

## ESTRATÉGIA PARA O DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES EM CONCRETO ARMADO (CA) DE FORMA GEOMÉTRICA QUALQUER SOB FLEXÃO COMPOSTA NORMAL

*Strategy for sizing reinforced concrete (RC) sections of any geometric shape under combined axial force and bending*

Álefe F. Figueiredo(1P); Tatiane Maga P. Mendes(2); Iara S. Ribeiro(2); Francisco C. de Araújo(3)

(1) Engenheiro Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.

(2) Msc., Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.

(3) Dr.-Ing. Prof., Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil

Email para Correspondência: alefrefreitas11@gmail.com; (P) Apresentador

**Resumo:** Neste artigo, propõe-se uma estratégia computacional para o dimensionamento de elementos lineares em concreto armado (CA) submetidos à flexão simples ou flexão composta normal (flexo-compressão e flexo-tração). Para fins de análise, foi utilizada uma formulação capaz de modelar elementos com seções transversais de formas geométricas arbitrárias e variando genericamente ao longo do elemento. A estratégia de dimensionamento é baseada no equilíbrio de forças na seção no Estado Limite Último (ELU). A posição da linha neutra é determinada, em um intervalo possível de busca previamente estabelecido, empregando-se um algoritmo iterativo baseado no processo da bissetante. Dada a geometria da seção, o tipo de aço e do concreto e a distribuição da armadura na seção, é possível dimensionar a seção em concreto armado para um par de esforços solicitantes de cálculo (momento fletor e força normal). Para modelar seções de forma geométrica qualquer, discretiza-se o contorno externo da seção com elementos lineares ("de contorno") e consideram-se faixas de integração, que possibilitam a determinação dos esforços resistentes associados, no ELU, via quadratura numérica de Gauss-Legendre. Na aplicação apresentada no presente artigo, procede-se à análise e ao dimensionamento de um pórtico plano de concreto armado com seção de forma trapezoidal. Para fins de validação das implementações, os resultados obtidos foram verificados via *softwares* comerciais e analiticamente.

**Palavra-Chave:** *pórticos em concreto armado; flexão composta; seções transversais de forma geométrica qualquer*

**Abstract:** In this paper, a computational strategy for the sizing of reinforced concrete (RC) linear elements under bending and bending combined with axial force is proposed. The sizing strategy is based on the equilibrium of actions at the section in the Ultimate Limit State (ULS). The position of the neutral axis is determined, at a possible search interval previously defined, by employing the bisection iterative algorithm. Given then the section geometry, the class of the concrete and of the reinforcement steel, and the rebar distribution at the section, it is possible to size the RC section for a pair of design required actions (bending moment and axial



force). To model sections of any geometric shape, their outer boundary is discretized with linear "boundary" elements, and integration strips are considered to evaluate the corresponding resisting (nominal) actions in the ULS applying the Gauss-Legendre quadrature. In the applications, a RC planar frame having members with trapezoidal cross-section is analyzed and sized. For validating the computer code, the results obtained with the presented strategy are compared the ones obtained analytically and employing commercial packages.

**Keywords:** *reinforced concrete frames; sections of any geometric shape; bending combined with axial force*

## 1. INTRODUÇÃO

Na engenharia, custo, qualidade e segurança são exigências conjuntas e necessárias para a viabilidade de qualquer projeto. Com o desenvolvimento tecnológico, em especial o da engenharia estrutural, para ser competitivo no mercado, é cada vez mais importante encontrar respostas e soluções mais fiéis à realidade. Por isso, é significativo considerar a economia que se obtém com a utilização da análise não linear física ou com a o uso de processos mais adequados e seguros para o dimensionamento de elementos de seções quaisquer, que possibilitam ao engenheiro uma escolha da melhor seção para uma determinada situação, além de permitir atender às exigências arquitetônicas atuais.

Neste trabalho, dimensionam-se elementos suscetíveis à flexão simples e à flexão composta normal, utilizando uma estratégia iterativa para a determinação da linha neutra da seção armada, baseada no processo da bissecante para equilíbrio de forças no Estado Limite Último (ELU). Para isso, considera-se um intervalo onde pretende-se encontrar a solução – posição da linha neutra que corresponde ao equilíbrio da seção. A seção encontra-se em seu Estado Limite Último e para o cálculo das forças resistentes emprega-se o diagrama parábola retângulo da NBR 6118:2014. Adicionalmente, para cálculo das forças resistentes, modela-se a seção transversal, que pode ter uma geometria qualquer, utilizando-se uma malha do contorno da seção que é dividida em faixas onde avalia-se as tensões no concreto via integração numérica de Gauss-Legendre.

