



CRACK PROPAGATION ANALYSIS IN QUASE-BRITTLE MATERIALS USING THE DUAL BOUNDARY ELEMENT METHOD

Heider de Castro e Andrade (1, P); Edson Denner Leonel (2)

(1) MSc. Structural Engineer, University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, São Carlos - SP, Brazil.

(2) Prof. PhD, University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, São Carlos - SP, Brazil.
E-mail address: heider.andrade@usp.br; (P) Presenter

Abstract: The fracture phenomenon in quasi-brittle materials, such as concrete, rock and wood, is accompanied by a significant extension of the process zone ahead of the crack tip. Therefore, the strategies used to model the material degradation must consider the energy dissipation that occurs in this region. In this paper, the fictitious crack model is applied to simulate the crack growth in quasi-brittle materials. In this cohesive model, the process zone is assumed as a virtual crack length submitted to closing forces representing the non-linear material behaviour. The numerical analyses are carried out by the dual boundary element method (DBEM), which uses both singular and hypersingular integral equations. The DBEM is an efficient and robust numerical technique for crack propagation analyses, especially due to the non-requirement of a domain mesh. This feature allows the accurate representation of the elastic fields next to the crack tip and simplifies the remeshing process during crack propagation. The non-linear system of equations obtained with the DBEM is solved iteratively considering the constant operator. The state of stress at the crack tip, evaluated by extrapolation, is used to verify the crack stability. Moreover, the crack growth direction is determined with linear-elastic fracture considerations. Two numerical examples are presented to demonstrate the accuracy of the proposed model to deal with crack growth in quasi-brittle materials. The results are in good agreement with the numerical and experimental responses available in the literature.

Keywords: *Quasi-brittle materials; cohesive models; fictitious crack model; crack propagation; dual boundary element method.*

1 INTRODUÇÃO

Para materiais que apresentam ductilidade não desprezável, a fratura ocorre com o desenvolvimento significativo da zona de processos inelásticos (ZPI) posicionada à frente da ponta da fissura. Nesses casos, a modelagem mecânica deve ser efetuada com a consideração dos efeitos dos fenômenos inelásticos que ocorrem dentro da ZPI. Tais fenômenos podem apresentar origem em processos com características distintas, a depender do tipo de comportamento estrutural do material. Em materiais quase-frágeis a maior parte dos processos inelásticos na ZPI é associada ao dano ocorrido devido aos altos níveis de tensão e de deformação. Esse dano provoca o fenômeno de amolecimento, o qual decorre da degradação da microestrutura do material. As novas superfícies de fissura não são completamente definidas dentro da ZPI e ainda é possível ocorrer a transferência de esforços entre faces recém-formadas. A resistência residual do material nessa região é inversamente proporcional à abertura das faces, o que caracteriza o amolecimento. Os mecanismos de transferência de esforços dependem do tipo do material, dentre os quais pode-se citar: formação de superfícies de fissura a partir da conexão de microfissuras e vazios (Figura 1a); degradação incompleta de matriz fibrosa (Figura 1b); superfícies irregulares de fraturamento associadas à composição do material e susceptíveis ao desenvolvimento de forças de contato (Figura 1c). Exemplos de materiais quase-frágeis que apresentam esse comportamento na fratura são: os materiais cimentícios, como concreto e argamassa; as rochas; as madeiras; além de materiais compósitos, todos com grande apelo prático em diversas aplicações de engenharia.

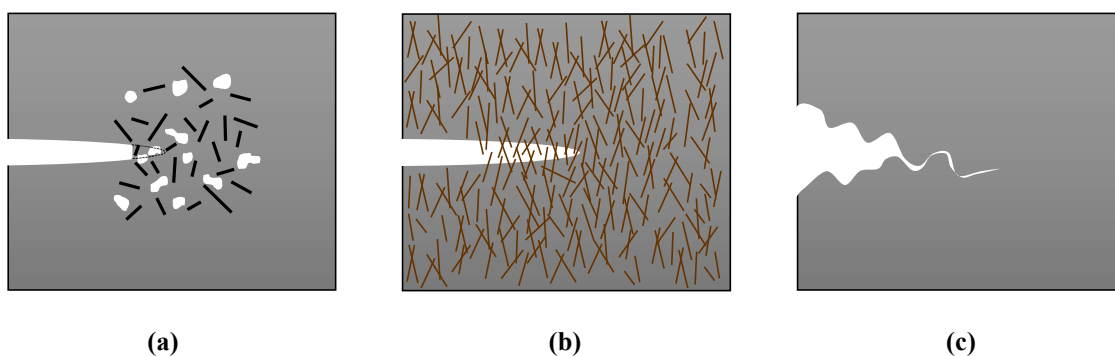


Figura 1. Exemplos de mecanismos de transferência de esforços entre faces: (a) superfície formada a partir da microfissuração e de vazios; (b) transpasse de fibras; (c) superfície irregular de fraturamento

Os modelos coesivos são comumente aplicados para a análise de fratura em materiais quase-frágeis (Borst, 2002; Planas et al., 2003). Nesses modelos, os fenômenos inelásticos da ZPI são considerados como a principal fonte de dissipação de energia para o fraturamento do material. Os processos não-lineares são considerados na análise a partir da definição de uma lei coesiva, que expressa as tensões residuais, ou tensões coesivas, na zona parcialmente degradada. Dentre os modelos coesivos para análises de fissura discreta, destaca-se o de fissura fictícia proposto por Hillerborg et al. (1976) para a análise de fratura em concreto, que posteriormente também foi aplicado com sucesso a outros tipos de materiais quase-frágeis. O modelo recebe esse nome pois admite que a zona de



degradação à frente da ponta possa ser aproximada por um comprimento de fissura fictícia. Ao longo desse comprimento atuam as tensões coesivas, cuja magnitude é inversamente proporcional à abertura das faces. A relação entre as tensões coesivas e a abertura das faces da fissura fictícia é dada por uma lei de amolecimento, ou lei coesiva, que depende do material analisado.

