



TÉCNICA DE PARAMETRIZAÇÃO CARTESIANA PARA ANÁLISE DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES

A Cartesian Parametrization Technique for Strain Localization Analysis

Lucas Aleksander Faccini Fioresi (1); Roque Luiz da Silva Pitangueira (2); Samuel Silva Penna (3)

(1) Engenheiro Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil. (P)

(2) Dr. Prof., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.

Email para Correspondência: lucasaleksander@gmail.com; (P) Apresentador

Resumo: Este trabalho objetiva descrever o uso da técnica de parametrização cartesiana em uma análise de localização de deformações desvinculada da escolha de modelos constitutivos. A implementação proposta foi realizada na plataforma INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), um projeto de código aberto desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. O fenômeno de localização de deformações consiste no surgimento de uma região estreita no material onde deformações inelásticas e fenômenos irreversíveis tendem a se concentrar. Ele pode ser observado experimentalmente em materiais parcialmente frágeis, metais e geomateriais. A localização possui efeito prejudicial na integridade da estrutura e age como precursor da falha estrutural. Em simulações numéricas, a localização de deformações resulta na perda de elipticidade das equações diferenciais governantes do problema de valor de contorno, tornando-o mal-posto. A análise de localização de deformações está associada a descontinuidades fracas e instabilidades materiais que ocorrem durante uma análise fisicamente não linear de estruturas. A singularidade do tensor acústico é considerada como condição clássica para a localização de deformações e pode ser avaliada de maneira independente de modelo constitutivo. Neste contexto, a análise de localização consiste na busca por um vetor de direção unitário que torna o tensor acústico singular. Este vetor unitário é normal à superfície de descontinuidade no corpo, criada pelo fenômeno de localização de deformações. Numericamente, a análise de localização pode ser abordada como um problema de otimização do determinante do tensor acústico. A direção do vetor unitário pode ser parametrizada através de diferentes técnicas. Em cenários nos quais a região de degradação material é conhecida, a parametrização cartesiana mostra-se mais eficiente na detecção de pontos de interesse (mínimos do determinante do tensor acústico) quando comparada às técnicas tradicionais, como a parametrização esférica. Ao final de uma análise de localização, obtém-se informações pertinentes a métodos de regularização do contínuo. Em uma análise multiescala, pontos de instabilidade material podem ser utilizados para definir domínios locais.

Palavras chaves: Localização de Deformações; Análise Fisicamente Não Linear; Técnicas de Parametrização.



XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



Abstract: This paper aims to describe the cartesian parametrization technique in a strain localization analysis detached from constitutive model selection. The proposed implementation was performed on the INSANE (Interactive Structural Analysis Environment) platform, an open source project developed by the Structural Engineering Department of the Federal University of Minas Gerais. Strain localization consists on the emergence of a narrow region in a material where inelastic deformation and irreversible phenomena tend to concentrate. This phenomenon is observed experimentally in quasi-brittle media, metals and geo-materials. Localization has a detrimental effect on the structure integrity and acts as a precursor to structural failure. In numerical simulations, strain localization results in loss of ellipticity of the differential equations governing the boundary value problem. As a result, the boundary value problem may become ill-posed. Strain localization is associated with weak discontinuities and materials instabilities that occur during physically nonlinear structural analysis. Singularity of the acoustic tensor is considered the classical condition for strain localization and it can be calculated regardless of constitutive model selection. In this context, localization analysis consists in searching for a unit vector which defines the direction at which the acoustic tensor becomes singular. This unit vector points towards the normal direction of the discontinuity surface in the body, which is created by the localization phenomenon. Numerically, localization analysis can be approached as an optimization problem of the acoustic tensor determinant. It is possible to use parametrization techniques to obtain the unit vector's direction. In scenarios where regions of material degradation are known, the cartesian parametrization is more efficient detecting optimal points (minimum of the acoustic tensor determinant) when compared with traditional techniques, such as spherical parametrization. At the end of localization analysis, one obtains valuable input for regularization methods. In a multiscale analysis, points of material instabilities can be used to define local domains.

Keywords: *Strain Localization; Physically Nonlinear Analysis; Parametrization Techniques.*



1 INTRODUÇÃO

O fenômeno de localização de deformações consiste no surgimento de uma região estreita no material onde deformações inelásticas e fenômenos irreversíveis tendem a se concentrar. O estudo desta falha material localizada é importante, uma vez que a localização possui efeito prejudicial na integridade da estrutura e age como precursor da falha estrutural, por vezes em condições não consideradas durante o dimensionamento.

Sob um ponto de vista cinemático, a região de concentração da deformação pode ser representada por uma descontinuidade forte, que incorpora um salto no campo de deslocamentos e uma singularidade no campo de deformações. Alternativamente, ela pode ser tratada a partir de duas descontinuidades fracas, que constituem uma banda de espessura finita que delimita a zona de falha. Neste caso, há um salto no campo de deformações, mas o campo de deslocamentos permanece contínuo (Jirasék, 2001).

Experimentalmente, a localização de deformações pode ser observada em diversos tipos de materiais, como materiais parcialmente frágeis (Cedolin et al. (1987)), metais (Nadai (1931) e Duszek-Perzyna e Perzyna (1993)) e geomateriais (Alshibli e Sture (2000) e Desrues e Viggiani (2004)).

