

Evidências de um *risk-free rate puzzle* na economia brasileira

Rafael Nogueira do Prado[†],^a
Alex Luiz Ferreira[‡],^b

^aGO Associados

^bFaculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto -
FEA-RP/USP

Resumo A taxa livre de risco é utilizada conceitualmente em muitas aplicações em finanças e macro-finanças. Enquanto em muitos trabalhos teóricos essa taxa é assumida como constante, e em trabalhos empíricos é comum se utilizar o retorno de títulos públicos como *proxy* a ela, há evidências contrárias a esses usos. O objetivo deste artigo é estimar uma taxa livre de risco para o Brasil, calculada a partir da equação fundamental de apreçamento de ativos, que se utiliza de um fator estocástico de desconto. Utilizam-se diferentes abordagens econométricas para este fim, e ao final, as taxas estimadas serão comparadas com a taxa DI, que é a principal taxa livre de risco utilizada para a economia brasileira. A taxa DI e as taxas estimadas se distanciaram durante boa parte do período analisado, de 2002 a 2022, sugerindo a existência de um *risk-free rate puzzle* para a economia brasileira.

Palavras-chave: Taxa livre de risco; Fator estocástico de desconto; *Risk-free rate puzzle*

Códigos JEL: E44.

1. Introdução

Um ativo livre de risco é aquele que garante uma rentabilidade fixa e conhecida em um período específico, independentemente de variações econômicas ou financeiras. Em modelos teóricos, como o equilíbrio geral Arrow-Debreu com mercados completos (Arrow, 1964; Debreu, 1959; Arrow e Debreu, 1954), um ativo livre de risco pode ser construído formando-se uma carteira específica que combina todos os ativos primitivos. O ativo sintético resultante assegura o pagamento de uma unidade monetária, qualquer que seja o estado da natureza. Essa formulação, que define a taxa livre de risco da economia, é amplamente utilizada como referência conceitual em estudos de macro-finanças. No entanto, pressupõe que todos os contratos sejam executados sem risco de contraparte ou *default*.

[†]rafael.nogueiraprado@hotmail.com

[‡]alexferreira@usp.br

Essa taxa é fundamental para medir o prêmio de risco de ativos arriscados, isto é, a compensação exigida por um investidor ao alocar recursos em ativos sujeitos a incertezas. Em aplicações empíricas, utiliza-se frequentemente o retorno de um título público de curto prazo como *proxy* para essa taxa (Dimson et al., 2006; Gomes et al., 2013). Nesse contexto, a literatura de macro-finanças busca explicar os excessos de retorno em modelos de precificação de ativos, partindo do princípio de que tais títulos são efetivamente livres de risco. A pergunta geral que este artigo busca responder é se as taxas tradicionalmente utilizadas como referência ou *benchmark* para o ativo livre de risco são, de fato, isentas de risco. Especificamente, o artigo investiga se as taxas frequentemente utilizadas como *benchmark* no Brasil podem ser consideradas adequadas para esse propósito.

Há controvérsias sobre o uso de títulos públicos - como aqueles do Tesouro Nacional - como *proxies* para o ativo livre de risco (Krishnamurthy e Vissing-Jorgensen, 2012; Van Binsbergen et al., 2022). Em primeiro lugar, pode-se citar o fato de que estas taxas são afetadas pelas condições de mercado, como mudanças nas políticas de juros de bancos centrais, diretamente ligadas a crescimento econômico e expectativas de inflação. Especialmente para economias emergentes, essa taxa possui ainda maior volatilidade, dada a maior exposição dessas economias a diferentes riscos ligados ao ciclo econômico. De tal maneira, esses riscos estabelecem dificuldades em se utilizar retornos de títulos públicos como *proxies* para a taxa livre de risco, uma vez que refletem muitas incertezas presentes nessas economias e também não são livres de probabilidade de default.

O entendimento da taxa livre de risco é de fundamental importância na teoria econômica. Em modelos de apreçamento de ativos, por exemplo, é utilizada para medir o prêmio de risco de ativos arriscados. Seu uso é estendido para modelos de macrofinanças, em particular àqueles que utilizam a equação fundamental de apreçamento e que relacionam preços com incertezas macroeconômicas, capturadas pelo chamado fator estocástico de desconto (SDF). Nesses modelos, a taxa livre de risco de uma economia é dada pelo inverso do valor esperado do SDF. Mais do que um conceito teórico, a taxa livre de risco influencia decisões de política econômica. A política monetária de bancos centrais ao redor do mundo é orientada, entre outros fatores, por modelos teóricos que incluem a taxa livre de risco como uma das variáveis. No modelo SAMBA¹, utilizado pelo Banco Central do Brasil, por exemplo, existem títulos públicos cujos retornos são dados pela taxa livre de risco, que por sua vez é a mesma controlada pela autoridade monetária (De Castro et al.,

¹SAMBA: *Stochastic Analytical Model with a Bayesian Approach*.

2015).

Mesmo para economias desenvolvidas, o uso de retornos de títulos públicos como *proxies* para a taxa livre de risco é questionado. Importante evidência desse questionamento é o trabalho de Weil (1989), que descreve o chamado *Risk-Free Rate Puzzle*. O autor encontra que a taxa livre de risco imposta pelo modelo teórico, após ser calibrado para a economia dos EUA, é de 6,5% ao ano, em comparação a uma média histórica de 0,8% ao ano. Ou seja, o modelo sugere que os investidores deveriam exigir retornos muito maiores para manter títulos do Tesouro norte-americano. No entanto, na prática, a taxa livre de risco observada é bem mais baixa, indicando que há alguma falha na teoria para explicar a realidade.

Dessa forma, o *puzzle* é o questionamento do porque mesmo com incerteza relativamente baixa e crescimento de consumo moderado, os dados mostram uma taxa livre de risco mais baixa do que o encontrado na teoria. Este julgamento foi inicialmente proposto para a economia dos EUA e outras economias desenvolvidas, mas se as evidências empíricas não corroboram os modelos nem para estas, é plausível imaginar que para economias emergentes, como o Brasil, isto também ocorre. Ao testar o modelo para a economia brasileira, Bonomo e Domingues (2002) concluem que há, na verdade, um *risk-free rate puzzle* invertido. Tal fato é resultado de uma taxa livre de risco estimada menor que a taxa de títulos públicos brasileiros. Por outro lado, Cysne (2006) encontra evidências distintas destas. O autor conclui que existem evidências de um *equity premium puzzle*, mas que não há evidências de um *risk-free rate puzzle* invertido para dados da economia brasileira.

Outro exemplo é o trabalho desenvolvido por Jiang et al. (2024). Conforme argumentam, o retorno esperado da carteira de títulos da dívida pública deve refletir o valor presente dos superávits primários esperados do governo. Os autores encontram evidências de erros de precificação, tendo em vista que os retornos dessa carteira são menores do que a taxa de juros que os investidores deveriam exigir por carregar tais títulos, indicando um quebra-cabeças que os autores intitulam como *government debt risk premium puzzle*. Embora a verificação desse quebra-cabeças não tenha sido realizada para o Brasil, é válido o questionamento sobre qual é a taxa livre de risco para a economia brasileira.

No Brasil, a taxa DI é a taxa média das operações de empréstimos entre bancos, e na prática reflete o custo do dinheiro no mercado interbancário, geralmente com prazo de um dia (*overnight*), acompanhando de perto a taxa Selic efetiva, dada a meta definida pelo Banco Central como instrumento de política monetária. Esta taxa é frequentemente adotada como *proxy* para

a taxa livre de risco, dada sua elevada liquidez e proximidade com a Selic. Entretanto, a utilização da DI como taxa livre de risco da economia brasileira apresenta alguns problemas, justamente pela sua alta correlação com a taxa Selic. Evidências apontam que podem existir diferenças entre os valores das taxas referentes a títulos públicos e os da taxa livre de risco para o Brasil. Conforme argumentado por [Simonassi \(2006\)](#), que realiza uma estimação da taxa livre de risco para o Brasil e a compara com a taxa Selic, a diferença entre essas duas taxas fornece um bom referencial para mensurar o *spread* pago pelo país em virtude dos riscos que a economia brasileira oferece.

