* (intervalo) para a linha (grupo) g .

$BR_r \in R^+$: Instante de coleta da requisição r .

$t_{esp_{t,r,k_1,k_2}} \in R^+$: Tempo de espera da requisição r em transbordo no nó t .

3.2. Função Objetivo

A função objetivo multicritério visa equilibrar eficiência operacional e qualidade de serviço:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z = & \left(\sum_{k,i,j} c_{ij} x_{ijk} \right) + \left(\alpha \sum_{k,i} (b_{ik} - e_{ik}) \right) + \left(\beta \sum_{k,i,j} w_{ijk} \right) + \left(\gamma \sum_g H_g \right) + \\ & + \left(\varepsilon \sum_r (BR_r - E_r) \right) + \left(\delta \sum_{i,j,k,r} \tau_{ij} y_{ijk r} + \zeta \sum_{t,r,k_1,k_2} t_{esp_{t,r,k_1,k_2}} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ são parâmetros de ponderação para os custos de espera de veículos, folgas, *headway*, espera de passageiros na coleta, tempo de viagem de passageiros e espera em transbordo.

3.3. Restrições

As restrições que governam o modelo estão agrupadas abaixo de acordo com sua funcionalidade. Para cada grupo, são descritas as regras e indicadas suas origens nos trabalhos de referência.

O primeiro grupo é o de restrições de fluxo e rota de veículos. Neste grupo estão as regras de partida do veículo da origem e chegada ao destino, conservação de fluxo de veículos, proibição de retorno do veículo à origem, rotas idênticas por grupo de veículos, cobertura completa de linhas BRT, e restrição de acesso de veículos normais aos nós BRT. As três últimas restrições são de formulação exclusiva para este trabalho.

O segundo grupo é o de restrições de fluxo das requisições. As requisições representam a demanda de embarque de um grupo de passageiros, com origem e destino definidos. Este grupo de regras garante que o trajeto de cada requisição (embarque, transporte e desembarque) seja completo e logicamente consistente. Aqui tem-se restrições de atendimento de coleta e entrega, e de conservação de fluxo de requisições.

O terceiro grupo é o de restrições de acoplamento e capacidade, que conectam as decisões de roteirização dos veículos com o transporte das requisições, e gerencia a capacidade dos veículos. Neste grupo tem-se o vínculo veículo-restrição e a restrição de capacidade do veículo.

O quarto conjunto é o de restrições temporais. As regras são a de respeito à janela de tempo, a propagação de tempo, o *headway* escalonado por grupo, o limite de espera do veículo em um nó e o vínculo com o tempo de espera em nó de transbordo.

O quinto grupo é o de restrições de transbordo, e lida especificamente com a lógica de transferência de uma requisição de um veículo para outro em um nó de transbordo. As restrições deste grupo são de balanço de fluxo em transbordo, lógica da transferência, sincronização temporal, e proibição de transferência entre veículos do mesmo tipo.

O sexto grupo é o de restrições de vínculo de tempo por requisição. Estas restrições são necessárias para computar os instantes exatos da jornada de cada requisição e garantir a sua consistência lógica. O grupo é composto por restrições de vínculo com o tempo de entrega, por restrições de vínculo com o tempo de coleta, e uma restrição de procedência fundamental que garante que a coleta ocorra sempre antes da entrega. O último grupo é o de restrições auxiliares para lidar com subrotas.

Restrições de Fluxo e Rota dos Veículos:

$$\sum_{j \in V, j \neq O_k} x_{O_k, j, k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq D_k} x_{i, D_k, k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq m} x_{i, m, k} - \sum_{j \in V, j \neq m} x_{m, j, k} = 0 \quad \forall k \in K, \forall m \in V \setminus O_k, D_k \quad (4)$$

$$\sum_{j \in V, j \neq D_k} x_{D_k, j, k} = 0 \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq O_k} x_{i, O_k, k} = 0 \quad \forall k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq t} x_{i, t, k} \leq 1 \quad \forall k \in K, \forall t \in T \quad (7)$$

$$x_{ijk1} = x_{ijk2} \quad \forall g, \forall k1, k2 \in K_g, \forall i, j \in V \quad (8)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq t} x_{i, t, k} \geq 1 \quad \forall k \in K_{BRT}, \forall t \in L_k \quad (9)$$

$$x_{ijk} = 0 \quad \forall k \in K_{BRT}, \forall (i, j) \text{ tal que } i \notin V_{BRT} \text{ ou } j \notin V_{BRT} \quad (10)$$