Em simulações numéricas, a localização de deformações está associada à perda de elipticidade das equações diferenciais governantes do Problema de Valor de Contorno (PVC). Nesta condição, diz-se que o PVC se torna mal-posto e admite um número infinito de soluções possíveis, incluindo as que envolvem descontinuidades (de Borst, 2004).

Soluções numéricas de um PVC mal-posto são dependentes da discretização adotada. No caso do Método dos Elementos Finitos (MEF), o refinamento da malha resulta em um comportamento mais frágil da estrutura, uma vez que a largura da zona de localização depende do menor volume de material admissível, ou seja, do menor elemento finito da malha. Fisicamente, a energia dissipada no processo de fratura tende a zero com o refinamento da malha, tornando as soluções numéricas incompatíveis com fundamentos da Mecânica da Fratura.

A falha na representação da localização de deformações não é exclusiva ao MEF e pode ser observada em diferentes métodos numéricos, como os Métodos sem Malha (Pamin, 2011).

Uma análise estrutural fisicamente não linear requer uma descrição fidedigna do comportamento material, possibilitando a obtenção de trajetórias de equilíbrio completas. Modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano, Mecânica da Fratura ou Teoria da Plasticidade são usados para descrever o comportamento físico de um corpo e do material que o compõe.

As diferentes bases teóricas nas quais os modelos constitutivos são formulados influenciam a ocorrência e detecção da localização de deformações em análises numéricas. Neste cenário, este trabalho descreve uma análise de localização de deformações, baseada na parametrização cartesiana, desvinculada da escolha de modelos constitutivos.

2 ANÁLISE DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES

2.1 Estabilidade Material

De acordo com Schreyer e Neilsen (1996), a estabilidade estrutural depende de todo o domínio do problema considerado, como geometria, condições de contorno e relações constitutivas. A estabilidade material, por sua vez, está associada apenas às relações constitutivas.

Assumindo linearidade geométrica, Drucker (1959) propôs o seguinte critério para a estabilidade material:

$$\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad (1)$$

em que,

$\dot{\epsilon}_{ij}$ representa a taxa do tensor de deformações;

$\dot{\sigma}_{ij}$ representa a taxa do tensor de tensões.

Para relações constitutivas incrementais lineares, tem-se a seguinte relação entre as taxas dos tensores de tensão e deformação:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2)$$

em que,

D_{ijkl} representa o tensor constitutivo tangente.

Neste contexto, o critério de Drucker (1959) pode ser expressado como:

$$\dot{\epsilon}_{ij}D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} > 0 \quad (3)$$

Considerando uma taxa de deformação arbitrária, a estabilidade material depende somente do tensor constitutivo tangente, que está relacionado apenas a propriedades materiais e ao histórico de deformações do ponto material analisado (Chen e Baker, 2003).

Para um carregamento uniaxial, o critério de Drucker (1959) indica pontos de instabilidade material quando a inclinação da lei constitutiva é negativa. No ramo ascendente da relação constitutiva, a instabilidade pode ocorrer quando o tensor constitutivo tangente não possui simétrica, como no caso da plasticidade não associada (Rudnicki e Rice, 1975).

Schreyer e Neilsen (1996) preconizam que condições de contorno específicas, como deslocamentos prescritos, permitem que uma estrutura seja carregada além do ponto em que o critério de Drucker (1959) é satisfeito. Este carregamento adicional pode resultar na ocorrência de deformações não homogêneas e amolecimento (*softening*) do material que compõe a estrutura.

2.2 Condição Clássica de Localização

As condições necessárias para que incrementos de deformação se localizem em bandas estreitas, separadas do restante do corpo por superfícies de descontinuidades fracas, foram estabelecidas por Rice (1976).

O autor estudou o desenvolvimento de uma banda de localização, com orientação definida pelo vetor normal \mathbf{n} , na qual a localização de deformação plástica ocorre. Considerando a mesma relação constitutiva dentro e fora da banda de localização, Rice (1976) obteve:

$$\det(n_i D_{ijkl} n_l) = 0 \quad (4)$$

em que,

$n_i D_{ijkl} n_l$ representa um tensor de segunda ordem, denominado tensor acústico ou de localização e denotado por Q_{jk} ou \mathbf{Q} .

A partir da Eq. (4), conclui-se que a análise de localização depende do tensor constitutivo tangente e do vetor normal à superfície de descontinuidade. Na maior parte dos casos, o tensor constitutivo tangente depende apenas do histórico de deformações do ponto material e pode ser calculado diretamente pelo modelo constitutivo. Desta forma, a análise de localização consiste em obter o vetor normal \mathbf{n} , que indica a direção na qual o tensor acústico torna-se singular (Jirasék, 2007).

O desenvolvimento de uma superfície de descontinuidade fraca depende do estado material, da vizinhança e de condições de contorno. A análise de localização previamente descrita possui caráter local e se restringe ao ponto material e sua vizinhança infinitamente pequena. Apesar disso, a singularidade do tensor acústico é largamente utilizada como indicador de possíveis modos de falhas descontínuas (Jirasék, 2007).

2.3 Técnicas para a Análise de Localização

A análise de localização de deformações pode ser abordada de maneira analítica, na qual autores definem expressões fechadas para identificação do fenômeno. Esta abordagem pode ser encontrada nos trabalhos de Ortiz et al. (1987), para modelos bidimensionais, Ottosen e Runesson (1991), Runesson et al. (1991), Rizzi et al. (1995) e Oliver e Huespe (2004).