Para a implementação computacional e obtenção dos esforços nas seções de dimensionamento, desenvolve-se uma formulação baseada no Método da Rigidez Direta (MRD), que possibilita a modelagem de elementos estruturais de pórtico plano com rigidezes variáveis segundo leis quaisquer, inclusão de efeitos de deformação por cisalhamento, e com seções de formas geométricas quaisquer.

Para validar as estratégias implementadas, no caso da análise estrutural, compara-se os resultados com o *software* SAP2000 (2013), e no caso do dimensionamento, por se tratar de seções quaisquer, verificam-se as respostas com base no equilíbrio da seção, de forma analítica.

## 2. MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA (MRD)

Com a utilização do Método da Rigidez Direta, objetiva-se, sobretudo, após o processo de deformação do sistema estrutural, escrever um conjunto de equações de equilíbrio entre as ações provenientes das solicitações externas e as que se surgem em consequência do processo de deformação – os esforços internos. Para isso, idealizam-se os sistemas estruturais em termos de um conjunto qualquer de nós estruturais, referenciados a um sistema global, em relação aos quais as forças são estabelecidas. Em notação matricial, compacta, representa-se, para um sistema estrutural reticulado qualquer, a relação de equações de equilíbrio na forma

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} \quad \text{(Equação 1)}$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos e  $\mathbf{f}$  o vetor de ações nodais equivalentes.

A seguir apresenta-se, de forma breve, a formulação que permite a obtenção da matriz de rigidez elástica de elemento de pórtico plano.

### 2.1. Matriz de Rigidez de Elemento de Pórtico Plano

Para calcular as expressões genéricas para os coeficientes das matrizes de rigidez elásticas, emprega-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Para isso, considera-se a Figura 1 (de Araújo e Pereira, 2017).

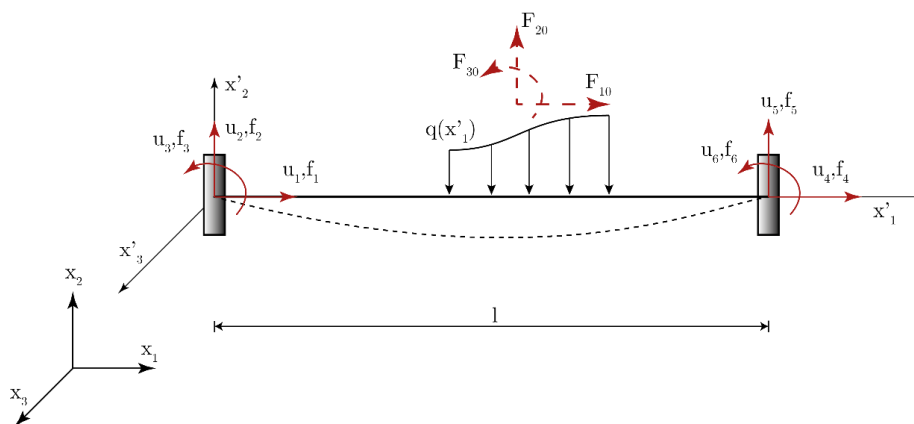


Figura 1 - Elemento de pórtico plano (de Araújo e Pereira, 2017)

Pode-se estabelecer a seguinte equação de compatibilidade aplicando-se o PTV,

$$\bar{\mathbf{f}}_i \mathbf{u}_i = \int_1 \bar{\mathbf{M}}_i d\theta + \int_1 \bar{\mathbf{N}}_i d\delta + \int_1 \bar{\mathbf{Q}}_i d\lambda \quad \text{(Equação 2)}$$

em que  $\mathbf{u}_i$  é o deslocamento nodal,  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{N}_i$  e  $\bar{Q}_i$  são, respectivamente, o momento fletor, força normal e força cortante devido ao carregamento virtual  $\bar{f}_i=1$ ,  $d\theta$  é a rotação flexional,  $d\delta$  corresponde ao deslocamento axial e  $d\lambda$  ao deslocamento transversal em uma determinada posição do elemento.