Com o objetivo de estimar a taxa livre de risco para a economia brasileira, este artigo utiliza como base o trabalho realizado por [Simonassi \(2006\)](#), que faz uso de um fator estocástico de desconto (SDF) estimado a partir do modelo desenvolvido por [Araujo et al. \(2005\)](#). Em seguida, realiza-se uma estimação do SDF utilizando o modelo GMM (*Generalized Method of Moments*), de [Hansen \(1982\)](#). Por último, utiliza-se uma estimação via GEL (*Generalized Empirical Likelihood*) ([Newey e Smith, 2004](#)), que é um método mais robusto a erros de especificação e que possui melhores propriedades em amostras finitas quando comparado ao GMM. O ambiente macroeconômico é descrito por um modelo de apreçamento de ativos baseado em consumo (CCAPM - *Consumption Capital Asset Pricing Model*), utilizando-se de uma função utilidade com aversão relativa ao risco constante (CRRA - *Constant Relative Risk Aversion*). Após calculadas pelas diferentes abordagens, as taxas serão comparadas entre si, e também com os valores da taxa DI ao longo do tempo.

Para aproximar a relação de equilíbrio de longo prazo imposta pelo CCAPM, utiliza-se um método de suavização da série de consumo, com o objetivo de extrair apenas informações associadas à sua tendência de longo prazo, eliminando seus componentes cíclicos. Esse método, desenvolvido por [Müller e Watson \(2015\)](#), baseia-se em projeções trigonométricas da série de consumo².

Além dessa introdução, este trabalho possui mais quatro seções. Na seção seguinte, será apresentada uma breve revisão da literatura que baseou este artigo. Em seguida, será descrito o modelo econômico utilizado. A Seção 4 descreve os dados e apresenta os resultados, enquanto a Seção 5 concluirá.

²A escolha de não utilizar o Filtro de Hodrick-Prescott ([Hodrick e Prescott, 1997](#)) segue [Hamilton \(2018\)](#), que argumenta que os componentes extraídos pelo filtro refletem sua própria formulação, e não a verdadeira dinâmica dos dados, gerando artificialidade nos resultados por depender de informações futuras desconhecidas em tempo real.

2. Covariância Zero como *risk-free*

A literatura de macrofinanças, que se fundamenta na Equação Fundamental de Apreçamento de Ativos, relaciona flutuações macroeconômicas e precificação de ativos por meio do Fator Estocástico de Desconto (SDF) (Hansen e Jagannathan, 1991; Harrison e Kreps, 1979; Hansen e Richard, 1987). O SDF pode ser derivado de funções utilidade, como na formulação de Rubinstein (1976), mas seu uso empírico em modelos semi-paramétricos enfrenta críticas devido a potenciais problemas de especificação (Horowitz, 2009; Mehra e Prescott, 1985; Brown e Gibbons, 1985; Campbell, 1993). Nesse contexto, o GMM (*Generalized Method of Moments*) (Hansen, 1982; Hansen e Singleton, 1982, 1983) emerge como abordagem econométrica central para estimar essas relações.

Visando contornar estes problemas, a literatura empírica buscou outras formas de se estimar o fator estocástico de desconto. Rosenberg e Engle (2002) e Araujo et al. (2005), por exemplo, desenvolvem modelos semelhantes para o cálculo do SDF, sem o uso de uma função utilidade, em que ele é uma função dos preços e retornos dos ativos existentes na economia e consistem em estimações não-paramétricas. Utilizando-se desta última abordagem, Simonassi (2006) faz uma estimação da taxa livre de risco para o Brasil a partir de uma modelagem não-paramétrica do SDF, a fim de compará-la com a Selic, e encontra valores divergentes entre a taxa estimada e a observada.

Além desses trabalhos, na literatura de macro-finanças empírica mais recente, é crescente a quantidade de trabalhos que se utiliza de abordagens não-paramétricas para apreçamento de ativos, sendo uma delas o modelo GEL (*Generalized Empirical Likelihood*) (Newey e Smith, 2004; Noda et al., 2011; Ito e Noda, 2012; Almeida e Garcia, 2012; Pereira, 2016).

O presente trabalho contribui para a literatura ao estimar a taxa livre de risco para o Brasil utilizando uma abordagem baseada no Fator Estocástico de Desconto (SDF), com estimações via *Generalized Method of Moments* (GMM), *Generalized Empirical Likelihood* (GEL) e seguindo Issler e Piqueira (2000). Diferentemente de estudos anteriores, que frequentemente assumem uma estrutura paramétrica rígida baseada em funções utilidade pré-definidas, este trabalho adota um modelo mais flexível, comparando diferentes técnicas econométricas para avaliar sua robustez e consistência com os dados da economia brasileira. Em particular, a aplicação do modelo GEL permite testar a sensibilidade das estimações da taxa livre de risco a erros de especificação do modelo, um problema recorrente na literatura. Até onde se sabe, este é o primeiro estudo a empregar essa abordagem para estimar a taxa livre de risco no Brasil, oferecendo uma análise comparativa entre métodos e contribuindo

para a melhor compreensão do comportamento dessa taxa em um contexto emergente.

3. Modelo econômico

Parte-se de um modelo baseado em [Breedon \(1979\)](#), que se utiliza do ambiente econômico descrito por [Lucas \(1978\)](#):

$$\begin{aligned} \max_{C_t} \quad & \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) \right\} \\ \text{s.t.} \quad & C_t + p_t q_t \leq x_t q_{t-1} + W_t \\ & \forall t, \end{aligned} \quad (1)$$

em que $u_t(\cdot)$ (com $u'_t(\cdot) > 0$ e $u''_t(\cdot) < 0$) é a função de utilidade no período t , $0 < \beta < 1$ é a taxa de desconto intertemporal subjetiva, C_t é o nível de consumo do indivíduo, p_t é o preço de um ativo genérico no período t , q_t é a quantidade comprada desse ativo em t , x_t é o *payoff* do ativo em t obtido pela compra desse ativo em $t - 1$ e W_t é uma renda exógena recebida pelo indivíduo na data t . Conforme argumentado por [Cochrane \(2009\)](#), para o caso de um ativo arriscado com preço p_t , tem-se que o payoff desse ativo é $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$, em que d_{t+1} são os dividendos pagos no período $t + 1$, e para o caso do ativo livre de risco, tem-se que $p_t = 1$ e $x_{t+1} = R_f$.

A solução do problema em (1) resulta na equação de Euler

$$p_t = \mathbb{E}_t \left\{ \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} x_{t+1} \right\}. \quad (2)$$

Ao se definir $\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \equiv M_{t+1}$ como o fator estocástico de desconto (SDF) em $t + 1$, obtém-se

$$\mathbb{E}_t \{ M_{t+1} R_{t+1} \} = 1, \quad (3)$$

em que $R_{t+1} \equiv \frac{x_{t+1}}{p_t}$ é o retorno bruto do ativo genérico, e serve para precificar qualquer ativo da economia.