Este tipo de análise é caracterizado por uma implementação computacional simples e por requerer pouco esforço computacional. Em contrapartida, as expressões analíticas são formuladas para cenários específicos. Desta forma, elas são adequadas apenas para condições de carregamento, modelos constitutivos e modelos de análise específicos.

Visando um procedimento genérico, a análise de localização de deformações pode ser avaliada a partir de técnicas numéricas. De maneira geral, a abordagem numérica requer uma técnica de parametrização para a direção do vetor normal à superfície de descontinuidade \mathbf{n} e resulta em um procedimento iterativo para solução de um problema de otimização não linear com restrições do determinante do tensor acústico.

Os trabalhos de Ortiz et al. (1987) e Mosler (2005) ilustram a abordagem numérica para a análise de localização. Neles, os autores utilizam a parametrização esférica para definir a direção do vetor \mathbf{n} durante o desenvolvimento de suas formulações.

De acordo com Mota et al. (2016), a parametrização esférica é a mais utilizada na análise numérica de localização de deformações. Para este tipo de parametrização, os componentes do vetor \mathbf{n} são restritos à esfera unitária S^2 e representados pelos seus ângulos polares θ e azimutais φ , como representado na Figura 1.

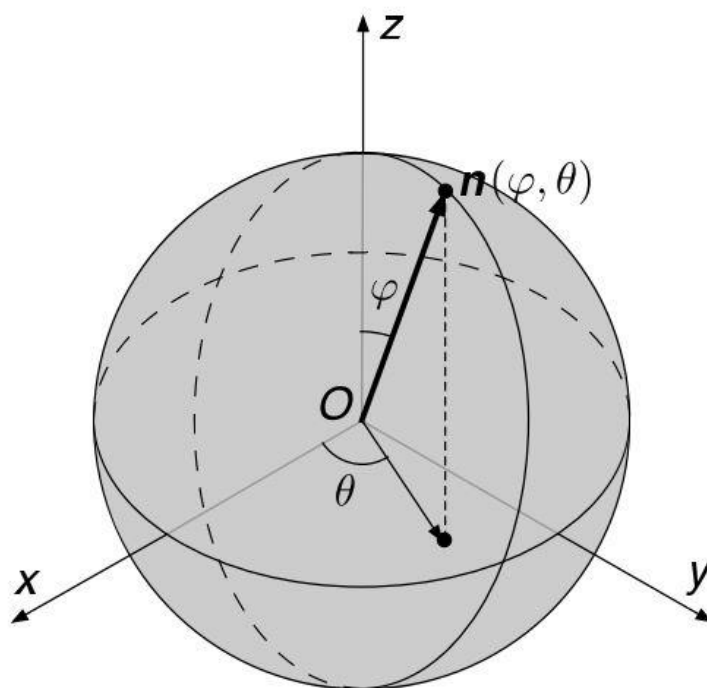


Figura 1. Parametrização esférica.

Fonte: Mota et al. (2016).

Matematicamente, tem-se:

$$\mathbf{n}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \text{sen } \varphi \cos \theta \\ \text{sen } \varphi \text{ sen } \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5)$$

em que,

$$\varphi \in [0, \pi] \text{ e } \theta \in [0, \pi].$$

Ainda considerando uma esfera unitária, é possível utilizar técnicas de parametrização alternativas, como a estereográfica, projetiva e tangente. A escolha da técnica de parametrização é um fator importante na eficiência das técnicas numéricas. O custo computacional da análise de localização pode ser elevado, uma vez que um sistema não linear de equações deve ser solucionado para cada ponto material em cada estado de

equilíbrio da estrutura, ou seja, ao final de cada passo de carga em uma análise incremental.

A escolha do tipo de parametrização também influencia na convergência da análise. Tradicionalmente, o sistema não linear de equações resultante da otimização é solucionado com o método de Newton, que requer um ponto de partida para o procedimento iterativo. A função objetivo da otimização, doravante denominada $f := \det(\mathbf{Q})$, cujo comportamento é simples, ocasiona menor dependência do palpite inicial e maior probabilidade de convergência para um mínimo global.

3 TÉCNICA DE PARAMETRIZAÇÃO CARTESIANA

3.1 Definição

Em seu trabalho, Mota et al. (2016) desenvolveram um novo tipo de parametrização, denominada cartesiana. Nela, a condição do vetor parametrizado ser unitário é relaxada, definindo assim um novo vetor, denotado por \mathbf{v} .

Na parametrização cartesiana, o vetor \mathbf{v} é confinado em um cubo centrado na origem e com aresta de comprimento igual 2, como representado na Figura 2.

