II SEMANA DA MATEMÁTICA DO IFNMG
12 a 14 de novembro de 2019
Salinas – Minas Gerais – Brasil

LEMA DE GERGOSHIN APLICADO NO GEOGEBRA

1 Gentil José de Oliveira Neto; 2 Gustavo Pereira Gomes.

1 Discente. Licenciatura em Matemática. Instituto Federal do Norte de Minas Gerais; 2 Docente. Licenciatura em Matemática. Instituto Federal do Norte de Minas Gerais.

Resumo

Os autovalores e autovetores de uma matriz quadrada de ordem n são coeficientes relacionados com as propriedades intrínsecas das matrizes. Além das diversas aplicações dos autovalores (e autovetores) na própria matemática, como cálculo de potências de matrizes diagonalizáveis, formas canônicas, resolução de equações diferenciais e no reconhecimento de cônicas, os autovalores também possuem aplicabilidade na acústica, na mecânica de fluidos, dinâmica populacional, na pesquisa de sites no Google, entre outros. Sendo assim, devido a importância destes conceitos, é necessário que seja feito um estudo detalhado para determina-los. Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo descrever o Lema de Gergoshin que determina as regiões no Plano de Argand-Gauss que se localizam os autovalores de uma matriz quadrada complexa e, ilustrá-lo no software GeoGebra.

Palavras-chave: álgebra linear; autovalor; lema de Gergoshin; GeoGebra.

Introdução

Desde o início das primeiras civilizações, os homens buscam instrumentos, técnicas e estratégias para resolver os problemas diários. Com o passar dos anos e com a organização intelectual, estas técnicas desenvolvidas foram se aperfeiçoando de acordo com a necessidade da sociedade e, consequentemente, a matemática começou a ser desenvolvida.

Devido a escassez de água no Egito Antigo (região localizada no baixo oriente médio próxima as margens do Rio Nilo), considerada uma das primeiras civilizações, foi necessário a criação de barragens para o armazenamento da água das chuvas e, por isso, a matemática já estava presente no cotidiano destes povos. Muitos problemas matemáticos de cunho prático foram registrados em papiros e um dos mais famosos é o Papiro de Rhind, de cerca de 1650 a.c., que contém cerca de 85 problemas, sendo que alguns deles já abordavam conceitos da Álgebra Linear como os sistemas lineares.

Atualmente, a Álgebra Linear se destaca pela grande aplicabilidade em várias áreas, por exemplo, na acústica, na mecânica de fluidos, na dinâmica populacional, em pesquisas de sites no Google, entre outros. Segundo Lima (2009), “a Álgebra Linear é o ramo da matemática que estuda os espaços vetoriais e as transformações lineares entre eles”.

> Nos últimos anos, a Álgebra Linear se tornou parte essencial do conhecimento matemático básico exigido de matemáticos e professores de Matemática, engenheiros, cientistas da computação, físicos, economistas e estatísticos, entre

> outros. Essa exigência reflete a importância e as múltiplas aplicações desse assunto. (LIPSCHUTZ, p. 6)

O matemático soviético Semyon Aranovich Gershgorin (1901-1933), pesquisador das equações diferenciais, publicou em 1931 o texto intitulado *Uber die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix* na qual descreve e demonstra um método simples para estimar os autovalores de uma matriz complexa. Futuramente, este resultado passou a ser chamado de *Lema de Gergoshin* ou *Teorema dos discos de Gergoshin*.

Material e métodos/Metodologia

Inicialmente, realizou-se uma pesquisa bibliográfica a fim de identificar materiais, como livros e artigos científicos, que abordam os autovalores e autovetores, bem como as aplicabilidades e a demonstração do Lema de Gergoshin. Em seguida, realizou-se o estudo destes tópicos para que, posteriormente, fosse possível adaptar o conhecimento adquirido as ferramentas do software GeoGebra com o objetivo de apresentar este resultado de modo simples e dinâmico.

Resultados e discussão

A. Autovalor/Autovetor e o Lema de Gergoshin

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, diz-se que um autovetor de A é uma matriz coluna v (nx1) não-nula tal que Av é um múltiplo de v, ou seja, Av=rv. Neste caso, dizemos que o número r é um autovalor de A associado ao autovalor v. Sendo assim, dada uma matriz quadrada A, a estratégia mais utilizada para determinar os autovalores dessa matriz é através do cálculo das raízes do polinômio característico p(x), na qual é definido pelo determinante da matriz A-xI (onde I é a matriz identidade da mesma ordem de A).