Os modelos coesivos buscam incorporar às análises de fratura os efeitos dos processos inelásticos que ocorrem na ZPI, que são tipicamente não-lineares. Desse modo, uma técnica de solução iterativa de previsão e correção é necessária, o que só é viável a partir da aplicação de métodos numéricos. O método dos elementos finitos, devido a sua maior disseminação do meio acadêmico, é talvez o método mais empregado na solução desse tipo de problema. Aplicações do MEF em conjunto com o modelo de fissura fictícia podem ser vistas nos trabalhos de Bittencourt et al. (1992) e Bocca et al. (1991). Variações do MEF, como o MEF estendidos, também têm grande apelo na simulação de fratura em materiais quase-frágeis (Moës e Belytschko, 2002; Wells e Sluys, 2001).

O método dos elementos de contorno (MEC) apresenta vantagens em relação aos métodos de domínio no que diz respeito a análises de fissuras discretas devido às suas características de redução da dimensionalidade da malha e de precisão da resposta para grandezas internas ao domínio. As aplicações iniciais do MEC na análise de fratura em materiais quase-frágeis se deu no início da década de 1990, dentre as quais destacam-se os trabalhos de Cen e Maier (1992) e Liang e Li (1991). Nesses trabalhos, a propagação das fissuras foi realizada ao longo de caminhos pré-definidos com a consideração do modelo de fissura fictícia. Um grande avanço foi obtido a partir do trabalho de Saleh e Aliabadi (1995). Os autores utilizaram a formulação dual do MEC (MECD) para a análise de fratura em concreto com a consideração do modelo de fissura fictícia. Com essa metodologia, o caminho de propagação pode ser determinado ao longo da análise. Ademais, o esquema de remalhamento durante a propagação é simples, uma vez que é necessária apenas a adição de novos elementos para representar as novas faces criadas. Esse esquema também foi utilizado nos trabalhos de Leonel e Venturini (2010) e Oliveira e Leonel (2014).

Neste trabalho é apresentado um modelo numérico baseado no MECD para a análise de propagação de fissuras em materiais quase-frágeis. Para tratar a fratura não-linear, o modelo de fissura fictícia proposto por Hillerborg et al. (1976) é utilizado. A solução do problema não-linear via MECD é feita por meio do operador constante. Dois exemplos numéricos são mostrados para ilustrar a precisão do modelo numérico desenvolvido.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

Na formulação dual do MEC, duas equações integrais de contorno são utilizadas para a obtenção de um sistema de equações não-singular. A primeira, conhecida como equação integral em deslocamentos, permite a determinação dos deslocamentos em um ponto particular do contorno s (ponto fonte) a partir dos deslocamentos e forças de superfície nos pontos f (ponto campo) ao longo do contorno Γ pela seguinte relação (Aliabadi, 2002):



XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



$$C_{ij}(s)u_j(s) + C_{ij}(\bar{s})u_j(\bar{s}) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, f)u_j(f)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(s, f)p_j(f)d\Gamma \quad (1)$$

onde u_j e p_j representam, respectivamente, as componentes de deslocamento e de força de superfície. C_{ij} é o termo lembro que é igual a $\delta_{ij}/2$ se s está sobre um contorno suave, sendo δ_{ij} o delta de Kronecker. \bar{s} representa um potencial ponto na mesma posição de s porém pertencente a uma superfície distinta. Essa situação ocorre, por exemplo, para pontos correspondentes em faces opostas de uma fissura. Quando s não possui um ponto correspondente, o segundo termo na Eq. (1) é nulo. Por fim, U_{ij}^* e P_{ij}^* são, respectivamente, as soluções fundamentais em deslocamento e em força de superfície que dependem da distância entre os pontos s e f .

Se apenas a equação integral em deslocamentos for utilizada na formulação dos elementos de contorno para resolver problemas de fissura, um sistema de equações degenerado é obtido. Isso ocorre uma vez que a mesma equação é gerada para os pontos correspondentes s e \bar{s} posicionados nas faces da fissura. Para contornar esse problema, uma segunda equação integral de contorno, denominada equação integral em forças de superfície, pode ser usada. Admitindo que s esteja em um contorno suave, as forças de superfície podem ser calculadas pela seguinte equação integral:

$$\frac{1}{2}[p_j(s) - p_j(\bar{s})] + n_k(s) \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(s, f)u_i(f)d\Gamma = n_k(s) \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(s, f)p_i(f)d\Gamma \quad (2)$$

onde n_k são as componentes do versor normal ao contorno. Já D_{ijk}^* e S_{ijk}^* são soluções fundamentais obtidas a partir das derivadas de U_{ij}^* e P_{ij}^* , respectivamente.

As Eqs. (1) e (2) contêm integrais impróprias visto que as soluções fundamentais são singulares quando a distância entre os pontos s e f se aproxima de zero. Portanto, os núcleos integrais devem ser avaliados no sentido de valor principal de Cauchy (núcleos contendo P_{ij}^* e D_{ij}^*) ou parte finita de Hadamard (núcleo contendo S_{ijk}^*).

O sistema algébrico de equações fornecido pelo MECD pode ser construído com as Eqs. (1) e (2) pela aplicação do método da colocação. Nesse processo, o contorno Γ é subdividido em elementos isoparamétricos, ao longo dos quais polinômios de Lagrange são usados para aproximar tanto a geometria quanto os campos mecânicos. A equação integral em deslocamentos é então utilizada para colocação nos nós posicionados no contorno externo e na face superior da fissura, enquanto a equação integral em forças de superfície é usada para colocação nos nós presentes na face inferior da fissura. Assim, tais nós se tornam os pontos campos s das suas respectivas equações integrais.