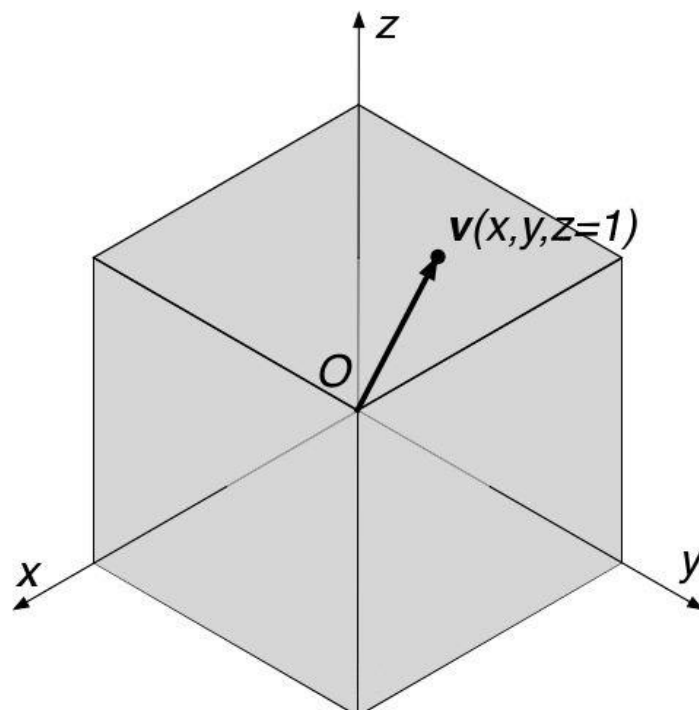


Figura 2. Parametrização cartesiana.

Fonte: Mota et al. (2016).

3.2 Formulação

A análise de localização de deformações com a parametrização cartesiana requer a consideração de somente três faces do cubo devido à simetria da condição de bifurcação. Matematicamente, o vetor \mathbf{v} é definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{cases} [x, y, 1]^T, & \text{se } x \in [-1, 1] \text{ e } y \in [-1, 1]; \\ [1, y, z]^T, & \text{se } y \in [-1, 1] \text{ e } z \in [-1, 1]; \\ [x, 1, z]^T, & \text{se } z \in [-1, 1] \text{ e } x \in [-1, 1]; \\ [1, 1, 1]^T, & \text{para demais casos.} \end{cases} \quad (6)$$

Desta forma, na face do cubo cuja coordenada z é constante, por exemplo, os componentes a serem considerados em $f := \det(\mathbf{Q})$, dada pela Eq. (4), são: $n_1 = x$, $n_2 = y$ e $n_3 = 1$.

Esta substituição resulta em um problema de otimização não linear da função f em relação às variáveis x e y . Neste trabalho, usou-se o método do Newton para solução deste problema. O próximo passo da análise de localização consistiu em avaliar o determinante do tensor acústico para os valores de x e y resultantes do processo de otimização. A singularidade do tensor de localização, na face exemplificada, é detectada quando $f \leq 0$. Para $f > 0$, não há singularidade e, conseqüentemente, não ocorre o fenômeno de localização de deformações.

Respeitando a formulação indica na Eq. (6), um procedimento análogo ao descrito anteriormente é realizado nas demais faces do cubo definido pela parametrização cartesiana.

Conforme demonstrado por Mota et al. (2016), o vetor unitário \mathbf{n} , que define a direção normal à superfície de descontinuidade, pode ser recuperado diretamente a partir do vetor \mathbf{v} da seguinte maneira:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad (7)$$

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

A implementação da técnica descrita neste trabalho foi realizada na plataforma INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), um projeto de código aberto desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. Sua principal característica é a funcionalidade de maneira independente quanto à seleção de modelo constitutivo e modelo de análise.

4.1 Tração Uniaxial

Um exemplo com carregamento uniaxial é apresentado para validar a análise de localização implementada. O modelo foi discretizado com três elementos finitos hexaédricos de oito nós, como mostrado na Figura 3. O elemento hachurado na Figura 3 foi enfraquecido para induzir a ocorrência da localização nele.

Foram utilizados três modelos constitutivos distintos: modelos de dano isotrópico de Mazars e Lemaitre (1984), Simo e Ju (1987) e Lemaitre e Chaboche (1990). As propriedades materiais adotadas foram módulo de elasticidade de 20000,0 MPa e coeficiente de Poisson de 0,2. Para a evolução do dano, adotou-se a seguinte função com variação exponencial para todos os modelos:

$$D(\varepsilon_{eq}) = 1 - \frac{\kappa_0}{\varepsilon_{eq}} [1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\varepsilon_{eq} - \kappa_0)}] \quad (8)$$

em que,

ε_{eq} é a medida de deformação equivalente, calculado de maneira específica em cada modelo constitutivo;

κ_0 é o valor de deformação equivalente a partir do qual o processo de dano é iniciado;

α é o valor máximo de dano admissível;

β é a intensidade de evolução do dano.

Especificamente, no modelo de Mazars e Lemaitre (1984) tem-se: $\alpha = 0,99$, $\beta = 1500$ e $\kappa_0 = 0,00011$. Para o modelo de Simo e Ju (1987), foram considerados: $\alpha = 0,999$, $\beta = 15$ e $\kappa_0 = 0,0145$. No modelo de Lemaitre e Chaboche (1990), adotou-se: $\alpha = 0,99$, $\beta = 2000$ e $\kappa_0 = 0,000104$.

A Figura 4 apresenta as trajetórias de equilíbrio para o nó de controle de deslocamento indicado na Figura 3. Também na Figura 4, o passo no qual ocorreu a detecção inicial do fenômeno de localização está indicado por um 'X'.