Restrições de Fluxo das Requisições:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V, j \neq p_r} y_{p_r, j, k, r} = 1 \quad \forall r \in R \quad (11)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V, i \neq d_r} y_{i, d_r, k, r} = 1 \quad \forall r \in R \quad (12)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq m} y_{i, m, k, r} - \sum_{j \in V, j \neq m} y_{m, j, k, r} = 0 \quad \forall r \in R, \forall k \in K, \forall m \in V \setminus p_r, d_r \cup T \quad (13)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V, i \neq p_r} y_{i, p_r, k, r} = 0 \quad \forall r \in R \quad (14)$$

Restrições de Acoplamento e Capacidade:

$$y_{ijk, r} \leq x_{ijk} \quad \forall i, j \in V, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (15)$$

$$\sum_{r \in R} q_r \cdot y_{ijk, r} \leq Q_k \cdot x_{ijk} \quad \forall i, j \in V, i \neq j, \forall k \in K \quad (16)$$

Restrições Temporais:

$$e_{p_r, k} \geq E_r - M \cdot \left(1 - \sum_{j \in V} y_{p_r, j, k, r} \right) \quad \forall r \in R, \forall k \in K \quad (17)$$

$$b_{p_r,k} \leq L_r + M \cdot \left(1 - \sum_{j \in V} y_{p_r,j,k,r} \right) \quad \forall r \in R, \forall k \in K \quad (18)$$

$$e_{ik} \leq b_{ik} \quad \forall i \in V, \forall k \in K \quad (19)$$

$$b_{ik} + \tau_{ij} + w_{ijk} - e_{jk} \leq M \cdot (1 - x_{ijk}) \quad \forall i, j \in V, i \neq j, \forall k \in K \quad (20)$$

$$b_{ik} + \tau_{ij} + w_{ijk} - e_{jk} \geq -M \cdot (1 - x_{ijk}) \quad \forall i, j \in V, i \neq j, \forall k \in K \quad (21)$$

$$b_{o_{k_i},k_i} = b_{o_{k_0},k_0} + c \cdot H_g \quad \forall g, \forall l \in c, \dots, n \quad (22)$$

$$b_{ik} - e_{ik} \leq T_{espera_{max}} \quad \forall i \in V, \forall k \in K \quad (23)$$

Restrições de Transbordo:

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V, i \neq t} y_{i,t,k,r} - \sum_{k \in K} \sum_{j \in V, j \neq t} y_{t,j,k,r} = 0 \quad \forall r \in R, \forall t \in T \setminus p_r, d_r \quad (24)$$

$$\sum_{j \in V} y_{j,t,k_1,r} + \sum_{j \in V} y_{t,j,k_2,r} \leq s_{tr,k_1,k_2} + 1 \quad \forall t \in T, \forall r \in R, \forall k_1, k_2 \in K, k_1 \neq k_2 \quad (25)$$

$$e_{t,k_1} - e_{t,k_2} \leq M \cdot (1 - s_{tr,k_1,k_2}) \quad \forall t \in T, \forall r \in R, \forall k_1, k_2 \in K, k_1 \neq k_2 \quad (26)$$

$$s_{tr,k_1,k_2} = 0 \quad \forall t \in T, \forall r \in R, \forall k_1, k_2 \in K \text{ tal que } k_1 \neq k_2 \text{ e } Tipo(k_1) = Tipo(k_2) \quad (27)$$