A existência da parte finita de Hadamard na equação integral em forças de superfície requer a continuidade da derivada dos deslocamentos nos pontos de colocação, o que é garantido com elementos descontínuos. Em tais elementos, os pontos de colocação não coincidem com os nós de extremidade, mas são posicionados no interior do elemento. Portanto, esse tipo de elemento é empregado na discretização das faces da fissura. Além disso, tais elementos são aplicados para garantir a suavidade do contorno nos pontos de colocação e para forçar descontinuidade das condições de contorno entre elementos adjacentes.

Uma equação linear é obtida para cada ponto de colocação após as integrais envolvidas serem calculadas numericamente. O sistema resultante de equações é expresso em notação matricial por:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (3)$$

onde \mathbf{H} e \mathbf{G} são matrizes $2n \times 2n$ contendo os coeficientes de influência, \mathbf{u} e \mathbf{p} são vetores $2n$ com as componentes de deslocamento e força de superfície ao longo do contorno, respectivamente, e n é o número de pontos de colocação na malha.

A solução para o problema mecânico é obtida a partir da Eq. (3) após impostas as condições de contorno conhecidas para o problema. Após determinada a resposta para o contorno, os deslocamentos e as tensões em um ponto interno pode ser determinado em uma etapa de pós-processamento a partir das seguintes identidades de Somigliana:

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(s, f) p_j(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, f) u_j(f) d\Gamma \quad (4)$$

$$\sigma_{jk}(s) = \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(s, f) p_i(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(s, f) u_i(f) d\Gamma \quad (5)$$

3 MODELO DE FRATURA EM MATERIAIS QUASI-FRÁGEIS

No modelo de fissura fictícia proposto por Hillerborg et al. (1976), a zona degradada à frente da ponta é substituída por um comprimento l_f de fissura fictícia ao longo do qual atuam as tensões coesivas. Essas tensões tendem a se contrapor à separação das superfícies da descontinuidade e buscam representar os mecanismos ainda existentes de transferência de esforços entre as faces devido à degradação incompleta do material. A magnitude das tensões coesivas (σ) é considerada inversamente proporcional à abertura (w) das faces da fissura fictícia e essas duas grandezas são relacionadas a partir de um lei constitutiva coesiva. O valor de l_f é definido de tal forma que na ponta fictícia, considerada com abertura nula, a tensão coesiva seja igual à tensão resistente à tração f_t do material. Já no início do comprimento fictício, correspondente à ponta da fissura real e com abertura crítica w_c , a tensão coesiva é nula (Figura 2).

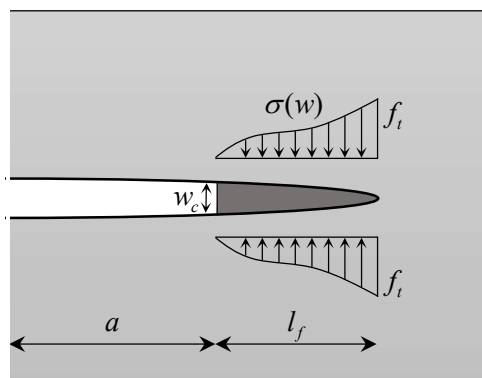


Figura 2. Modelo de fissura fictícia de Hillerborg et al. (1976).

Quando novas faces de fissura fictícia são criadas, a tensão não se reduz a zero subitamente, mas decresce com a abertura em função da lei coesiva. Já para a formação de novas faces de fissura real, é necessária uma taxa de energia G_c capaz de contrapor o trabalho realizado pelas tensões coesivas. Neste trabalho são utilizadas três leis constitutivas coesivas para representar o amolecimento de materiais quase-frágeis no modelo de fissura fictícia: linear, bilinear e exponencial (Figura 3). As leis coesivas são dadas em função da resistência à tração f_t e da energia ao fraturamento G_c do material. Na Tabela 1 são apresentados os parâmetros para as três leis coesivas adotadas.

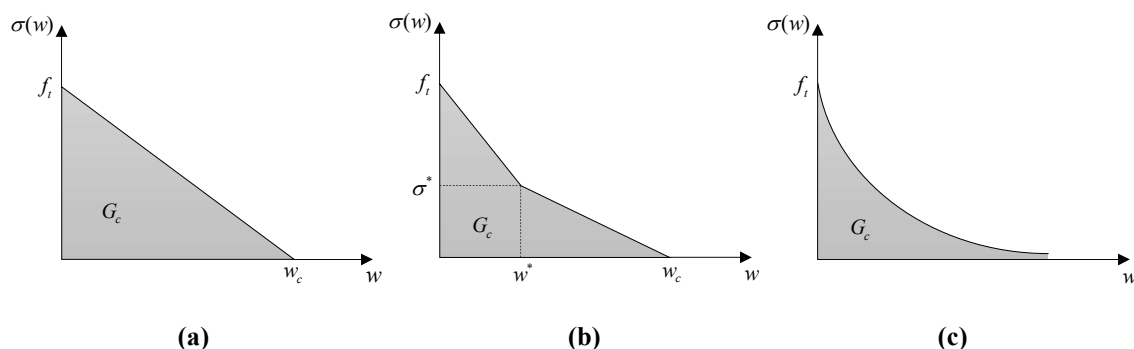


Figura 3. Representação da lei coesiva (a) linear, (b) bilinear e (c) exponencial