Devido à simplicidade do carregamento e condições de contorno, a análise de localização neste exemplo deve resultar no vetor unitário $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ como a direção normal à superfície da descontinuidade. Ela deve também detectar a localização em todos os pontos de integração do elemento enfraquecido no mesmo passo.

A Figura 5 apresenta o resultado da análise de localização em um passo no regime de amolecimento da estrutura. A linha vermelha indica a representação geométrica do vetor \mathbf{n} obtido numericamente em cada ponto de integração. A linha verde, por sua vez, representa a direção de uma possível trinca de maneira qualitativa. Observa-se que o fenômeno de localização é detectado no mesmo passo de carga para os oito pontos materiais do elemento hexaédrico enfraquecido.

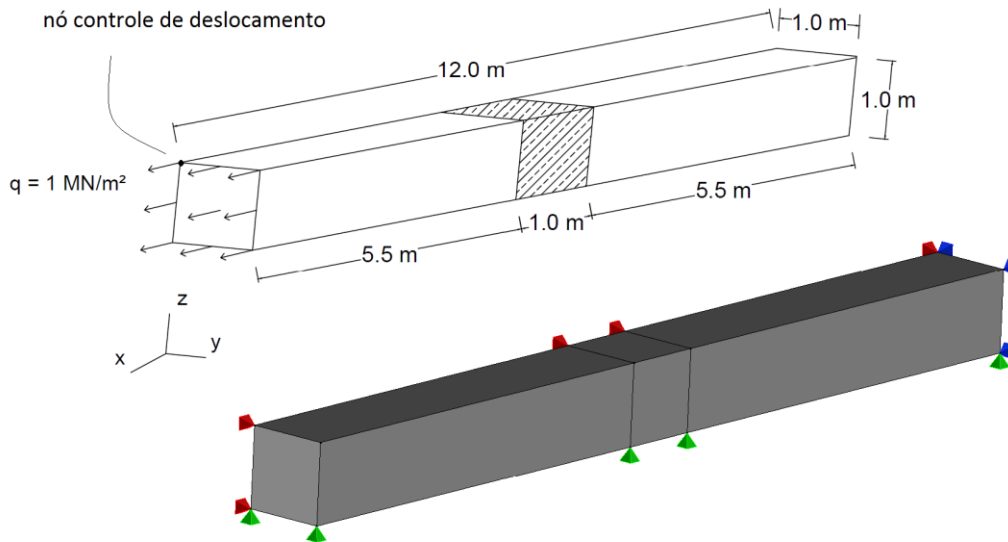


Figura 3. Esquema estrutural e discretização – Tração Uniaxial.

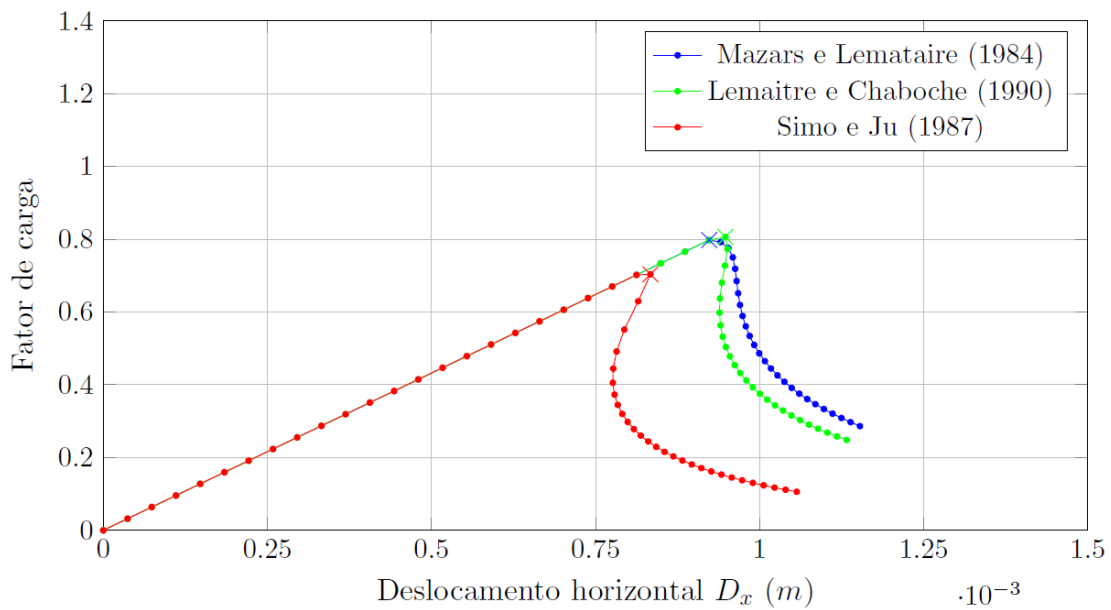


Figura 4. Trajetórias de equilíbrio – Tração Uniaxial.