$$t_{esp_{t,r,k_1,k_2}} \geq e_{t,k_2} - e_{t,k_1} - M \cdot (1 - s_{tr,k_1,k_2}) \quad \forall t \in T, \forall r \in R, \forall k_1, k_2 \in K, k_1 \neq k_2 \quad (28)$$

$$t_{esp_{t,r,k_1,k_2}} \leq W_{max} \cdot s_{tr,k_1,k_2} \quad (29)$$

$$s_{t,r,k_1,k_2} + s_{t,r,k_2,k_1} \leq 1 \quad \forall k_1 < k_2 \quad (30)$$

Restrições de Vínculo e Sub-rotas:

$$BR_r \geq b_{p_r,k} - M \cdot \left(1 - \sum_{i \in V} y_{p_r,i,k,r} \right) \quad \forall r \in R, \forall k \in K \quad (31)$$

$$BR_r \leq b_{p_r,k} + M \cdot \left(1 - \sum_{i \in V} y_{p_r,i,k,r} \right) \quad \forall r \in R, \forall k \in K \quad (32)$$

$$x_{ijk} \leq z_{ijk} \quad \forall i, j \in V, i \neq j, \forall k \in K \quad (33)$$

$$z_{ijk} + z_{jik} = 1 \quad \forall i \notin T_o, j \notin T_d, i \neq j, \forall k \quad (34)$$

$$z_{ijk} + z_{jlk} + z_{lik} \leq 2 \quad \forall i, j, l \notin T_o \cup T_d, \forall k \in K \quad (35)$$

3.4 Geração de Cenários

Para validar e testar a capacidade foi necessário gerar um conjunto diversificado de cenários que simulassem diferentes condições operacionais. A geração desses cenários foi projetada para avaliar a robustez, a escalabilidade e a sensibilidade do modelo a variações em parâmetros-chave, como a configuração da frota, o volume de demanda e os limites operacionais.

A abordagem consistiu em criar instâncias do problema com diferentes tamanhos e características. Para garantir a reprodutibilidade dos testes e permitir uma comparação justa entre diferentes execuções, foi utilizada uma semente (seed) fixa

para a geração de dados aleatórios, como a localização dos pontos de coleta/entrega e a quantidade de passageiros por requisição.

Os parâmetros utilizados para construir os cenários foram os seguintes (em parênteses o valor fixo para todos os cenários para garantir uma base de comparação): Número de pontos de ônibus convencionais (10), coordenadas para a localização dos pontos, quantidade de veículos designados para operar nas linhas BRT, número de linhas ou grupos de ônibus convencionais, quantidade de veículos em cada linha convencional, lotação máxima de passageiros para cada tipo de veículo (normal: 85, BRT: 250), duração total do período de planejamento em segundos, duração da janela de tempo para a coleta de cada requisição (15 minutos), quantidade de viagens de passageiros para cada cenário, tempo máximo de espera em um ponto de transbordo (10 minutos), percentual máximo de folga de trânsito (10%), tempo máximo de espera do veículo em uma parada (30 segundos), limites para o *headway* (normal: entre 15 e 60 minutos, BRT: entre 2 e 20 minutos).

Os cenários foram gerados de forma simétrica para imitar situações de demanda de início e fim de dia, com fluxos de passageiros das linhas normais para o sistema BRT (pico da manhã) e do BRT para as linhas normais (pico da tarde). A capacidade dos veículos foi definida com base em valores conhecidos da frota de Curitiba.

A Tabela 2 detalha as configurações específicas de cada cenário gerado, variando o número de veículos, grupos (linhas) e, principalmente, o perfil da demanda de requisições, para estressar o modelo em diferentes condições.

36º ENANGRAD

TABELA 2 – num_veículos_brt1 e brt2 representa o número de veículos BRT total, num_grupos_normais é a quantidade de linhas normais, num_veículos por grupo normal é a quantidade de veículos de cada linha normal, horizonte_simulacao é o tempo de planejamento total em segundos, as outras colunas representam quantas requisições tem tal origem e destino (n-brt1 é uma requisição que sai de um ponto normal e tem como destino brt1).