Tabela 1. Parâmetros das leis coesivas

Lei coesiva	Tensão coesiva (σ)	Abertura crítica (w_c)
Linear	$f_t \left(1 - \frac{w}{w_c}\right), \quad 0 \leq w \leq w_c$	$2 \frac{G_c}{f_t}$
Bilinear*	$\begin{cases} f_t - \left(\frac{f_t - \sigma^*}{w^*}\right) w, & 0 \leq w \leq w^* \\ \frac{\sigma^* w}{w^* - w_c} + \sigma^* \left(1 - \frac{w^*}{w^* - w_c}\right), & w^* < w \leq w_c \end{cases}$	$3,6 \frac{G_c}{f_t}$
Exponencial	$f_t e^{-\frac{f_t}{G_c} w}, \quad \forall w \geq 0$	∞

Parâmetros da lei bilinear segundo Petersson (1981): $\sigma^ = f_t/3$, $w^* = 0,8G_c/f_t$

No modelo de fissura coesiva, a não-linearidade física existente na ZPI é restrita ao contorno fictício adicionado e os processos inelásticos são representados pela distribuição das tensões coesivas. Como a não-linearidade é restrita ao contorno, a aplicação do MEC é facilitada, sendo necessária apenas a introdução de uma etapa iterativa de solução com passos de previsão e correção das tensões coesivas. Para a solução dessa etapa iterativa é utilizada uma estratégia baseada em um operador constante. Nessa estratégia, as principais matrizes do sistema algébrico são mantidas constantes, enquanto os valores não-balanceados de forças de superfície são atualizados a cada iteração. Apesar de

simples e de necessitar de um número significativo de iterações até a convergência, essa estratégia conduz a bons resultados.

Após a aplicação das condições de contorno conhecidas do problema mecânico, a Eq. (3) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{By} \quad (6)$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes obtidas a partir das colunas \mathbf{H} e \mathbf{G} relacionadas aos graus de liberdade desconhecidos (armazenados em \mathbf{x}) e conhecidos (armazenados em \mathbf{y}), respectivamente. A matriz \mathbf{A} pode ser invertida, resultando em:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{By} = \mathbf{Cy} \quad (7)$$

sendo a matriz \mathbf{C} obtida pelo produto da inversa de \mathbf{A} com \mathbf{B} .

Os valores das tensões coesivas atuantes nos pontos de colocação localizados ao longo das faces abertas da fissura fictícia são conhecidos e, portanto, compõem uma parcela do vetor \mathbf{y} . Dessa forma, uma correção $\Delta\sigma_i$ sobre as tensões coesivas em determinada iteração i para a busca de uma nova configuração em equilíbrio corresponde a um incremento $\Delta\mathbf{y}_i$. Assim, a Eq. (7) pode ser utilizada para a determinação da variação $\Delta\mathbf{x}_i$ sobre as condições de contorno desconhecidas, resultando em:

$$\Delta\mathbf{x}_i = \mathbf{C}\Delta\mathbf{y}_i \quad (8)$$

Com o valor de $\Delta\mathbf{x}_i$, os graus de liberdade desconhecidos no contorno são atualizados da iteração anterior $i - 1$ para a iteração atual i a partir de:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \Delta\mathbf{x}_i \quad (9)$$

Como pode ser observado pela Eq. (8), durante a etapa iterativa de correção das tensões coesivas, a matriz \mathbf{C} , obtida a partir das matrizes de coeficientes de influência do MEC, permanece constante. É por essa razão que esse esquema de solução recebe o nome de operador constante.

Após a convergência para uma nova configuração em equilíbrio, é realizada a verificação da estabilidade à propagação das pontas. O critério de propagação adotado neste trabalho é baseado no estado de tensão na ponta das fissuras. Para a determinação desse estado, um esquema de extrapolação semelhante ao utilizado por Leonel e Venturini (2010) é empregado. Nesse esquema, pontos internos são definidos ao longo de raios de semicircunferências concêntricas no entorno da ponta, conforme representado pela Figura 4. O ângulo entre os raios é igual a γ . Os raios são distribuídos ao longo de uma abertura total de no máximo 180 graus. As semicircunferências utilizadas como base para a distribuição dos pontos internos estão afastadas entre si por uma distância d igual a distância entre os nós dos elementos de fissura. Já a semicircunferência mais interna está a uma distância d_0 da ponta. O valor de d_0 é tomado igual a um quarto da distância entre nós dos elementos de fissura.

As componentes de tensão para os pontos internos são determinadas em uma etapa de pós-processamento. Em seguida, para cada um dos raios é realizada a extrapolação das tensões para a ponta por meio de um polinômio de grau $m - 1$, sendo m o número de

pontos internos ao longo dos raios. O estado de tensão final para a ponta resulta da média dos valores encontrados.

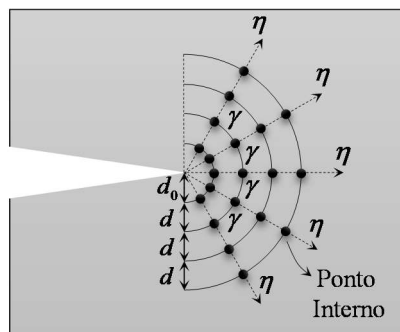


Figura 4. Distribuição de pontos internos para a determinação do estado de tensão na ponta.

Com o estado de tensão para as pontas, a estabilidade à propagação é verificada a partir do critério de Rankine. Para tanto, a máxima componente de tensão principal no plano σ_1 é determinada por meio de:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (10)$$

O valor de σ_1 é então comparado à resistência à tração f_t do material para verificar a estabilidade da ponta quanto à propagação.