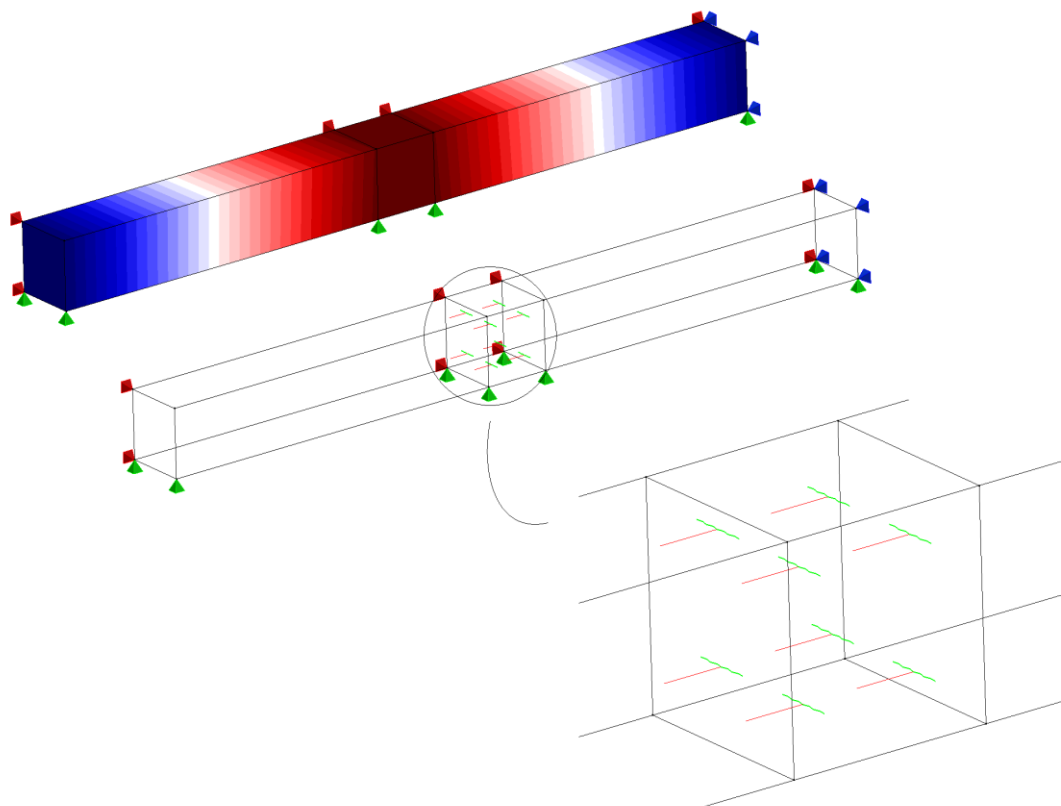


Figura 5. Resultado da análise de localização – Tração Uniaxial.

4.2 Flexão em 3 pontos

A simulação numérica de um ensaio de flexão em 3 pontos é reproduzida a seguir. O objetivo deste exemplo é demonstrar a aplicabilidade da análise de localização de deformações implementada para carregamentos e discretizações genéricas.

O modelo constitutivo adotado para a simulação foi o de fissuração distribuída com direção fixa. As propriedades materiais adotadas simulam um material parcialmente frágil, como o concreto, com módulo de elasticidade de 30000,0 MPa, coeficiente de Poisson de 0,2, resistência última à compressão de 33,3 MPa e à tração de 3,33 MPa.

A malha de elementos finitos é composta por elementos finitos hexaédricos de oito nós, como ilustrado na Figura 6. Adicionalmente, a Figura 6 representa as condições de contorno adotadas.

A Figura 7 apresenta o resultado da análise de localização em um passo no regime de amolecimento da estrutura com o modelo projetado no plano xy. Na Figura 8, o mesmo resultado é exposto sob uma diferente perspectiva. A detecção do fenômeno de localização de deformações ocorre nos pontos materiais situados na região do entalhe. Esta região é caracterizada por elevada concentração de tensão, esforços predominantemente de tração e maior degradação material.

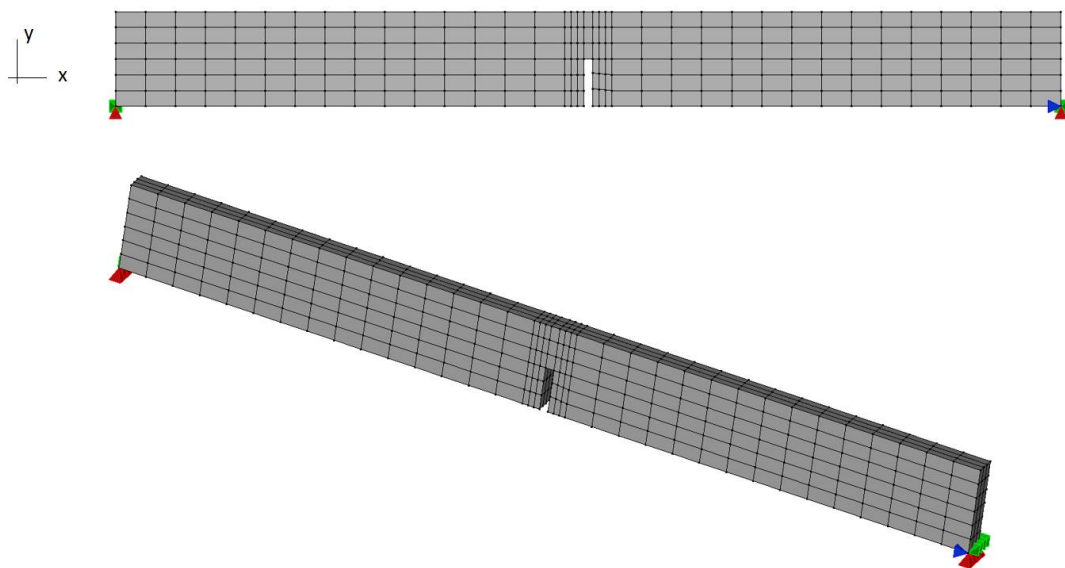


Figura 6. Esquema estrutural e discretização – Flexão em 3 pontos.