O ativo livre de risco. Como a equação (3) é válida para qualquer tipo de ativo, em particular ela é válida também para o ativo livre de risco. Denotando-se então R_{t+1}^f como o retorno bruto do ativo livre de risco e assumindo a hipótese fundamental:

$$\text{Cov}(M_{t+1}, R_{t+1}^f) = 0, \quad (4)$$

com $\mathbb{E}\{R_f\} = R_f$, obtém-se $\mathbb{E}_t\{M_{t+1}R_{t+1}^f\} = R_{t+1}^f\mathbb{E}_t\{M_{t+1}\} = 1$ e, portanto,

$$R_{t+1}^f = \frac{1}{\mathbb{E}_t\{M_{t+1}\}}. \quad (5)$$

Ao supor que $\text{Cov}(M_{t+1}, R_{t+1}^f) = 0$, abstrai-se do risco relacionado ao ciclo econômico para R_{t+1}^f . A hipótese acima é amplamente aceita na literatura e normalmente é dada em modelos de apreçamento de ativos (Farnsworth et al., 2002; Campbell, 2014; Araujo et al., 2005). Como $R_{t+1}^f = \frac{1+i_{t+1}^f}{1+\pi_{t+1}}$, da equação (5), obtém-se que

$$i_{t+1}^f = \frac{1}{\mathbb{E}_t\left\{\frac{M_{t+1}}{1+\pi_{t+1}}\right\}} - 1, \quad (6)$$

em que π_{t+1} representa a inflação entre t e $t+1$ e i_{t+1}^f é a taxa nominal livre de risco de covariância a ser estimada.

A taxa implícita na equação (6) será obtida a partir da estimativa do SDF, utilizando três abordagens distintas. A primeira emprega o modelo desenvolvido por Araujo et al. (2005), doravante denominado AIF. Em seguida, utiliza-se o modelo GMM, proposto por Hansen (1982), e, por fim, o modelo GEL, desenvolvido por Newey e Smith (2004). A escolha por esses métodos se deve ao fato de dispensarem uma abordagem totalmente paramétrica para a estimação do SDF. Conforme argumentado no capítulo introdutório, o uso de modelos paramétricos está sujeito a erros de especificação, o que justifica a adoção de modelos não-paramétricos e semi-paramétricos para mitigar tais problemas. Posteriormente, os valores de $\mathbb{E}_t\{M_{t+1}\}$ serão estimado conforme o modelo a seguir:

$$M_{t+1} = \alpha + \gamma X_t + \lambda \ln\left(\frac{C_t}{Y_t}\right) + \varepsilon_{t+1}, \quad (7)$$

em que X_t representa uma variável que captura fatores financeiros relevantes para o modelo, como retornos agregados ou fatores de risco sistemáticos. O

termo $\ln\left(\frac{C_t}{Y_t}\right)$ corresponde ao logaritmo da razão consumo/PIB, enquanto ε_{t+1} representa o termo de erro do modelo. Seguindo [Simonassi \(2006\)](#), a escolha dessas variáveis se deve ao fato de que o SDF pode ser interpretado como uma função dos fundamentos econômicos, refletindo informações relevantes sobre a dinâmica intertemporal do consumo e dos retornos financeiros.

Para a estimação da taxa implícita na equação (6), utiliza-se três abordagens distintas para calcular o SDF: AIF, GMM e GEL. A escolha dessas metodologias decorre da necessidade de lidar com a incerteza na modelagem do SDF, evitando o risco de especificação incorreta que surge ao assumir uma forma funcional rígida para a função de utilidade. Além disso, essas abordagens permitem explorar os dados de forma mais flexível, especialmente em cenários onde a presença de heteroscedasticidade e a alta frequência dos retornos financeiros podem comprometer a eficiência de métodos totalmente paramétricos. Dessa forma, garante-se maior robustez na estimação do SDF e na avaliação da taxa livre de risco.

AIF. Este modelo propõe uma abordagem não-paramétrica para o cálculo do SDF sem o uso de uma função utilidade, em que o estimador é uma função dos retornos de ativos. O principal benefício disso é a ausência de risco de especificação incorreta para a forma funcional adequada para estimar-se o SDF. Ademais, o estimador proposto não depende de dados de consumo para ser construído. É dispensada também a hipótese de homocedasticidade para a construção do estimador. Ou seja, pode ser feito o uso de dados de alta e altíssima frequência, que normalmente possuem heterocedasticidade, e a um custo computacional baixo. O estimador proposto é

$$M_t^{AIF} = \frac{\bar{R}_t^G}{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \left(\bar{R}_t^G \bar{R}_t^A \right)}, \quad (8)$$

em que $\bar{R}_t^G = \prod_{i=1}^N R_{i,t}^{\frac{1}{N}}$ e $\bar{R}_t^A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_{i,t}$ representam a média geométrica e a média aritmética dos N ativos, respectivamente³.

Ainda de acordo com [Araujo et al. \(2005\)](#), é importante que seja escolhida uma quantidade suficientemente grande de ativos, com o objetivo de diversificar a carteira analisada. Isso pois, ao passo que cresce o número de ativos utilizado, o grau de correlação dos retornos diminui. Tal medida é importante devido ao fato de que muita correlação pode levar à não convergência em probabilidade de \hat{M}_t para M_t .

³Este estimador é consistente e sob homocedasticidade, também é eficiente. Para mais detalhes, consulte [Araujo et al. \(2005\)](#).

GMM. Uma vantagem do GMM é que ele possui boas propriedades assintóticas, ao passo que permite uma estimação consistente dos parâmetros na presença de heteroscedasticidade condicional e autocorrelação serial nas condições de ortogonalidade, e tendo em vista que o estimador proposto possui distribuição assintoticamente normal (Hansen, 1982). Como não são impostas restrições de linearidade sobre essas condições, o GMM consegue lidar de maneira direta com modelos não lineares (Campbell, 2014). Para uma matriz de ponderação W e condições de momentos amostrais $g_T(x_t, \beta_0) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(x_t, \beta_0)$, o problema é dado por (Cochrane, 2009)

$$\min_{\beta_0} g_T(x_t, \beta_0)' W g_T(x_t, \beta_0). \quad (9)$$

Neste modelo, existe um teste de sobre-identificação para se testar o quão próximas as condições de ortogonalidade amostrais estão de zero. Seja R o número de condições de ortogonalidade e Q o número de parâmetros a serem estimados. A estimação do modelo é feita ao se igualar Q combinações lineares das R condições de ortogonalidade a zero. Assim, para o caso em que $R > Q$, existem $R - Q$ combinações lineares independentes das condições de ortogonalidade que deveriam ser zero, mas não o são. O teste de sobre-identificação proposto por Hansen (1982) consiste em uma extensão do teste J de Sargan (Sargan, 1958, 1959) e é dado por

$$J = g_T(x_t, \beta_0)' W g_T(x_t, \beta_0) \sim \chi_{R-Q}^2, \quad (10)$$

em que a hipótese nula é $H_0 : \mathbb{E}[f(x_t, \beta_0)] = 0$. Neste teste, rejeitar a hipótese nula indica que o modelo está mal especificado.

Para que as condições de ortogonalidade utilizadas na estimação em (9) sejam satisfeitas apenas no vetor verdadeiro de parâmetros, é necessário que seja escolhida uma matriz de ponderação simétrica, positiva definida e de dimensão $R \times R$, e a escolha dessa matriz define a métrica de distância utilizada para aproximar $g_T(\cdot)$ de zero (Hansen, 1982; Hansen e Singleton, 1982). Como exposto em Hansen e Singleton (1982), a estimação de uma matriz de covariância ótima pode ser feita em dois estágios. Essa estratégia de estimação é conhecida como *Two-Step GMM* e seu primeiro estágio consiste em uma escolha sub-ótima da matriz W para se encontrar um estimador $\hat{\beta}_1$ para β_0 em (9), sendo comum o uso da matriz identidade I_R (Cochrane, 2009).