Para as pontas que propagam, a direção de crescimento é admitida como aquela correspondente a um problema equivalente da mecânica da fratura elástico-linear, no qual não atuam as tensões coesivas. Para tanto, toma-se o estado em equilíbrio e reaplicam-se as tensões coesivas, de modo que ao final se obtenha faces livres de esforços. Nessa nova situação, a ponta volta a apresentar campos singulares de tensão que podem ser representados pelos fatores de intensidade de tensão (FITs). Neste trabalho, tais fatores são obtidos a partir da técnica da integral J. Com os valores dos FITs, o ângulo de propagação é obtido por meio do critério da máxima tensão circunferencial (Erdogan e Sih, 1963).

Com a definição do ângulo de propagação, a determinação da nova ponta é realizada ao longo de uma direção de busca, conforme apresentado pela Figura 5. Para tanto, são definidos pontos internos espaçados a uma distância l_{elem} , que corresponde ao comprimento dos elementos de discretização das faces da fissura. Os estados de tensão nesses pontos são determinados e a tensão normal σ_n relativa à direção de busca é calculada. Se para o ponto interno mais próximo da ponta se verificar $\sigma_n > f_t$ e para o segundo ponto interno se verificar $\sigma_n < f_t$, então, pela continuidade do campo de tensões, existe um ponto ao longo do comprimento l_{elem} tal que $\sigma_n = f_t$, que corresponde à nova ponta da fissura fictícia. Quando isso ocorre, novos pontos internos são definidos ao longo de l_{elem} de modo a definir um polinômio com o mesmo grau de aproximação utilizado para os elementos nas faces da fissura. Em seguida, o ponto no qual se verifica $\sigma_n = f_t$ é determinado pelo método de Newton-Raphson.

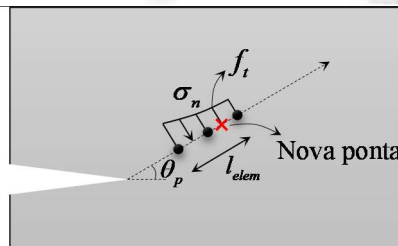


Figura 5. Definição de pontos internos ao longo da direção de busca até a determinação da nova ponta onde a tensão normal ao caminho é igual à resistência à tração do material.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 Propagação em modo I

Neste exemplo é analisada uma viga submetida a um ensaio de flexão em três pontos, conforme mostrado pela Figura 6. Esse problema também foi simulado por Saleh (1997), cujo resultado é utilizado como referência. A estrutura apresenta vão $L = 0,8$ m, altura $h = 0,2$ m e espessura unitária. O entalhe inicial apresenta comprimento $a = 0,05$ m. Sobre o ponto central da face superior é aplicado um deslocamento vertical no sentido indicado com magnitude $\bar{u} = 0,21$ mm, dividido em 25 incrementos. As condições de contorno são aplicadas ao longo de comprimentos $l = 0,008$ m. As propriedades do material são: $E = 30000$ MPa, $\nu = 0,15$, $f_t = 3,0$ MPa e $G_c = 75$ N/m. É admitido um estado plano de tensão. Para a simulação numérica, o contorno é discretizado em 50 elementos quadráticos e 3 elementos lineares, sendo esses últimos empregados nos locais de aplicação das condições de contorno. Para cada uma das faces da fissura inicial são utilizados 4 elementos com aproximação cúbica.

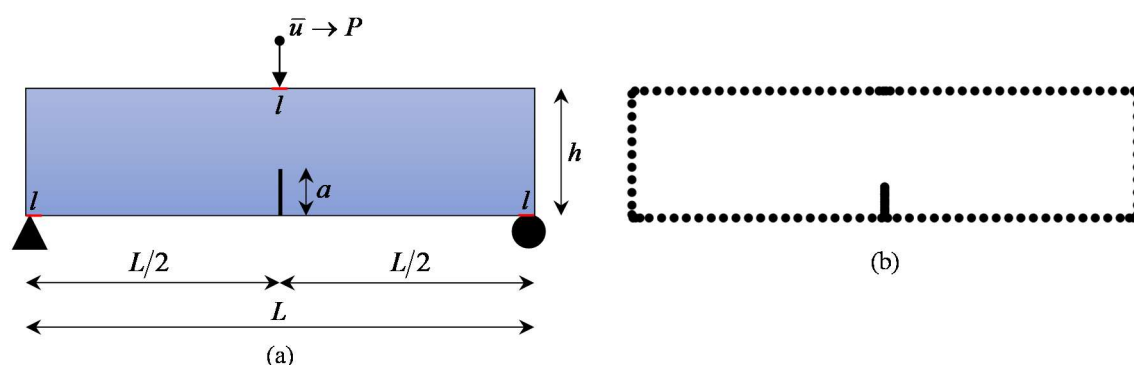


Figura 6. (a) Geometria e (b) discretização do ensaio de flexão em três pontos analisado.

Para a determinação da tensão na ponta são utilizados três raios, separados por um ângulo $\gamma = 30^\circ$ e compostos por 4 pontos internos. Durante a fase de propagação, o comprimento mínimo adicionado é equivalente a um elemento de discretização da fissura. A tolerância adotada para a convergência da fase iterativa de correção é igual a 10^{-10} MPa.

As três leis coesivas adotadas neste trabalho são utilizadas na análise da estrutura. As curvas carga-deslocamento obtidas são apresentadas pela Figura 7. Na Figura 7 também é apresentada a resposta de referência obtida por Saleh (1997), que foi determinada via MECAD juntamente com a lei coesiva linear. Como pode ser observado, para essa lei existe a melhor correspondência entre a curva determinada neste trabalho e a resposta de referência. Nos casos dos modelos bilinear e exponencial, a carga crítica é obtida para um menor deslocamento vertical correspondente e apresenta magnitude inferior à do caso linear. Porém, a partir de um deslocamento de aproximadamente 0,14 mm, as resistências residuais para todas as leis apresentam comportamento semelhante.