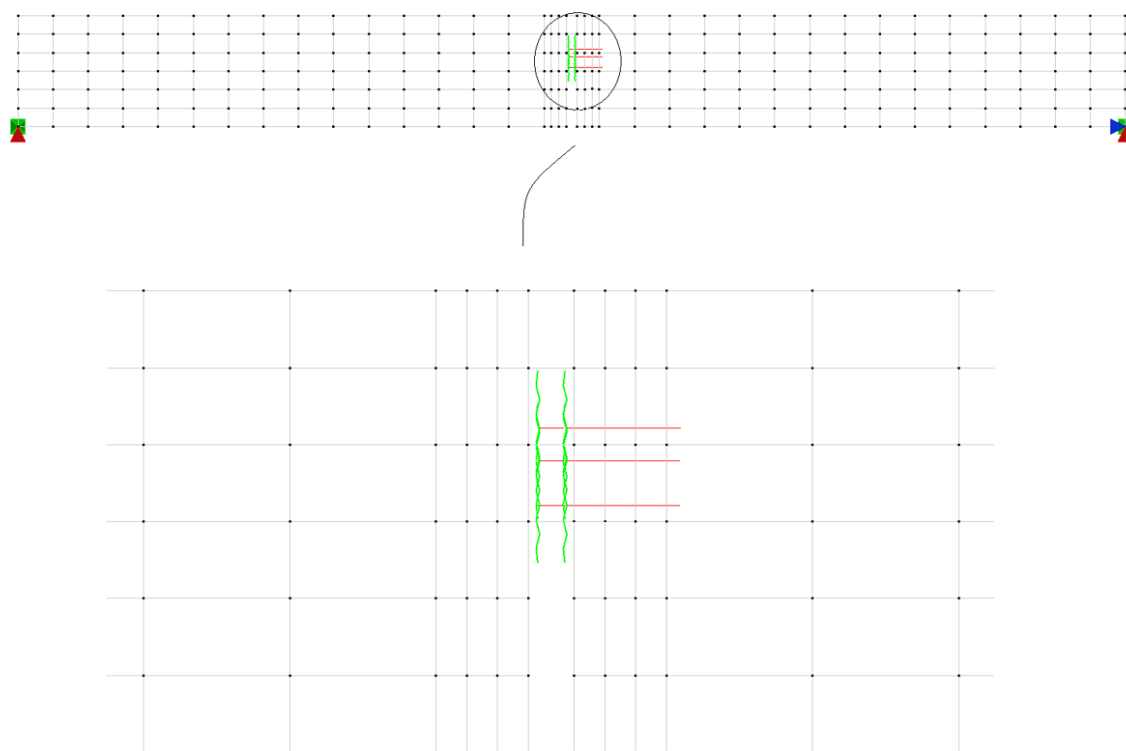


Figura 7. Resultado na análise de localização no plano xy – Flexão em 3 pontos.