Conforme argumentam Hansen e Singleton (1982), pode-se entender as condições de ortogonalidade $\mathbb{E}[f(x_t, \beta_0)] = 0$ como equações de Euler estocásticas resultantes de um problema de maximização de utilidade de um

consumidor representativo em um ambiente com incerteza. Assim, para o caso específico deste trabalho, considere $u_t = \beta \frac{u'(C_{t+1}; \beta_0)}{u'(C_t; \beta_0)} R_{t+1} - 1$ e z_t um conjunto de variáveis observadas em t . As condições de ortogonalidade populacionais podem então ser escritas como

$$\mathbb{E} \left\{ \left(\beta \frac{u'(C_{t+1}; \beta_0)}{u'(C_t; \beta_0)} R_{t+1} - 1 \right) \otimes z_t \right\} = 0, \quad (11)$$

Seja $\beta_0 = (\beta, \sigma)$. Ao assumir uma função utilidade do tipo CRRA e SDF $\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \equiv M_{t+1}$, tem-se que

$$g_T(x_t, \beta_0) = g_T(\beta, \sigma) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \left\{ \left[\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} R_{t+1} - 1 \right] \otimes z_t \right\}, \quad (12)$$

em que o vetor x_t foi omitido de $g_T(\beta, \sigma)$ para fins de simplificação de notação. Após a estimação dos parâmetros $\hat{\beta}^{GMM}$ e $\hat{\sigma}^{GMM}$, obtém-se

$$M_{t+1}^{GMM} = \hat{\beta}^{GMM} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\hat{\sigma}^{GMM}}. \quad (13)$$

GEL. Embora o estimador de GMM possua boas propriedades assintóticas, evidências apontam para um alto viés nas estimações em amostras pequenas (Smith, 1997). De acordo com Newey e Smith (2004), uma desvantagem do GMM é que o viés⁴ do estimador costuma aumentar conforme aumentam as condições de momento utilizadas na estimação. Essa é uma propriedade importante corrigida pelos modelos da classe *Generalized Empirical Likelihood Estimators* (GEL), uma vez que é comum o uso de muitos instrumentos em modelos econométricos, e conforme o número de instrumentos aumenta, cresce a quantidade de condições de ortogonalidade a serem testadas. É o caso, por exemplo, do trabalho de Hansen e Singleton (1982), que testam o modelo utilizando diferentes instrumentos, sendo eles 1, 2, 4 ou 6 defasagens das variáveis observadas.

Desenvolvida no trabalho de Newey e Smith (2004), a classe de estimadores GEL sugere alternativas para o GMM em um esforço de aprimorar as

⁴Os autores argumentam que uma das principais fontes desse viés se dá pela correlação das funções de momentos com seus Jacobianos na presença de endogeneidade. Para modelos com dados em painel, outra importante fonte de viés surge da estimação da matriz de ponderação ótima.

propriedades em amostras pequenas desses estimadores, mas que possuem as mesmas propriedades assintóticas. Para construir o modelo GEL, considere uma função $\rho(v)$ estritamente côncava que satisfaça as seguintes condições: $\rho(0) = 0$, $\frac{\partial \rho(0)}{\partial v} = \frac{\partial^2 \rho(0)}{\partial v^2} = -1$. O estimador GEL $\hat{\beta}_0$ é obtido ao se resolver

$$\min_{\beta_0} \sup_{\lambda \in \Lambda_T} \sum_{t=1}^T \rho(\lambda' g_t(\beta_0)), \quad (14)$$

em que $\Lambda_T = \{\lambda : \lambda' g_t(b) \in \Upsilon\}$, Υ é algum conjunto aberto que contém zero e $g_t(\beta_0) \equiv f(x_t, \beta_0)$, em que $f(x_t, \beta_0)$ é definida da mesma maneira que no GMM (Newey e Smith, 2004).

De acordo com os autores, essa é uma abordagem genérica, uma vez que diferentes escolhas para $\rho(v)$ levam a casos especiais de estimadores alternativos ao GMM (Kitamura e Stutzer, 1997; Hansen et al., 1996; Owen, 1988; Imbens, 1997). Conforme argumenta Smith (1997), este problema pode ser resolvido por verossimilhança empírica, com o objetivo suavizar o modo como o modelo lida com as condições de momentos impostas, ao associar pesos a cada uma delas. Assim, o problema se torna:

$$\begin{aligned} \max_{p, \beta_0} \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log(p_t) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{t=1}^T p_t g_t(\beta_0) = 0 \\ & \sum_{t=1}^T p_t = 1, \end{aligned} \quad (15)$$

Após resolver as condições de primeira ordem, tem-se que

$$\hat{\beta}_0 = \arg \max_{\beta_0} \min_{\lambda} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T -\log(1 + \lambda' g_t(\beta_0)). \quad (16)$$

A equação de momentos utilizada é a mesma do GMM, e após a estimação dos parâmetros, obtém-se

$$M_{t+1}^{GEL} = \hat{\beta}^{GEL} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\hat{\sigma}^{GEL}}. \quad (17)$$

Uma outra vantagem do modelo GEL é que ele consta com o mesmo teste de especificação do modelo GMM, especificado na equação (10), dadas as equivalências das propriedades assintóticas desses estimadores (Anatolyev e Gospodinov, 2011; Smith, 2011).

Low Frequency Econometrics. Como a construção do CCAPM (Breedem, 1979) se baseia no ambiente econômico descrito por Lucas (1978), este modelo implica em uma relação de equilíbrio de longo prazo. Dessa forma, é importante que a modelagem empírica desse modelo seja feita utilizando-se dados relativos à tendência de longo prazo da série de consumo, para que o modelo empírico seja capaz de recuperar a relação de equilíbrio imposta pelo modelo teórico.

De maneira a extrair apenas este componente de longo prazo da série de consumo, utilizou-se o método de suavização desenvolvido por Müller e Watson (2015). Essa necessidade se dá uma vez que a série de consumo costuma apresentar um padrão sazonal, muito ligado a componentes cíclicos (de curto prazo) da economia. Um exemplo disso é a representação da utilidade marginal do consumo como um passeio aleatório com tendência (Hall, 1978). Tais oscilações de curto prazo podem se dar, por exemplo, quando há um choque temporário no preço de ações de uma economia. Conforme argumenta Hamilton (2018), preços de ações possuem alguma habilidade em antecipar mudanças no consumo agregado. Dessa forma, um choque temporário de preços de ações leva a mudanças de curto prazo no consumo agregado.

O método proposto por Müller e Watson (2015) conta com projeções da série temporal em um número pequeno de funções trigonométricas para extrair o componente de tendência da série analisada, que os autores denominam de variabilidade de baixa frequência.

De acordo com os autores, o uso de métodos de projeção é justificado pelo baixo custo computacional da aplicação de tais métodos, e pela simplicidade da inferência estatística resultante dessa aplicação. Seja x_t uma série temporal observada em $t = 1, \dots, T$, e $\Psi_j(s) = \sqrt{2} \cos(js\pi)$. $\Psi_j(t/T)$ possui então período $2T/j$. Seja $\Psi(s) = [\Psi_1(s), \dots, \Psi_q(s)]' \in \mathbb{R}^q$. Além disso, $\Psi_T = \left[\Psi_1\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{T}\right), \Psi\left(\frac{2-\frac{1}{2}}{T}\right), \dots, \Psi\left(\frac{T-\frac{1}{2}}{T}\right) \right]'$, uma matriz $T \times q$ obtida ao se avaliar $\Psi(\cdot)$ em $s = \frac{t-\frac{1}{2}}{T}$. As projeções de baixa frequência (a tendência de longo prazo) são os valores ajustados da seguinte regressão em MQO (Mínimos Quadrados Ordinários):

$$\hat{x}_t = \bar{x} + \Psi\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{T}\right)' X_T, \quad (18)$$

em que $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$ e $X_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Psi\left(\frac{t-1/2}{T}\right) x_t$ é o vetor de coeficientes da regressão. O j -ésimo coeficiente, X_{jT} , é a chamada j -ésima transformada de cosseno de $[x_1, x_2, \dots, x_T]'$.