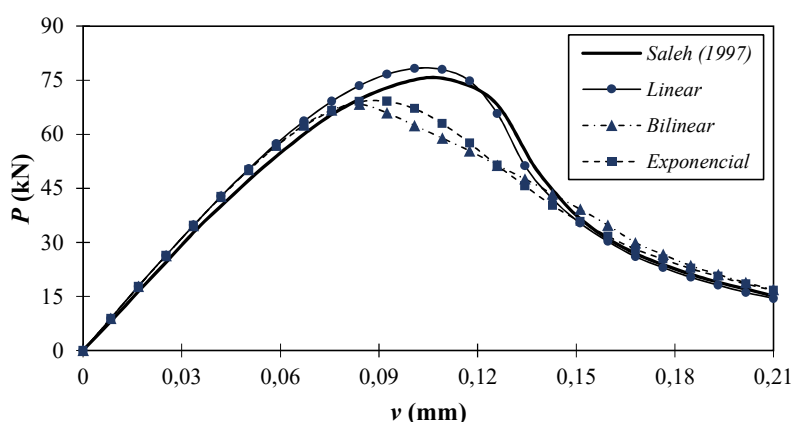


Figura 7. Comparação entre as curvas carga-deslocamento obtidas a partir das diferentes leis coesivas.

A Figura 8 mostra o crescimento das faces de fissura real e fictícia para o caso no qual é utilizada a lei coesiva linear. Inicialmente só há crescimento da fissura fictícia, que representa a degradação do material à frente da ponta do entalhe. Como pode ser observado, há uma evolução considerável do comprimento fictício sem propagação da fissura real. A formação de faces livres de tensões coesivas só começa a partir do incremento 16. Em seguida, ainda ocorre a propagação de fissuras fictícias, porém a formação de faces reais é mais acentuada. A última figura da sequência mostra a configuração equilibrada final obtida.

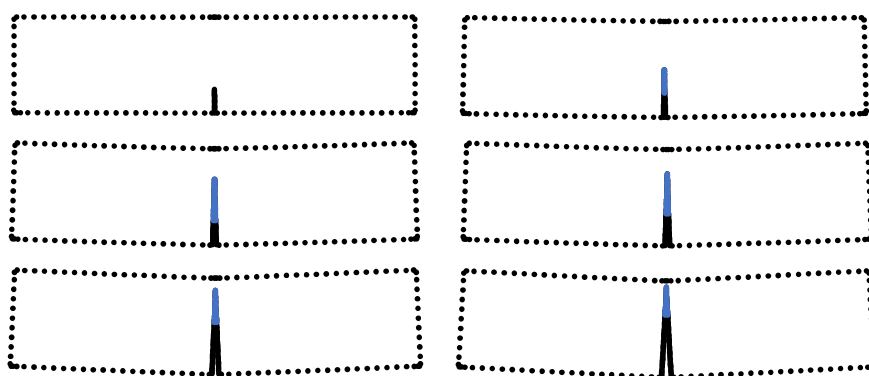


Figura 8. Evolução da fissura fictícia (em destaque) e da fissura real para a lei coesiva linear. Deslocamentos ampliados em 100 vezes.

Já a Figura 9a e a Figura 9b apresentam, respectivamente, as configurações finais para os casos de lei coesiva bilinear e exponencial. Para essas situações, o comprimento fictício final é superior ao obtido via modelo linear. No caso da lei coesiva exponencial, por não existir um valor de abertura crítica, não há a formação de faces de fissura real, apenas fictícia.

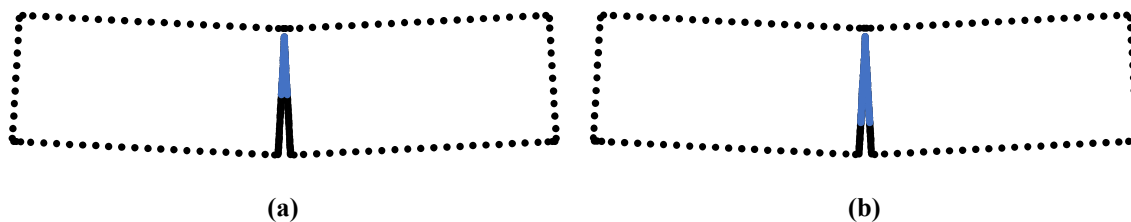


Figura 9. Configuração final para a lei coesiva (a) bilinear e (b) exponencial. Os pontos de colocação das faces de fissura fictícia estão em destaque. Deslocamentos ampliados em 100 vezes.

4.2 Propagação em modo misto

Neste exemplo, o código computacional desenvolvido é utilizado para a simulação dos experimentos com vigas de concreto conduzidos por Gálvez et al. (1998). A Figura 10a apresenta a geometria da estrutura analisada. A dimensão D é igual a 150 mm, enquanto o comprimento a do entalhe inicial é 75 mm. A viga possui largura igual a 50 mm. As propriedades do material fornecidas por Gálvez et al. (1998) são: $E = 38000$ MPa, $\nu = 0,20$, $f_t = 3,0$ MPa e $G_c = 69$ N/m. Sobre o local indicado pela Figura 10a é aplicado um deslocamento vertical com magnitude $\bar{u} = 0,1$ mm, dividido em 25 incrementos. A força equivalente aplicada sobre essa região é determinada para a representação da curva carga-deslocamento. As três leis coesivas implementadas neste trabalho são utilizadas. Quanto ao deslocamento tangencial entre as faces fictícias é admitido que o esforço tangencial acumulado até o momento da abertura se mantém até a face fictícia se tornar real, o que é equivalente a uma lei coesiva retangular. As simulações são realizadas adotando um estado plano de tensão.