A partir da Equação 2, encontram-se as expressões para os coeficientes de rigidezes dispondo-se de dois casos:

Caso I - Nó inicial engastado:  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$

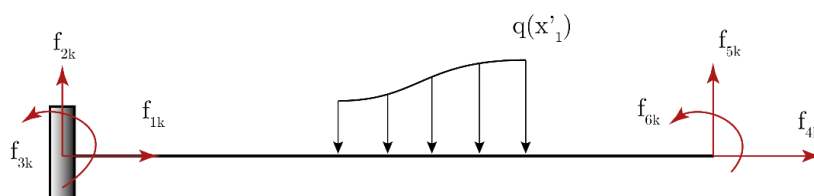


Figura 2 - Nó esquerdo restrigido (MAGA, 2017)

Os deslocamentos em função da carga de elemento  $q$ , são escritos como

$$\mathbf{u}_{F0} = \int_1 \frac{\bar{M}_i M_0''}{EI} ds + \int_1 \frac{\bar{N}_i N_0''}{ES} ds + \int_1 \frac{\chi \bar{Q}_i Q_0''}{GS} ds, \quad i = 4, 5, 6 \quad (\text{Equação 3})$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $G$  o módulo de elasticidade transversal,  $S$  a área da seção transversal,  $I$  o momento de inércia à flexão em relação ao eixo principal local,  $\chi$  é o fator de forma da seção para o cisalhamento e  $M_0''$ ,  $N_0''$  e  $Q_0''$  são os esforços decorrentes da carga  $q$ .

Denota-se as forças de engastamento incógnitas com dois índices subscritos. Logo, nas ações  $f_{ik}$  mostradas nas Figuras 2 e 3, o primeiro índice denota a sua direção e o segundo exprime a direção da ação que a gera. Sendo assim, a expressão integral na Equação 2, associada a um certo índice  $k$ , pode ser escrita na forma

$$\int_1 \frac{\bar{M}_i M_k}{EI} ds + \int_1 \frac{\bar{N}_i N_k}{ES} ds + \int_1 \frac{\chi \bar{Q}_i Q_k}{GS} ds = a_{ik} f_{ik}, \quad k = 4, 5, 6 \quad (\text{Equação 4})$$

em que  $a_{ik}$  é o coeficiente que é obtido evidenciando-se a ação  $f_{ik}$ .

Pode-se, portanto, expressar o conjunto de equações de compatibilidade na seguinte forma matricial

$$\mathbf{A}_{FF} \mathbf{f}_{Fk} = \mathbf{u}_{Fk} - \mathbf{u}_{F0}, \quad k = 4, 5, 6 \quad (\text{Equação 5})$$

onde  $\mathbf{u}_{Fk}$  são os deslocamentos prescritos e a matriz  $\mathbf{A}_{FF}$  é dada por

$$\mathbf{A}_{FF} = \begin{bmatrix} \int_1 \frac{1}{ES} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_1 \left( \frac{(1-x_1)^2}{EI} + \frac{\chi}{GS} \right) dx_1 & \int_1 \frac{(1-x_1)}{EI} dx_1 \\ 0 & \int_1 \frac{(1-x_1)}{EI} dx_1 & \int_1 \frac{1}{EI} dx_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{Equação 6})$$

Caso II - Nó final engastado:  $u_4 = u_5 = u_6 = 0$ :

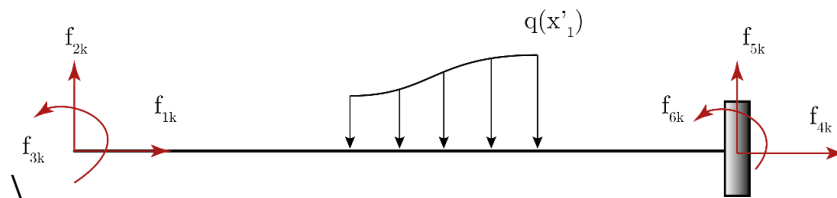


Figura 3 - Nó direito restringido (MAGA, 2017)

De forma similar ao caso I, escrevem-se os deslocamentos devido à carga  $q$ , na forma

$$\mathbf{u}_{F0} = \int_1 \frac{\bar{M}_i M_0''}{EI} ds + \int_1 \frac{\bar{N}_i N_0''}{ES} ds + \int_1 \frac{\chi \bar{Q}_i Q_0''}{GS} ds, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Equação 7})$$