4. Resultados

Amostra de Dados. O período de coleta foi do primeiro trimestre de 2002 ao segundo trimestre de 2022. Utilizou-se dados de consumo final das famílias e PIB a preços de mercado, ambos com frequência trimestral, encadeados a preços de 1995, e retirados do Sistema IBGE de Recuperação Automática (SIDRA) do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Os dados da razão consumo/PIB foram utilizados na equação (7). Para o cálculo do crescimento do consumo (C_{t+1}/C_t) foram utilizados dados dessazonalizados do consumo final das famílias encadeados a preços de 1995, também retirados do SIDRA. Estes dados foram utilizados no cálculo do SDF extraído da utilidade CRR. Os dados de expectativa de inflação (expectativa média de Inflação - IPCA - taxa acumulada para os próximos doze meses) foram retirados do Banco Central do Brasil, Boletim, Seção Atividade Econômica (Bacen / Boletim / Ativ. Ec.) e foram utilizados na equação (6). Os dados da taxa DI foram retirados do Sistema Gerador de Séries Temporais (SGS) do Banco Central do Brasil.

Para representar estatísticas de retornos de ativos, coletou-se dados trimestrais dos retornos das 150 ações mais bem posicionadas na B3. As ações foram classificadas em ordem decrescente de acordo com o volume de negociação médio durante o período de análise. Em seguida, foram retirados os papéis cujos retornos não estavam disponíveis para algum sub-período da amostra. Ao final, restaram 76 papéis. Os retornos do Ibov (Índice Bovespa) foram retirados da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (Anbima)⁵. Para o cálculo dos retornos reais, utilizou-se dados de inflação, medidos pelo IPCA acumulado em 12 meses, que foram retirados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Sistema Nacional de Índices de Preços ao Consumidor (IBGE/SNIPC). Todos os dados de inflação, retornos e o da taxa DI foram anualizados.

Para a estimação do modelo MQO (Mínimos Quadrados Ordinários) na equação (7), foram utilizados dados do logaritmo natural da razão consumo/PIB e, no vetor X_t , foram testadas quatro combinações de retornos. Essas combinações consistiram em utilizar-se: os retornos do Ibovespa, a média das cinco, das dez e das quinze ações de melhor *performance* no período, de acordo com o volume médio de negociação. Foram elas: PETR4, VALE3, ITUB4, BBDC4, BBAS3, PETR3, ABEV3, ITSA4, GGBR4, USIM5, CSNA3, CMIG4, ELET3, ELET6, EMBR3. Estas carteiras foram utilizadas também nas condições de momentos do GMM e do GEL e nos seus respectivos vetores de instrumentos.

⁵Foram utilizadas médias trimestrais dos retornos do Ibovespa.

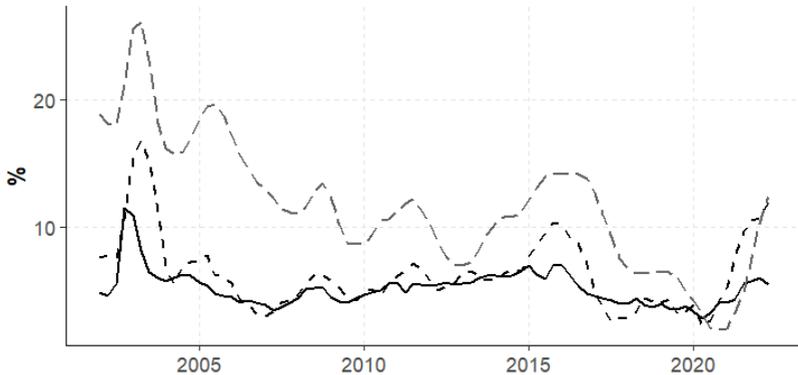
A Tabela 1 apresenta algumas estatísticas descritivas das séries de retornos reais utilizadas. Para ilustrar as dinâmicas das demais variáveis ao longo do tempo, apresentam-se as Figuras 1 e 2.

| Ativo | Retorno real médio (% a.a.) | Desvio-padrão (p.p.) |
|-------------|-----------------------------|----------------------|
| Média TOP5 | -0,64 | 14,81 |
| Média TOP10 | -0,52 | 14,89 |
| Média TOP15 | -0,57 | 14,50 |
| IBOV | 18,54 | 60,29 |

Fontes: Economática e Ambima

Tabela 1
Estatísticas dos ativos utilizados

A figura abaixo ilustra o comportamento da taxa DI, da expectativa de inflação e do IPCA ao longo do tempo. Os dados foram transformados da frequência mensal para a trimestral utilizando a média do período referente a um trimestre.



Legenda — Expectativa de Inflação - - IPCA - · - Taxa DI

Figura 1
Expectativa de Inflação, IPCA e DI trimestrais (% a.a.)

Fontes: Banco Central do Brasil e IBGE

O crescimento (bruto) do consumo foi utilizado para representar o termo C_{t+1}/C_t nas equações (13) e (17) e nos instrumentos z_t do GMM e GEL.

A Figura 2 mostra um choque abrupto no crescimento do consumo em 2020, refletindo os impactos imediatos da pandemia de COVID-19, seguido



Figura 2
Crescimento do consumo
 Fonte: SIDRA IBGE

de uma recuperação rápida à medida que restrições foram flexibilizadas e estímulos econômicos foram implementados. Teoricamente, mesmo diante da volatilidade extrema do consumo nesse período, a taxa livre de risco deveria permanecer estável, uma vez que pela hipótese de covariância zero, ela não é afetada por choques econômicos.

Estimação do SDF. Serão apresentados os resultados da estimação do modelo MQO da equação (7) para os três modelos em questão, bem como as estimativas dos parâmetros β e σ nos modelos GMM e GEL, e as taxas livres de risco estimadas por cada um dos três modelos.

Na equação (7), o vetor X_t foi construído de forma a conter algum dos seguintes retornos: $RET5_t$, $RET10_t$, $RET15_t$, que são, respectivamente, a média dos cinco, dez e quinze retornos das ações mais bem posicionadas no *ranking* de ativos, ou $Ibov_t$, que são os retornos do Ibovespa. A escolha do modelo de MQO que foi levado adiante se deu com base no seu R^2 ajustado e/ou na significância dos coeficientes, ou seja, no p-valor de cada um deles.

Na estimação do modelo AIF, o termo \bar{R}_t incluiu os 76 papéis que fizeram parte do *ranking* de ativos para a construção de \bar{R}_t^A e \bar{R}_t^G . Após a construção de \bar{R}_t , os valores encontrados para M_t^{AIF} de acordo com a equação (8) foram utilizados na regressão em (7) para estimar-se $\mathbb{E}_t\{M_{t+1}\}$. A Tabela 2 representa os resultados dessa regressão em MQO para o modelo AIF.

| | MQO 1 | | MQO 2 | | MQO 3 | | MQO 4 | |
|------------------|------------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|-----------|-----------|
| | Estim. | p-valor | Estim. | p-valor | Estim. | p-valor | Estim. | p-valor |
| $RET5_t$ | -0.0004007 | 0,997 | | | | | | |
| $RET10_t$ | | | -0,02167 | 0,838 | | | | |
| $RET15_t$ | | | | | -0,02870 | 0,792 | | |
| $Ibov_t$ | | | | | | | -0,019418 | 0,46 |
| $\ln(C_t/PIB_t)$ | 0,2465076 | 5,79e-15*** | 0,25160 | 2,25e-15*** | 0,25327 | 4,69e-15*** | 0,251974 | <2e-16*** |
| R^2 ajustado | | 0,9814 | | 0,9814 | | 0,9814 | | 0,9815 |

Tabela 2

Resultados do modelo MQO - AIF

Nota: * $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$. Fonte: Elaboração própria.