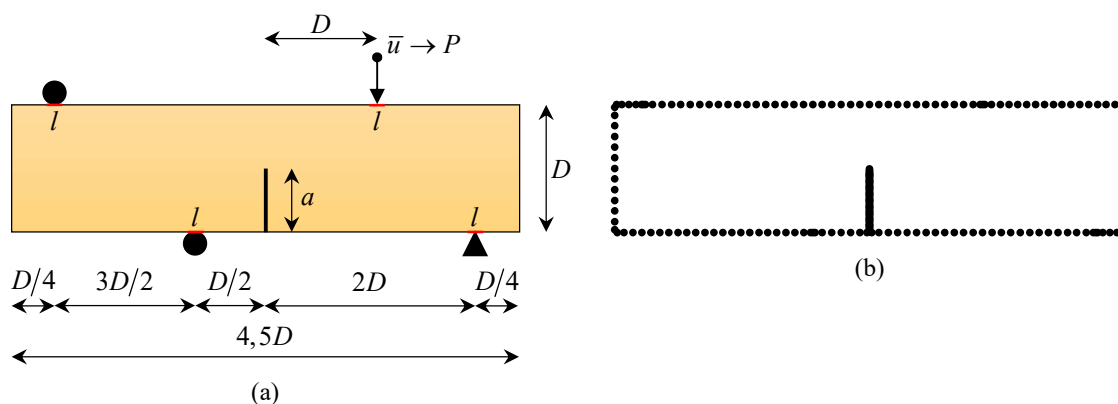


Figura 10. (a) Geometria e (b) discretização do ensaio de propagação de fissura em modo misto.

A Figura 10b apresenta a discretização adotada para a solução do problema via MECD. Para o contorno externo são utilizados 68 elementos quadráticos e 4 elementos lineares, sendo esses últimos correspondentes aos locais de aplicação das condições de contorno. Já cada uma das faces da fissura é discretizada com 10 elementos cúbicos. Para a determinação do estado de tensão na ponta são utilizados 5 raios, com ângulo de separação igual a 30 graus e com 4 pontos internos cada. A tolerância para a convergência da fase iterativa é tomada igual a 10^{-8} MPa.

Na Figura 11 são apresentadas as curvas carga-deslocamento para as três leis coesivas adotadas neste trabalho e também a envoltória experimental obtida por Gálvez et al. (1998). Como pode ser observado, há uma boa correspondência entre as curvas numéricas com os resultados experimentais, especialmente para o trecho ascendente, até o máximo valor da força aplicada. Entretanto, os modelos numéricos tendem a subestimar as resistências residuais na fase de amolecimento da resposta estrutural. Tal fato indica que o modelo no qual as faces fictícias são livres ao deslocamento relativo tangencial não contempla mecanismos que possam conferir resistência residual à estrutura após o máximo carregamento admissível ser atingido.

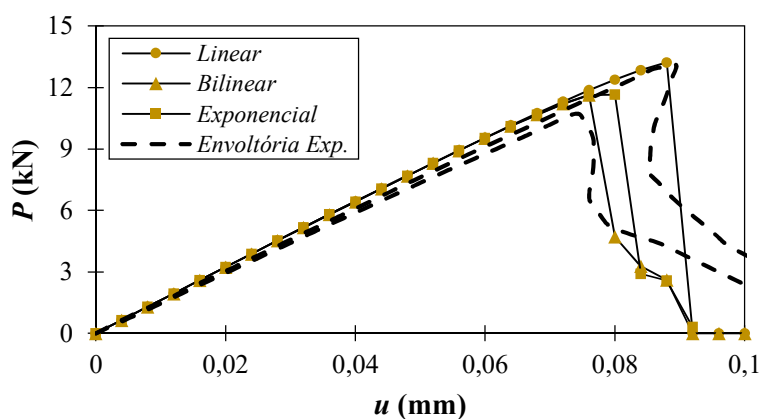


Figura 11. Curvas carga-deslocamento para as diferentes leis coesivas adotadas.

Apesar das divergências obtidas para o trecho de amolecimento, o código desenvolvido é considerado satisfatório para a representação da fratura em materiais quase-frágeis devido, principalmente, à boa reprodução do comportamento da estrutura até a carga crítica. Para melhorar a resposta pós-pico, modelos com outras hipóteses em relação ao deslocamento tangencial entre as faces podem ser implementados para tratar propagação em modo misto. Outro ponto que pode ser melhorado é com relação à metodologia de solução do problema de fratura não-linear. Observa-se que os resultados experimentais tendem a apresentar o fenômeno de *snap-back*, cuja representação não é possível apenas com o controle de deslocamentos utilizado na solução numérica deste problema. Outras técnicas, como comprimento de arco ou o controle do comprimento da fissura, podem ser utilizadas para fornecer uma melhor representação da resposta estrutural após a carga máxima.

Por fim, a boa correspondência entre os resultados numéricos determinados neste trabalho com os resultados experimentais também pode ser verificada pela Figura 12, que

apresenta os caminhos de propagação obtidos para cada uma das leis coesivas consideradas. Como pode ser observado, os caminhos obtidos se encontram no interior da envoltória experimental. Esse resultado mostra a eficácia na definição do caminho de propagação a partir do modelo numérico desenvolvido. Além disso, pela Figura 12, observa-se que a fissura fictícia cruza com o topo da estrutura. Nesses casos, a estrutura fica dividida em duas partes. A parte à esquerda apresenta hipoestaticidade ao longo da direção horizontal quando a fissura fictícia se encontra aberta. Nessa mesma situação, a parte à direita apresenta deslocamentos de corpo rígido quando aplicados novos incrementos da ação externa. Conseqüentemente, a estrutura não possui resistência residual, conforme é confirmado pelas curvas apresentadas na Figura 11.