Cenário	num_ veículos _ brt1 e brt2	num_ grupos _ normais	num veículos por grupo normal	horizonte simulacao	n- brt1	n- brt2	brt1- n	brt2- n	brt1	brt2	brt1 - brt2	brt2 - brt1
S0_0	4	2	2	1800	1	1	0	0	0	0	0	0
S0_1	4	2	2	1800	0	0	1	1	0	0	0	0
S1_0	8	2	4	3600	3	3	1	1	1	1	0	0
S1_1	8	2	4	3600	1	1	3	3	1	1	0	0
S2_0	8	2	4	3600	5	5	1	1	1	1	1	1
S2_1	8	2	4	3600	1	1	5	5	1	1	1	1
S3_0	12	2	6	5400	5	5	1	1	1	1	1	1
S3_1	12	2	6	5400	1	1	5	5	1	1	1	1
S4_0	12	4	6	5400	6	6	2	2	2	2	2	2
S4_1	12	4	6	5400	2	2	6	6	2	2	2	2
S5_0	16	4	8	5400	6	6	2	2	2	2	2	2
S5_1	16	4	8	5400	2	2	6	6	2	2	2	2
S6_0	16	4	8	5400	10	10	2	2	2	2	2	2
S6_1	16	4	8	5400	2	2	10	10	2	2	2	2
S7_0	16	4	8	5400	5	5	5	5	5	5	5	5
S8_0	20	6	8	7200	10	10	4	4	4	4	4	4
S8_1	20	6	8	7200	4	4	10	10	4	4	4	4
S9_0	20	6	8	7200	16	16	0	0	0	0	0	0
S9_1	20	6	8	7200	0	0	16	0	0	0	0	0

FONTE: O autor (2025)

4. Análise e Discussão dos Resultados

Os experimentos foram conduzidos em um processador AMD Threadripper 7960X com 128GB de RAM, utilizando Python e Gurobi 12.0.1, com os pesos da função objetivo definidos como $\alpha=0,01$, $\beta=0,01$, $\gamma=0,001$, $\delta=0,01$, $\epsilon=0,01$ e $\zeta=0,10$. A Tabela 3 resume o desempenho computacional para as instâncias resolvidas.

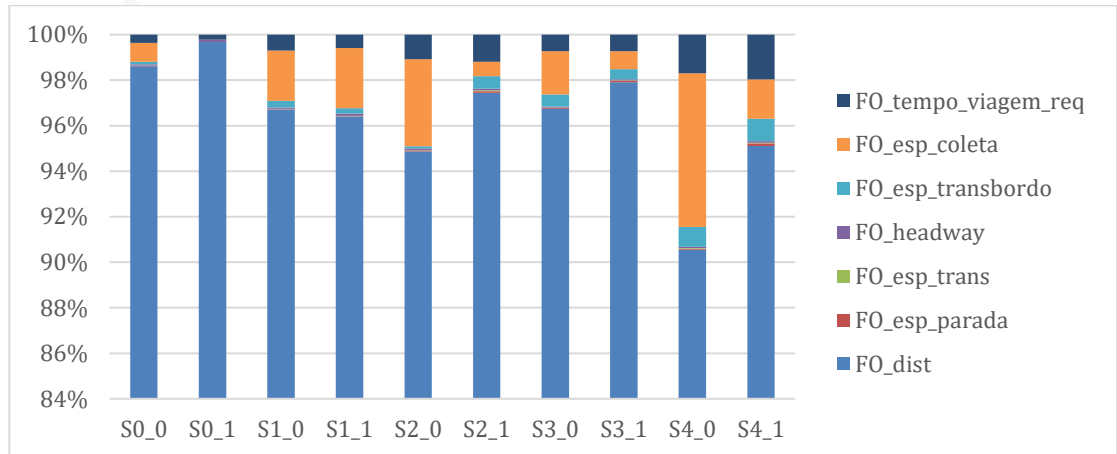
TABELA 3 – Desempenho computacional de cada instância, ordenado por instância, expondo as colunas de quantidade total de requisições, quantidade total de veículos, tempo de execução Runtime em segundos e diferença da solução ótima mip_gap onde 1 é 100%.