Pela tabela acima, nota-se que em nenhum modelo os retornos foram significantes, mas em todos eles a variável $\ln(C_t/PIB_t)$ apresentou p-valor < 0.05 . Os modelos também apresentaram bons valores para o R^2 ajustado, todos acima de 0,98. Com base no p-valor de $\ln(C_t/PIB_t)$ e no R^2 das quatro regressões, escolheu-se então o modelo MQO 4 para prosseguir com as estimativas da taxa livre de risco no modelo AIF.

Para a estimação dos parâmetros $\hat{\beta}$ e $\hat{\sigma}$ nos modelos GMM e GEL, foram testadas diferentes combinações de carteiras para representar o termo R_{t+1} nas condições de momentos. Estas carteiras foram as mesmas testadas nos modelos de MQO da equação (7), isto é, $RET5_{t+1}$, $RET10_{t+1}$, $RET15_{t+1}$ ou $Ibov_{t+1}$. Para o vetor de instrumentos, testou-se os modelos com $z = (1, R_t, C_t/C_{t-1})$, $z = (1, C_t/C_{t-1}, C_{t-1}/C_{t-2})$ e $z = (1, C_t/C_{t-1})$.

No vetor z , o termo R_t representa $RET5_t$, $RET10_t$, $RET15_t$ ou $Ibov_t$. As combinações dos retornos foram feitas utilizando-se tanto as quatro carteiras em questão quanto apenas uma delas, ou uma combinação entre duas e três das carteiras construídas. Para fins de ilustração, considere o caso em que $R_{t+1} = (RET5_{t+1}, RET10_{t+1}, RET15_{t+1}, Ibov_{t+1})$. Neste caso, $R_t = (RET5_t, RET10_t, RET15_t, Ibov_t)$. Considere agora o caso em que $R_{t+1} = (RET5_{t+1}, RET10_{t+1})$. Tem-se então que $R_t = (RET5_t, RET10_t)$. A mesma lógica aplica-se ao caso em que utiliza-se três carteiras ou apenas uma delas.

As escolhas para R_{t+1} e z se deram com base no critério de significância econômica dos parâmetros estimados. Isto é, procurou-se combinações de retornos e instrumentos que gerassem estimações para β tais que $0 < \hat{\beta} < 1$, e estimações para σ tais que $\hat{\sigma} > 0$. Para o GMM, a combinação que gerou os resultados mais aderentes foi $R_{t+1} = Ibov_{t+1}$ e $z = (1, C_t/C_{t-1}, C_{t-1}/C_{t-2})$. Para o GEL, as escolhas para os retornos foram $R_{t+1} = RET15_{t+1}$, e para o vetor de instrumentos, utilizou-se $z = (1, RET15_t, C_t/C_{t-1})$. A Tabela 3 abaixo ilustra as estimações realizadas para β e σ para os modelos GMM e GEL, bem como os resultados para o Teste J de sobreidentificação.

| | GMM | | GEL | |
|------------------------------|---------|-----------------|-----------|-----------------|
| | Estim. | <i>p</i> -valor | Estim. | <i>p</i> -valor |
| $\hat{\beta}$ | 0,85927 | <2e-16*** | 0,986941 | <2e-16*** |
| $\hat{\sigma}$ | 1,35257 | 0,908 | -2,187177 | 0,171 |
| Estatística <i>J</i> | 2,5121 | | 0,33384 | |
| DF | 1 | | 1 | |
| <i>p</i> -valor (<i>J</i>) | 0,11297 | | 0,174 | |

Nota: * $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$. DF: graus de liberdade para a construção da estatística *J*

Fonte: Elaboração própria

Tabela 3

Parâmetros estimados dos modelos GMM e GEL

Nota-se pela tabela acima que não há evidência de especificação incorreta para os modelos estimados, pois não se rejeita a hipótese nula para o teste *J* ao nível 0,05. Entretanto, apenas o estimador $\hat{\beta}$ foi ao mesmo tempo estatisticamente e economicamente significativo em ambos os modelos. O estimador $\hat{\sigma}$, por outro lado, não foi estatisticamente significativo em nenhum deles, e foi economicamente significativo apenas no modelo GMM. Para fins de comparação com alguns resultados da literatura, observa-se que [Cysne \(2006\)](#) encontra valores para σ entre 14,15 e 19,12. Para o fator de desconto, o autor encontra $\beta = 0,995$ em simulações com $\sigma > 7$, e $\beta = 0,9740$ em simulações com $\sigma > 9$. Já [Issler e Piqueira \(2000\)](#) encontram um valor mediano de 0,96 para β considerando dados anualizados em frequência trimestral e 1,70 para σ .

As comparações com estes trabalhos na literatura brasileira indicam que os modelos não apresentaram resultados robustos. Para o GMM, embora o coeficiente de averção ao risco estimado esteja próximo ao da literatura, ele não é significativo, e o valor para o fator de desconto subjetivo se mostrou muito baixo. Para o GEL, embora o fator de desconto tenha se mostrado significativo e em linha com a literatura, o coeficiente de aversão ao risco não foi significativo e possui sinal negativo, indicando um comportamento de afinidade ao risco do investidor brasileiro.

Com as estimativas acima, os valores calculados para M_{t+1}^{GMM} e M_{t+1}^{GEL} de acordo com as equações (13) e (17), respectivamente, foram utilizados na regressão em (7) para estimar $\mathbb{E}_t \{M_{t+1}\}$. As Tabelas 4 e 5 apresentam os resultados dos modelos MQO para o GMM e para o GEL, respectivamente.

| | MQO 1 | | MQO 2 | | MQO 3 | | MQO 4 | |
|-------------------------|-----------|-----------|-----------|-------------|-----------|-------------|-----------|-----------|
| | Estim. | p-valor | Estim. | p-valor | Estim. | p-valor | Estim. | p-valor |
| \overline{RET}_t | -0,056015 | 0,00104** | | | | | | |
| $\overline{RET}_{10,t}$ | | | -0,059790 | 0,000418*** | | | | |
| $\overline{RET}_{15,t}$ | | | | | -0,060923 | 0,000447*** | | |
| $l_{bov,t}$ | | | | | | | -0,010567 | 0,0141* |
| $\ln(C_t/PIB_t)$ | 0,217743 | <2e-16*** | 0,218666 | <2e-16*** | 0,218920 | <2e-16*** | 0,207408 | <2e-16*** |
| R^2 ajustado | 0,9993 | | 0,9994 | | 0,9994 | | 0,9993 | |

Nota: * $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 4

Resultados do modelo MQO - GMM

| | MQO 1 | | MQO 2 | | MQO 3 | | MQO 4 | |
|-------------------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|
| | Estim. | p-valor | Estim. | p-valor | Estim. | p-valor | Estim. | p-valor |
| \overline{RET}_t | 0,130359 | 4,19e-05*** | | | | | | |
| $\overline{RET}_{10,t}$ | | | 0,142284 | 5,68e-06*** | | | | |
| $\overline{RET}_{15,t}$ | | | | | 0,138025 | 1,97e-05*** | | |
| $l_{bov,t}$ | | | | | | | 0,028235 | 0,000421*** |
| $\ln(C_t/PIB_t)$ | 0,209190 | <2e-16*** | 0,206291 | <2e-16*** | 0,207349 | <2e-16*** | 0,232186 | <2e-16*** |
| R^2 ajustado | 0,9984 | | 0,9985 | | 0,9985 | | 0,9983 | |

Nota: * $p < 0,05$; ** $p < 0,01$; *** $p < 0,001$.