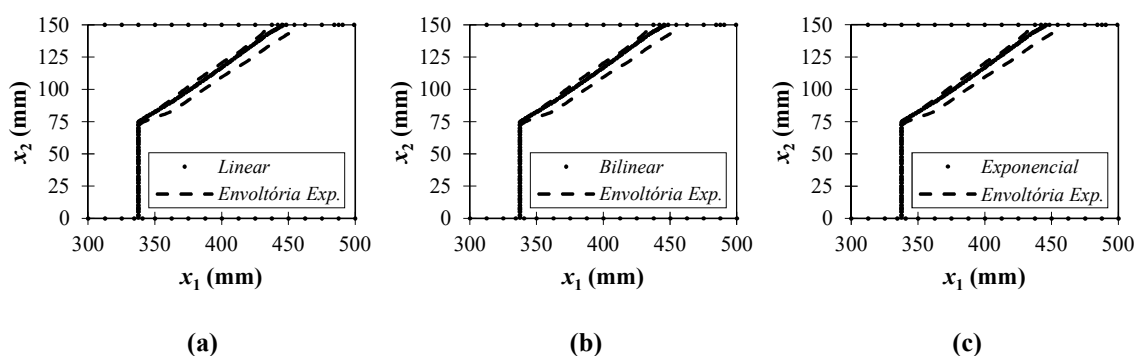


Figura 12. Caminhos de propagação para as leis coesivas (a) linear, (b) bilinear e (c) exponencial.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um modelo numérico baseado no MECD para a análise de propagação de fissuras em materiais quase-frágeis. Para tanto, o modelo de fissura fictícia foi utilizado. Esse modelo se adequa bem à aplicação em conjunto do MEC, pois restringe a não-linearidade física na ZPI às faces virtuais de fissura adicionadas. Três tipos de leis coesivas foram implementados para simular o comportamento da zona de degradação: linear, bilinear e exponencial. A solução do problema não-linear foi realizada via operador constante, um procedimento simples e que conduz a um grande número de iterações até a convergência. Todavia, conforme mostrado pelos exemplos, esse esquema fornece boas respostas.

A propagação foi verificada a partir do estado de tensão nas pontas, obtido a partir da extrapolação das componentes de tensão de pontos internos definidos nas proximidades. Já a direção de crescimento foi determinada com base nos fundamentos da mecânica da fratura elástico-linear. Resultados satisfatórios de problemas envolvendo o crescimento de fissuras em materiais quase-frágeis foram obtidos, incluindo a boa representação de problemas com propagação em modo misto.

Como parte de trabalhos futuros, novas considerações podem ser feitas acerca do deslocamento relativo tangencial entre as faces de fissura fictícia em problemas de sollicitação em modo misto para conferir resistência residual à estrutura. Ademais, o



operador tangente pode ser empregado para a solução do problema não-linear, de forma a reduzir o número de iterações e tornar o processo mais eficiente.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro fornecido pela FAPESP, projeto de pesquisa nº 2016/23649-0, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

REFERÊNCIAS

- Aliabadi, M.H., 2002. *The Boundary Element Method: Application in solids and structures*. v.2. New York: Wiley.
- Bittencourt, T.N.; Ingraffea, A.R.; Llorca, J., 1992. Simulation of Arbitrary, Cohesive Crack Propagation. In: Bazant, Z.P. (ed.). *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. London: Elsevier Applied Science.
- Bocca, P.; Carpinteri, A.; Valente, S., 1991. Mixed mode fracture of concrete. *International Journal of Solids and Structures*, v.27, n.9, p.1139-1153.
- Borst, R.de., 2002. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. *Engineering Fracture Mechanics*, v.69, n.2, p.95-112.
- Cen, Z.; Maier, G., 1992. Bifurcations and Instabilities in Fracture of Cohesive-Softening Structures: A Boundary Element Analysis. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures*, v.15, n.9, p.911-928.
- Erdogan, F.; Sih, G.C., 1963. On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*, v.85, n.4, p.519-527.
- Gálvez, J.C.; Elices, M. Guinea, G.V.; Planas, J., 1998. Mixed Mode Fracture of Concrete under Proportional and Nonproportional Loading. *International Journal of Fracture*, v.94, n.3, p.267-284.
- Hillerborg, A.; Modéer, M.; Petersson, P.-E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, v.6, n.6, p.773-781.
- Leonel, E.D.; Venturini, W.S., 2010. Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyze crack propagation in quasi-brittle materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.34, n.2, p.122-129.
- Liang, R.Y.K.; Li, Y.-N., 1991. Simulations of nonlinear fracture process zone in cementitious material - a boundary element approach. *Computational Mechanics*, v.7, n.5-6, p.413-427.
- Moës, N.; Belytschko, T., 2002. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, v.69, n.7, p.813-833.
- Oliveira, H.L.; Leonel, E.D., 2013. Dual BEM Formulation Applied to Analysis of Multiple Crack Propagation. *Key Engineering Materials*, v.560, p.99-106.



Petersson, P.-E., 1981. *Crack Growth and Development of Fracture Zone in Plain Concrete and Similar Materials*. Report No. TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology.

Planas, J.; Elices, M.; Guinea, G.V.; Gómez, F.J.; Cendón, D.A.; Arbilla, I., 2003. Generalizations and specializations of cohesive crack models. *Engineering Fracture Mechanics*, v.70, n.14, p.1759-1776.

Saleh, A.L., 1997. *Crack growth in Concrete using Boundary Elements*. Southampton: Computational Mechanics Publications.

Saleh, A.L.; Aliabadi, M.H., 1995. Crack growth analysis in concrete using boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*, v.51, n.4, p.533-545.

Wells, G.N.; Sluys, L.J., 2001. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.50, n.12, p.2667-2682.