Instância	Requisições	Veículos	Runtime	mip_gap
S0_0	2	12	0,958	0,0098
S0_1	2	12	0,639	0,0003
S1_0	10	24	625,416	0,0255
S1_1	10	24	46,830	0,0297
S2_0	16	24	4822,636	0,0300
S2_1	16	24	2730,953	0,0126
S3_0	16	36	11126,713	0,0245
S3_1	16	36	9762,230	0,0281
S4_0	28	24	38802,335	0,0718
S4_1	28	24	2174,299	0,0286

FONTE: O autor (2025)

A decomposição da função objetivo (Figura 2) revelou uma dominância do componente de distância, que representa a maior parte do custo total. Isso indica que, embora o modelo ajuste aspectos temporais, a minimização da distância percorrida pelos veículos é o fator preponderante nas soluções, o que pode ofuscar melhorias marginais em métricas de qualidade de serviço que exigiriam desvios de rota.

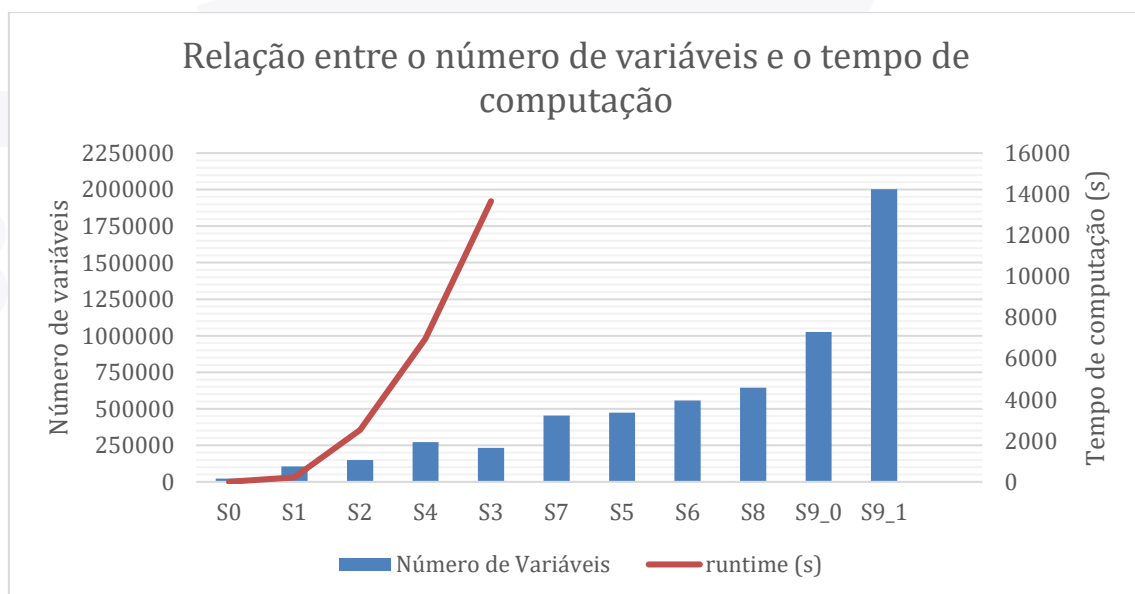
Figura 2 – Gráfico de decomposição da função objetivo por instância



FONTE: O autor (2025)

O desafio mais significativo foi a escalabilidade computacional. Como esperado para um modelo exato de um problema NP-hard, o tempo de execução cresceu exponencialmente com o aumento do número de requisições (Figura 3), tornando a resolução de cenários maiores inviável em tempo hábil e limitando a análise a instâncias de menor porte.