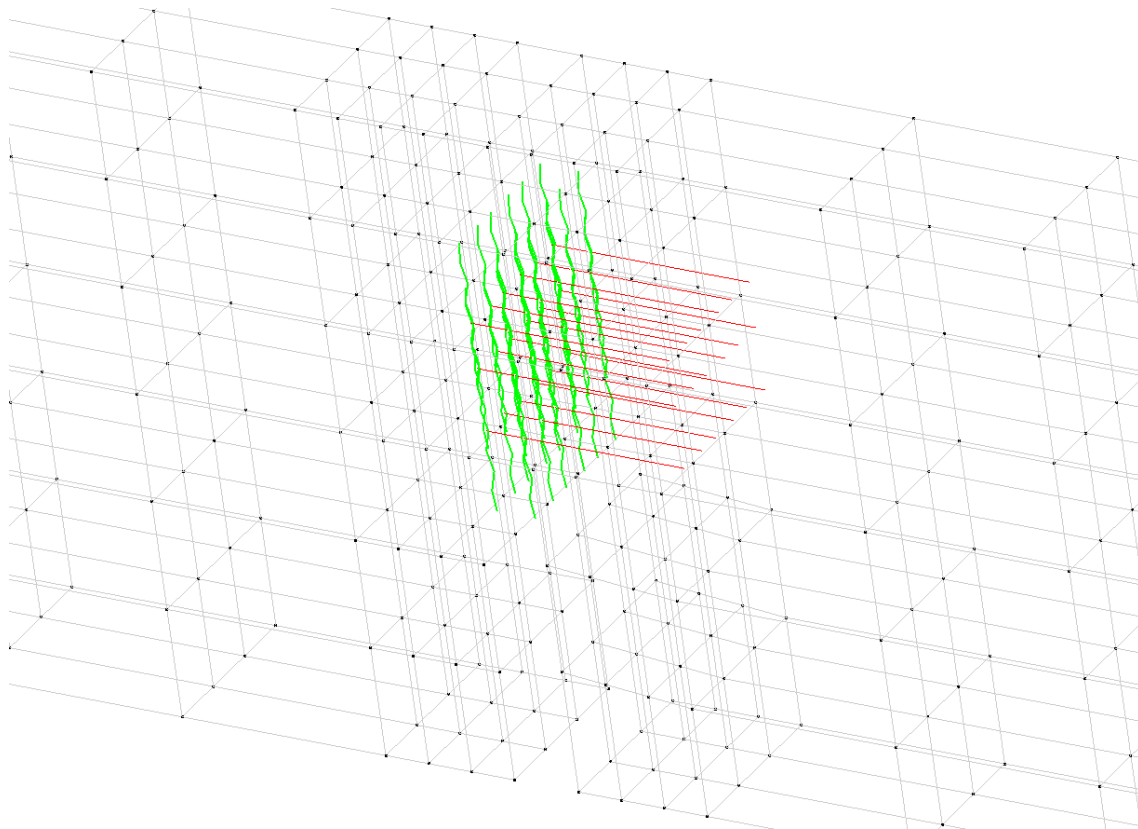


Figura 8. Resultado na análise de localização em perspectiva – Flexão em 3 pontos.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma análise de localização de deformações desvinculada da escolha de modelos constitutivos. Esta independência foi alcançada considerando a singularidade do tensor acústico como condição para localização de deformações e utilizando um método numérico para solucionar a minimização oriunda da análise de localização.

O vetor que define a superfície de descontinuidade fraca foi definido utilizando a técnica de parametrização cartesiana proposta por Mota et al. (2016). Esta técnica, na qual o vetor é confinado a um cubo centrado na origem e com aresta de comprimento igual 2, confere maior estabilidade ao procedimento numérico e comportamento mais simples à função objetivo da otimização.

A análise de localização fornece informações pertinentes a métodos de regularização do contínuo, como contínuos de alta ordem e modelos de zona coesiva. Para materiais parcialmente frágeis, o vetor que define a superfície de descontinuidade pode ser usado



para simular a propagação de trincas. Em uma análise estrutural multiescala, pontos de instabilidade material podem ser utilizados para definir domínios locais.

AGRADECIMENTOS

Os autores reconhecem e agradecem o suporte das agências de pesquisa brasileiras CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais).

REFERÊNCIAS

- Alshibli, K. A. e Sture, S., 2000. Shear band formation in plane strain experiments of sand. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 126(6), pp.495-503.
- Cedolin, L., Poli, S. D. e Iori, I., 1987. Tensile behaviour of concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113(3), pp. 431-449.
- Chen, G. e Baker, G., 2003. Material softening and structural instability. *Advances in Structural Engineering*, vol. 6(4), pp. 353-357.
- de Borst, R., 2004. Damage, material instabilities, and failure. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol. 2, pp. 335-373.
- Desrues, J. e Viggiani, G., 2004. Strain localization in sand: An overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28(4), pp. 279-321.
- Drucker, D. C., 1959. A definition of stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 26, pp. 101-106.
- Duszek-Perzyna, M. K. e Perzyna, P., 1993. Adiabatic shear band localization in elastic-plastic single crystals. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30(1), pp. 61-89.
- Jirasék, M., 2001. Modeling of localized damage and fracture in quasibrittle materials. *Lecture Notes in Physics*, vol. 568, pp. 17-29.
- Jirasék, M., 2007. Mathematical analysis of strain localization. *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 11(7-8), pp. 977-991.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Mazars, J. e Lemaitre, J., 1984. Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete. *Shah, S. P. (Ed.), Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites. NATO Advanced Research Workshop, 4-7 Setembro, Northwestern University*, pp. 375-378.



- Mosler, J., 2005. Numerical analyses of discontinuous material bifurcation: Strong and weak discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194(9-11), pp. 979-1000.
- Mota, A., Chen, Q., Foulk III, J. W., Ostien, J. T. e Lai, Z., 2016. A cartesian parametrization for the numerical analysis of material instability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 108, pp. 156-180.
- Nadai A., 1931. *Plasticity: A mechanics of the plastic state of matter*. McGraw-Hill.
- Oliver, J. e Huespe, A. E., 2004. Theoretical and computational issue in modelling material failure in Strong discontinuity scenarios. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193(27), pp. 2987-3014.
- Ortiz, M., Leroy, Y. e Needleman, A., 1987. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 61(2), pp. 189-214.
- Ottosen, N. S. e Runesson, K., 1991. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 27(4), pp. 401-421.
- Pamin, J., 2011. Computational modelling of localized deformations with regularized continuum models. *Mechanics and Control*, vol. 30(1), pp. 27-33.
- Rice, J. R., (1976), The localization of plastic, in *14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics – Delft, Holanda*, pp. 207-220.
- Rizzi, E., Carol, I. e Willam, K., 1995. Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121(4), pp. 541-554.
- Rudnicki, J. W. e Rice, J. R., 1975. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 23(6), pp. 371-394.
- Runesson, K., Ottosen, N. S. e Peric, D., 1991. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *International Journal of Plasticity*, vol. 7(1-2), pp. 90-121.
- Schreyer, H. e Neilsen, M., 1996. Analytical and numerical tests for loss of material stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39(10), pp. 1721-1736.
- Simo, J. C. e Ju, J. W., 1987. Strain- and stress-based continuum damage – i. Formulation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23(7), pp. 821-840.