Entretanto, calcular o determinante de uma matriz pode ser bastante trabalhoso, principalmente quando a matriz possui ordem elevada e entradas complexas. Por este motivo, surge a necessidade de se desenvolver métodos mais simples para resolver este tipo de problema e, uma das maneiras de prever os autovalores de uma matriz complexa no plano complexo, sem calcular explicitamente seus autovalores, é utilizando o Lema de Gergoshin.

Este lema diz o seguinte: considere A uma matriz complexa de ordem n e os discos de centro a_{ii} e raio r_i ($i=1,...,n$), onde $r_i=\Sigma\ |a_{ij}|$ com j variando de 1 a n e diferente de i, então o conjunto dos autovalores de A está contido na reunião destes n discos.

B. Construção do resultado no GeoGebra

A construção a seguir é referente a matriz complexa A cujos elementos estão representados na Figura 1. a). Para explorar ao máximo a dinamicidade do GeoGebra, declaramos cada entrada da matriz A em separado, por exemplo, no campo de entrada, informa-se $z_{11}=1+i$, $z_{12}=2-i$ e assim por diante. Depois, ainda no campo de entrada, digitamos $A=\{\{z_{11}, z_{12}, z_{13}\}, \{z_{21}, z_{22}, z_{23}\}, \{z_{31}, z_{32}, z_{33}\}\}$ para que a matriz seja gerada. Observe que cada elemento da matriz vai estar representado no plano cartesiano de forma que podemos movimentá-los, obtendo assim, variações.

O próximo passo é construir os discos de Gergoshin. Para o primeiro deles, neste caso são três, informa-se no campo de entrada o seguinte comando: Círculo(z_{11}, Módulocomplexo(z_{12}) + Módulocomplexo(z_{13})), onde, para facilitar a construção, foi criado a ferramenta Módulocomplexo{arg} que determina o módulo do número complexo informado. Repetindo este procedimento, determina-se os discos.

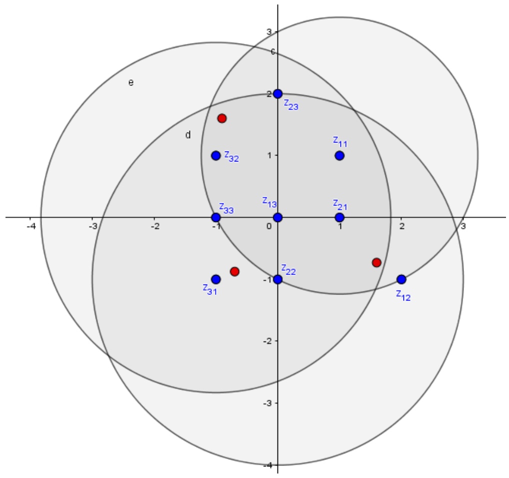
Por último, para verificar a validade do resultado, na janela CAS pode-se calcular os autovalores de A com o comando Autovalores(A), pontos verdes na Figura 1. b).

Figura 1

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i & 0 \\ 1 & -i & 2i \\ -1-i & -1+i & -1 \end{pmatrix}$$

b)



Conclusão(ões)/Considerações finais

Em muitos casos, o cálculo dos autovalores de uma matriz quadrada com entradas complexas é bastante trabalhoso devido ao cálculo de determinantes, principalmente quando a ordem da matriz considerada é alta. Neste sentido, é importante que outros métodos possam ser discutidos e desenvolvidos para solucionar problemas desta natureza.

Sendo assim, um dos métodos que auxiliam este tipo de situação é o Lema de Gergoshin que mostra, de modo simples, a região no Plano de Argand-Gauss na qual estão localizados todos os autovalores da matriz complexa considerada. Este fato alinhado ao uso do software Geogebra permite a visualização dos conceitos abordados no Lema de Gergoshin, dinamizando a aprendizagem do resultado.

Portanto, associações deste tipo são importantes para a aprendizagem da matemática devido a dinamicidade do software, visualização dos objetos matemáticos considerados e da simplicidade de construção dos elementos envolvidos.

Agradecimentos

Ao IFNMG por oportunizar o evento e pelo apoio logístico.

Referências

CALLIOLI, C. A. DOMINGUES, H. H. COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1990.

MARQUIS, D. **Gershgorin’s Circle Theorem for Estimating the Eigenvalues of a Matrix with Known Error Bounds**. 2016. Disponível em: < http://math.stmarys-ca.edu/wp-content/uploads/2017/07/David-Marquis.pdf >. Acesso em: 26 Out. 2019.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.