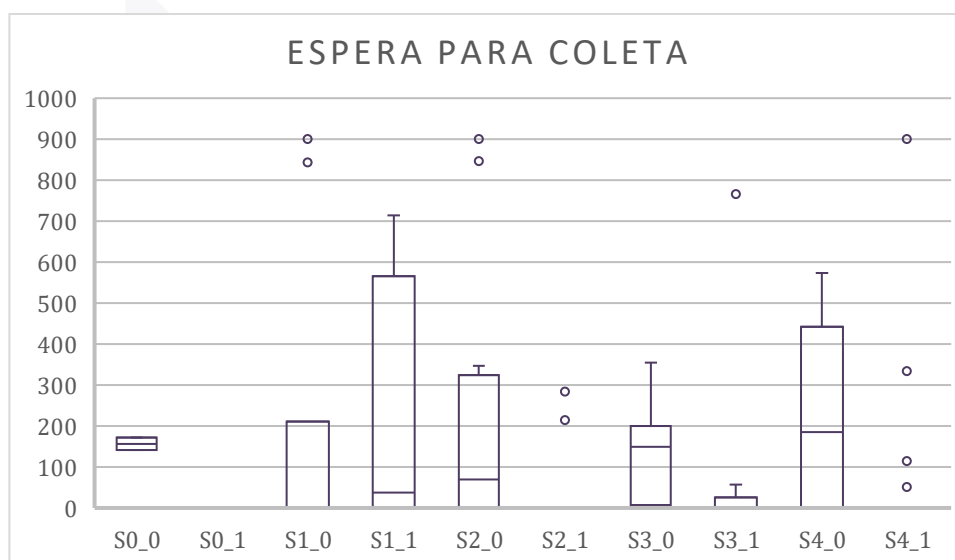
Figura 3 – Gráfico comparativo entre o número de variáveis e o tempo de computação para cada cenário, considerando o tempo médio para encontrar a solução final entre as variantes de cada cenário (com exceção de S9 onde os dois cenários foram apresentados)



FONTE: O autor (2025)

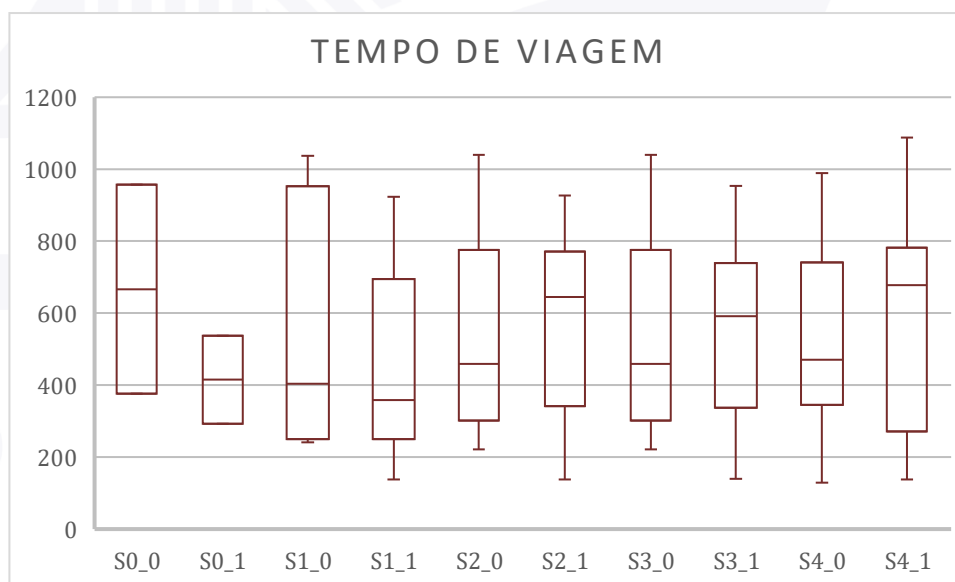
Em relação à qualidade de serviço, o modelo demonstrou ser eficaz na otimização da dimensão temporal. A análise por requisição (Figura 4) mostrou que o tempo de espera para coleta foi minimizado, com a maioria das coletas ocorrendo próximo ao início das janelas de tempo. No entanto, o tempo total de viagem (Figura 5) não apresentou variações significativas entre os cenários, reforçando a ideia de que as rotas espaciais são menos flexíveis que os ajustes de cronograma.