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 5

Resultados do modelo MQO - GEL

Os coeficientes de todos os retornos e de $\ln(C_t/PIB_t)$ foram estatisticamente significantes para todos os modelos de MQO, tanto para o GMM quanto para o GEL, e apresentaram bons valores para o R^2 ajustado, todos acima de 0,99. Com base no R^2 e no p-valor, para o GMM o modelo que foi levado adiante foi o MQO 3, e para o GEL a escolha foi o MQO 2.

Finalmente, com os resultados de $\mathbb{E}_t \{M_{t+1}\}$ encontrados pelas três abordagens (AIF, GMM e GEL), estimou-se a taxa livre de risco nominal da equação (6). A Figura 3 ilustra o comportamento das taxas estimadas pelos três modelos e o comportamento da DI ao longo do tempo, para fins de comparação entre os resultados.

Os resultados encontrados pelos modelos AIF e GEL vão ao encontro dos resultados de [Bonomo e Domingues \(2002\)](#), que encontram evidências de um *risk-free rate puzzle* invertido para o Brasil, em que as taxas estimadas pelos modelos são menores que aquelas observadas na economia. No modelo dos autores, essa discrepância entre a taxa resultante do modelo e a taxa observada surge ao se utilizar um fator de desconto subjetivo (β) compatível com dados trimestrais anualizados, isto é, no intervalo entre 0,9 e 1.

Por outro lado, o modelo GMM vai ao encontro do *risk-free rate puzzle* clássico de [Weil \(1989\)](#), em que as taxas estimadas pelo modelo são maiores que aquelas observadas na economia. No modelo do autor, para encontrar taxas

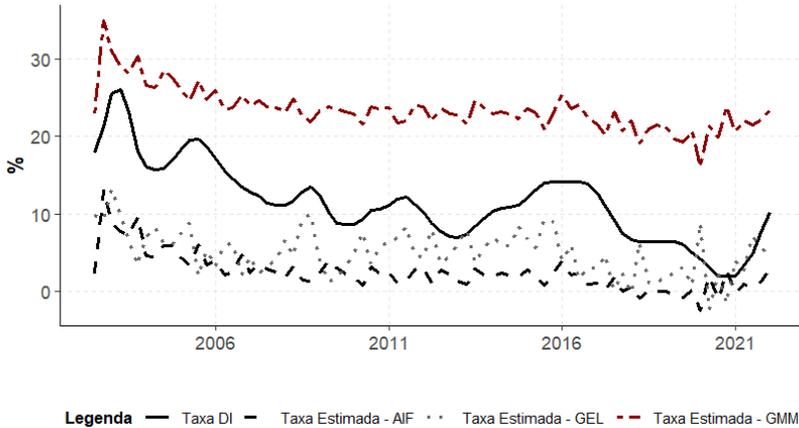


Figura 3
DI vs. Taxas estimadas (% a.a.)
 Fonte: Elaboração própria

livres de risco estimadas próximas às observadas, seria necessário ajustar o fator de desconto subjetivo para algo maior que 1, o que contraria as hipóteses do modelo teórico.

A tabela abaixo ilustra o comportamento médio dessas taxas, bem como desvio-padrão de cada uma delas.

| | Média (% a.a.) | Desvio-padrão |
|-----|----------------|---------------|
| AIF | 2,47 | 2,45 |
| GMM | 23,52 | 2,80 |
| GEL | 5,03 | 2,94 |
| DI | 11,54 | 5,14 |

Fonte: Elaboração própria

Tabela 6
Médias e desvios-padrão das taxas estimadas e da DI

Apesar das divergências com a literatura, nota-se pela Figura 4 abaixo, que as taxas estimadas foram positivamente correlacionadas entre si e com a DI, o que traz robustez às metodologias utilizadas nas estimações. Mesmo assim, pela Figura 3 e pela Tabela 6, nota-se que essas taxas diferem muito entre si.

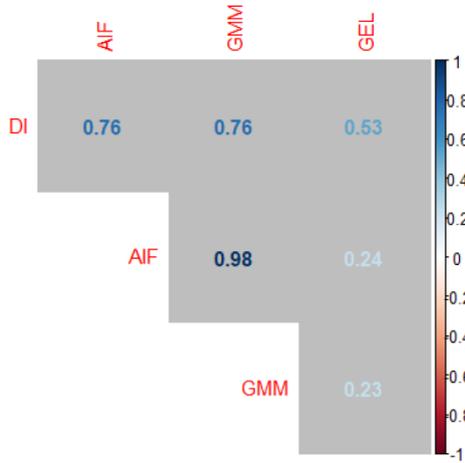


Figura 4
Correlações entre as diferentes taxas
 Fonte: Elaboração própria

5. Conclusão

Com base em dados trimestrais de retornos de ações da B3, retornos do Ibovespa e consumo (em nível e como proporção do PIB) entre o primeiro trimestre de 2002 e o segundo trimestre de 2022, este estudo estimou a taxa livre de risco para o Brasil utilizando o modelo CCAPM com função utilidade CRRA e diferentes abordagens econométricas. As estimativas obtidas pelos métodos AIF, GMM e GEL diferiram entre si e da taxa DI, usualmente adotada como *proxy* para a taxa livre de risco no Brasil, embora todas tenham apresentado correlação positiva. O modelo GMM gerou, em média, uma taxa livre de risco superior à taxa DI, sugerindo a existência de um *risk-free rate puzzle* na economia brasileira, conforme identificado por Weil (1989) para os Estados Unidos. Já os modelos AIF e GEL resultaram, em média, em taxas inferiores à taxa DI, indicando um *risk-free rate puzzle* invertido, similar ao documentado por Bonomo e Domingues (2002) para o Brasil. Além disso, as estimativas dos parâmetros β e σ nos modelos GMM e GEL mostraram pouca aderência dos dados brasileiros ao CCAPM, especialmente quando comparadas a estudos anteriores na literatura de macro-financeiras do país.

A existência de um *risk-free rate puzzle* pode sinalizar que o mercado não percebe os títulos públicos como completamente livres de risco. Consequentemente, os agentes podem exigir prêmios de risco mais altos, tornando o crédito mais caro e obstruindo canais de transmissão da política monetária,

dificultando o controle da inflação e a suavização do ciclo econômico.

A metodologia aqui empregada pode ser aprimorada de diversas maneiras. Pesquisas futuras podem explorar diferentes especificações para a função utilidade, incluindo heterogeneidade entre agentes e mercados incompletos. Outra possibilidade é segmentar o consumo em bens duráveis, não duráveis e serviços, ou diversificar os dados de retornos para ampliar a representatividade da carteira. Além disso, pode-se testar se o excesso de retorno entre a taxa DI e a taxa livre de risco estimada possui preço nulo, aprofundando a compreensão dos prêmios de risco no mercado brasileiro.

Agradecimentos Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro por meio da concessão de bolsa de estudos durante o mestrado de Rafael, que viabilizou a realização deste trabalho. São gratos também ao Prof. Marco Lyrio e ao Prof. João Victor Issler pelas valiosas sugestões e comentários durante a banca de mestrado, que contribuíram significativamente para o aprimoramento deste estudo. Todos os erros e omissões remanescentes são de inteira responsabilidade dos autores.

Conflitos de interesse Os autores declaram que não há conflitos de interesse.