Figura 4 – Boxplot de tempo de espera para coleta por cenário



FONTE: O autor (2025)

Figura 5 – Boxplot de tempo de viagem de cada cenário



FONTE: O autor (2025)

A análise por veículo indicou uma distribuição de carga de trabalho (distância percorrida) relativamente homogênea, sem sobrecarregar veículos específicos. O modelo também otimizou a frequência das linhas, atribuindo *headways* menores (maior frequência) às linhas BRT, o que é consistente com a hierarquia operacional do sistema de Curitiba. A análise de sensibilidade, variando os pesos da função

objetivo, confirmou que as principais mudanças ocorreram nos horários e na sincronização, enquanto as rotas espaciais permaneceram estáveis.

5. Conclusão e Contribuições

Este trabalho desenvolveu um modelo de otimização exato para o planejamento de linhas de ônibus urbanos. A principal contribuição teórica reside na formulação de um modelo híbrido que incorpora características operacionais do mundo real. O modelo provou ser uma ferramenta eficaz para a otimização no eixo temporal.

Do ponto de vista prático, a pesquisa oferece uma ferramenta de base matemática para auxiliar gestores no planejamento estratégico e na análise de cenários em menor escala. Os resultados expuseram as limitações inerentes às abordagens exatas, principalmente o desafio da escalabilidade.

As limitações do estudo abrem caminho para investigações futuras. Sugere-se o desenvolvimento de algoritmos heurísticos e meta-heurísticos para resolver instâncias de grande porte, utilizando o modelo exato como benchmark. Outras sugestões de pesquisa incluem a aplicação de técnicas de decomposição, a incorporação de incerteza (modelagem estocástica) e a exploração de abordagens de otimização multiobjetivo.

Referências Bibliográficas

ASSOCIAÇÃO NACIONAL DAS EMPRESAS DE TRANSPORTES URBANOS.

Anuário NTU 2022-2023: panorama do transporte urbano de passageiros no Brasil. Brasília, DF: NTU, 2023. Disponível em: <https://ntu.org.br/novo/upload/Publicacao/Pub638573500081945042.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2025.

BALDACCI, R.; MINGOZZI, A.; ROBERTI, R. Recent exact algorithms for solving the vehicle routing problem under capacity and time window constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 218, n. 1, p. 1–6, 2012.

BERBEGLIA, G.; CORDEAU, J.-F.; GRIBKOVSKAIA, I.; LAPORTE, G. Static pickup and delivery problems: a classification scheme and survey. **TOP**, v. 15, n. 1, p. 1–31, 2007.

BERBEGLIA, G.; CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G. Dynamic pickup and delivery problems. **European Journal of Operational Research**, v. 202, n. 1, p. 8–15, 2010.

BERTSIMAS, D.; SIM, M. The price of robustness. **Operations Research**, v. 52, n. 1, p. 35–53, 2004.

CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. **Operations Research**, v. 12, n. 4, p. 568–581, 1964.

COELHO, L. C.; CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G. Thirty years of inventory routing. **Transportation Science**, v. 48, n. 1, p. 1–19, 2013.

CORDEAU, J.-F.; GENDREAU, M.; LAPORTE, G. A tabu search heuristic for periodic and multi-depot vehicle routing problems. **Networks**, v. 30, n. 2, p. 105–119, 1997.

CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G. The dial-a-ride problem: models and algorithms. **Annals of Operations Research**, v. 153, n. 1, p. 29–46, 2007.

DANTZIG, G. B.; RAMSER, J. H. The truck dispatching problem. **Management Science**, v. 6, n. 1, p. 80–91, 1959.

DE OÑA, J. et al. Perceived service quality in bus transit service: A structural equation approach. **Transport Policy**, v. 29, p. 219–226, set. 2013.

DESAULNIERS, G.; DESROSIERS, J.; SOLOMON, M. M. **Column Generation**. Boston, Ma: Springer Science+Business Media, Inc, 2005.

EBOLI, L.; MAZZULLA, G. Service Quality Attributes Affecting Customer Satisfaction for Bus Transit. **Journal of Public Transportation**, v. 10, n. 3, p. 21–34, set. 2007.

GENDREAU, M.; HERTZ, A.; LAPORTE, G. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem. **Management Science**, v. 40, n. 10, p. 1276–1290, 1994.

GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; POTVIN, J.-Y. Metaheuristics for the capacitated VRP. In: GOLDEN, B.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E. (Eds.). **The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges**. Springer, 2008. p. 87–106.

HENSHER, D. A.; STOPHER, P.; BULLOCK, P. Service quality—developing a service quality index in the provision of commercial bus contracts. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, v. 37, n. 6, p. 499–517, jul. 2003.

HIERMANN, G.; PUCHINGER, J.; ROPKE, S.; HARTL, R. F. The electric fleet size and mix vehicle routing problem with time windows and recharging stations. **European Journal of Operational Research**, v. 252, n. 3, p. 995–1018, 2016.

JAILLET, P.; WAGNER, M. R. Online vehicle routing problems: a survey. In: GOLDEN, B.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E. (Eds.). **The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges**. Springer, 2008. p. 221–237.

LAPORTE, G. Fifty years of vehicle routing. **Transportation Science**, v. 43, n. 4, p. 408–416, 2009.

LENSTRA, J. K.; RINNOOY KAN, A. H. G. Complexity of vehicle routing and scheduling problems. **Networks**, v. 11, n. 2, p. 221–227, 1981.

LIN, C.; CHOY, K. L.; HO, G. T. S.; CHUNG, S. H. Survey of green vehicle routing problem: past and future trends. **Expert Systems with Applications**, v. 41, n. 4, p. 1118–1138, 2014.

LYU, Z.; YU, A. J. The pickup and delivery problem with transshipments: Critical review of two existing models and a new formulation. **European Journal of Operational Research**, jun. 2022.

MLADENOVIĆ, N.; HANSEN, P. Variable neighborhood search. **Computers & Operations Research**, v. 24, n. 11, p. 1097–1100, 1997.

MOOVIT. **Relatórios Globais de Transporte Público**. [S.l.], 2025. Disponível em: <https://moovitapp.com/report>. Acesso em: 28 jul. 2025.

NANRY, W. P.; BARNES, J. W. Solving the pickup and delivery problem with time windows using reactive tabu search. **Transportation Research Part B: Methodological**, v. 34, n. 2, p. 107–121, 2000.

ÖNCAN, T.; ALTINEL, İ. K.; LAPORTE, G. A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations. **Computers & Operations Research**, v. 36, n. 3, p. 637–654, mar. 2009.

OSMAN, I. H. Metastrategy simulated annealing and tabu search algorithms for the vehicle routing problem. **Annals of Operations Research**, v. 41, n. 4, p. 421–451, 1993.

RAIS, A.; ALVELOS, F.; CARVALHO, M. S. A new MIP model for the pickup-and-delivery problem with transshipment. **European Journal of Operational Research**, v. 235, n. 2, p. 530–539, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.038>.

ROPKE, S.; CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G. Models and branch-and-cut algorithms for pickup and delivery problems with time windows. **Networks**, v. 49, n. 4, p. 258–272, 2007.

SAVELSBERGH, M. W. P.; SOL, M. The general pickup and delivery problem. **Transportation Science**, v. 29, n. 1, p. 17–29, 1995.

SCHNEIDER, M.; STENGER, A.; GOEKE, D. The electric vehicle-routing problem with time windows and recharging stations. **Transportation Science**, v. 48, n. 4, p. 500–520, 2014.

SOLOMON, M. M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. **Operations Research**, v. 35, n. 2, p. 254–265, 1987.

URBANIZAÇÃO DE CURITIBA S. A. **URBS**. Curitiba, 2025. Website institucional. Disponível em: <https://www.urbs.curitiba.pr.gov.br/>. Acesso em: 27 jul. 2025.