Inteligência Artificial Esta pesquisa utilizou ferramentas de inteligência artificial (IA) para auxiliar na análise de dados, redação do manuscrito e geração de figuras. Todo o conteúdo gerado por IA foi criteriosamente revisado e validado pelos autores, a fim de garantir a precisão e a conformidade com a integridade científica do estudo. O uso de IA seguiu diretrizes éticas, assegurando transparência e conformidade com os padrões acadêmicos. Eventuais vieses ou limitações inerentes às ferramentas de IA foram cuidadosamente considerados na interpretação dos resultados. Os autores afirmam que o uso de IA não comprometeu a originalidade nem a integridade do trabalho.

Referências

Almeida, C. e Garcia, R. (2012). Assessing misspecified asset pricing models with empirical likelihood estimators, *Journal of Econometrics* **170**(2): 519–537.

Anatolyev, S. e Gospodinov, N. (2011). *Methods for estimation and inference in modern econometrics*, CRC Press.

- Araujo, F., Issler, J. V. e Fernandes, M. (2005). Estimating the stochastic discount factor without a utility function, *Ensaios Econômicos da EPGE* (583).
- Arrow, K. J. (1964). The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing, *The Review of Economic Studies* **31**(2): 91–96.
- Arrow, K. J. e Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* **22**(3): 265–290.
- Bonomo, M. e Domingues, G. B. (2002). Os puzzles invertidos no mercado brasileiro de ativos, *Finanças aplicadas ao Brasil* pp. 105–120.
- Breeden, D. T. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities, *Journal of Financial Economics* **7**(3): 265–296.
- Brown, D. P. e Gibbons, M. R. (1985). A simple econometric approach for utility-based asset pricing models, *The Journal of Finance* **40**(2): 359–381.
- Campbell, J. Y. (1993). Intertemporal asset pricing without consumption data, *American Economic Review* **83**(3): 487–512.
- Campbell, J. Y. (2014). Empirical asset pricing: Eugene fama, lars peter hansen, and robert shiller, *The Scandinavian Journal of Economics* **116**(3): 593–634.
- Cochrane, J. (2009). *Asset pricing: Revised edition*, Princeton University Press.
- Cysne, R. P. (2006). Equity-premium puzzle: evidence from brazilian data, *Economia Aplicada* **10**(2): 161–180.
- De Castro, M. R., Gouvea, S. N., Minella, A., Santos, R. e Souza-Sobrinho, N. F. (2015). Samba: Stochastic analytical model with a bayesian approach, *Brazilian Review of Econometrics* **35**(2): 103–170.
- Debreu, G. (1959). *Theory of value: An axiomatic analysis of economic equilibrium*, Vol. 17, Yale University Press.
- Dimson, E., Marsh, P. e Staunton, M. (2006). The worldwide equity premium: A smaller puzzle, *Chapter* **11**: 467–514.
- Farnsworth, H., Ferson, W. E., Jackson, D. L. e Todd, S. (2002). Performance evaluation with stochastic discount factors, *The Journal of Business* **75**(3): 473–583.

- Gomes, F. A. R., Costa, L. d. A. e Pupo, R. C. R. (2013). The equity premium puzzle: analysis in brazil after the real plan, *BAR-Brazilian Administration Review* **10**(2): 135–157.
- Hall, R. E. (1978). Stochastic implications of the life cycle-permanent income hypothesis: theory and evidence, *Journal of Political Economy* **86**(6): 971–987.
- Hamilton, J. D. (2018). Why you should never use the hodrick-prescott filter, *Review of Economics and Statistics* **100**(5): 831–843.
- Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* **50**(4): 1029–1054.
- Hansen, L. P., Heaton, J. e Yaron, A. (1996). Finite-sample properties of some alternative gmm estimators, *Journal of Business & Economic Statistics* **14**(3): 262–280.
- Hansen, L. P. e Jagannathan, R. (1991). Implications of security market data for models of dynamic economies, *Journal of political economy* **99**(2): 225–262.
- Hansen, L. P. e Richard, S. F. (1987). The role of conditioning information in deducing testable restrictions implied by dynamic asset pricing models, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* **55**(3): 587–613.
- Hansen, L. P. e Singleton, K. J. (1982). Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* **50**(5): 1269–1286.
- Hansen, L. P. e Singleton, K. J. (1983). Stochastic consumption, risk aversion, and the temporal behavior of asset returns, *Journal of Political Economy* **91**(2): 249–265.
- Harrison, J. M. e Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic theory* **20**(3): 381–408.
- Hodrick, R. J. e Prescott, E. C. (1997). Postwar us business cycles: an empirical investigation, *Journal of Money, Credit, and Banking* **29**(1): 1–16.
- Horowitz, J. L. (2009). *Semiparametric and nonparametric methods in econometrics*, Vol. 12, Springer.

- Imbens, G. W. (1997). One-step estimators for over-identified generalized method of moments models, *The Review of Economic Studies* **64**(3): 359–383.
- Issler, J. V. e Piqueira, N. S. (2000). Estimating relative risk aversion, the discount rate, and the intertemporal elasticity of substitution in consumption for brazil using three types of utility function, *Brazilian Review of Econometrics* **20**(2): 201–239.
- Ito, M. e Noda, A. (2012). The gel estimates resolve the risk-free rate puzzle in japan, *Applied Financial Economics* **22**(5): 365–374.
- Jiang, Z., Lustig, H., Van Nieuwerburgh, S. e Xiaolan, M. Z. (2024). The us public debt valuation puzzle, *Econometrica* **92**(4): 1309–1347.
- Kitamura, Y. e Stutzer, M. (1997). An information-theoretic alternative to generalized method of moments estimation, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* **65**(4): 861–874.
- Krishnamurthy, A. e Vissing-Jorgensen, A. (2012). The aggregate demand for treasury debt, *Journal of Political Economy* **120**(2): 233–267.
- Lucas, R. E. (1978). Asset prices in an exchange economy, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* **46**(6): 1429–1445.
- Mehra, R. e Prescott, E. C. (1985). The equity premium: a puzzle, *Journal of Monetary Economics* **15**(2): 145–161.
- Müller, U. K. e Watson, M. W. (2015). Low-frequency econometrics, *Technical report*, National Bureau of Economic Research.
- Newey, W. K. e Smith, R. J. (2004). Higher order properties of gmm and generalized empirical likelihood estimators, *Econometrica* **72**(1): 219–255.
- Noda, A. et al. (2011). Testing the "catching up with the joneses" model with consumption externality in japan", *Economics Bulletin* **31**(2): 1648–1658.
- Owen, A. B. (1988). Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional, *Biometrika* **75**(2): 237–249.
- Pereira, C. A. V. (2016). *Portfolio efficiency tests with conditioning information using empirical likelihood estimation*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.

- Rosenberg, J. V. e Engle, R. F. (2002). Empirical pricing kernels, *Journal of Financial Economics* **64**(3): 341–372.
- Rubinstein, M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options, *The Bell Journal of Economics* **7**(2): 407–425.
- Sargan, J. D. (1958). The estimation of economic relationships using instrumental variables, *Econometrica: Journal of the Econometric society* **26**(3): 393–415.
- Sargan, J. D. (1959). The estimation of relationships with autocorrelated residuals by the use of instrumental variables, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* **21**(1): 91–105.
- Simonassi, A. G. (2006). Estimando a taxa de retorno livre de risco no brasil, *In: VI Encontro Bra-sileiro de Finanças, Vitória, Anais...* .
- Smith, R. J. (1997). Alternative semi-parametric likelihood approaches to generalised method of moments estimation, *The Economic Journal* **107**(441): 503–519.
- Smith, R. J. (2011). Gel criteria for moment condition models, *Econometric Theory* **27**(6): 1192–1235.
- Van Binsbergen, J. H., Diamond, W. F. e Grotteria, M. (2022). Risk-free interest rates, *Journal of Financial Economics* **143**(1): 1–29.
- Weil, P. (1989). The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle, *Journal of Monetary Economics* **24**(3): 401–421.