Os coeficientes da matriz  $\mathbf{A}_{II}$  resultam da equação

$$\int_1 \frac{\bar{M}_i M_k}{EI} ds + \int_1 \frac{\bar{N}_i N_k}{ES} ds + \int_1 \frac{\chi \bar{Q}_i Q_k}{GS} ds = a_{ik} f_{ik}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{Equação 8})$$

e escreve-se o conjunto de equações, novamente, na forma

$$\mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{Ik} = \mathbf{u}_{Ik} - \mathbf{u}_{I0}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{Equação 9})$$

em que  $\mathbf{u}_{Ik}$  são os deslocamentos prescritos e a matriz  $\mathbf{A}_{II}$  é definida a partir de:

$$A_{II} = \begin{bmatrix} \int_1 \frac{1}{ES} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_1 \frac{x_1^2}{EI} + \frac{\chi}{GS} dx_1 & \int_1 -\frac{x_1}{EI} dx_1 \\ 0 & \int_1 -\frac{x_1}{EI} dx_1 & \int_1 \frac{1}{EI} dx_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 10})$$

Os coeficientes da matriz de rigidez são obtidos impondo-se a condição de  $\mathbf{u}_{I0} = \mathbf{u}_{F0} = \mathbf{F}_0 = 0$  nas Equações 5 e 9 e considerando os deslocamentos nodais prescritos unitários ( $u_I = \delta_{ki}$  e  $u_F = \delta_{kf}$ ).

Escreve-se portanto, os coeficientes de rigidez elásticos

$$\mathbf{f}_{Ik} = \mathbf{A}_{II}^{-1} \mathbf{u}_{Ik}, \quad k=1, 2, 3 \quad (\text{Equação 11})$$

$$\mathbf{f}_{Fk} = \mathbf{A}_{FF}^{-1} \mathbf{u}_{Fk}, \quad k=4, 5, 6 \quad (\text{Equação 12})$$

A partir dos resultados das Equações 11 e 12, encontram-se, através do equilíbrio, os demais coeficientes  $\mathbf{f}_{Fk}$ ,  $k=1, 2, 3$  e  $\mathbf{f}_{Ik}$ ,  $k=4, 5, 6$ .

Obtém-se, assim, a matriz de rigidez elástica de elemento  $\mathbf{K}_e$ :

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ik} & \mathbf{f}_{Ik} \\ \mathbf{f}_{Fk} & \mathbf{f}_{Fk} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 13})$$

## 2.2. Ações de Engastamento Perfeito

Um carregamento genérico aplicado em um elemento pode ser decomposto em duas componentes: uma tangencial ( $q_t$ ) e uma normal ( $q_n$ ), como mostrado na figura 4.

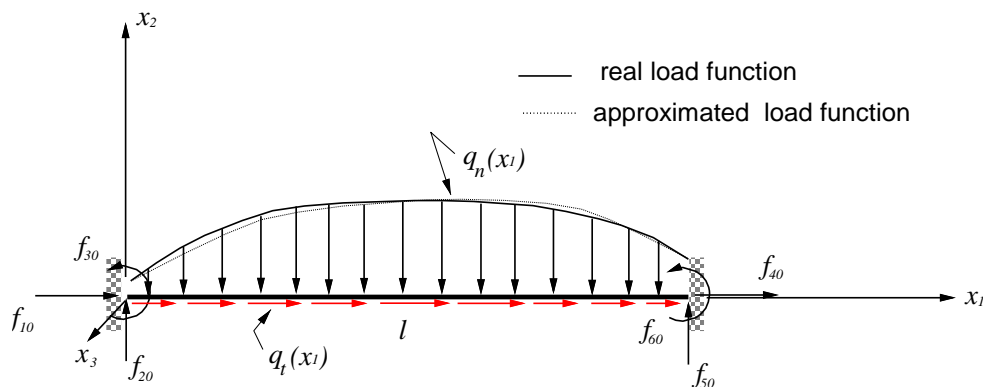


Figura 4 – Carregamento genérico atuando no plano do elemento

Estabelecem-se as ações de extremidade do elemento, através das Equações 5 e 9, impondo-se as condições de que os nós do elemento são restringidos, ou seja,  $\mathbf{u}_{Ik} = \mathbf{u}_{Fk} = 0$ . Assim, tem-se os seguintes sistemas de equações

$$\mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{I0} = \mathbf{u}_{I0} \quad \text{(Equação 14)}$$

$$\mathbf{A}_{FF} \mathbf{f}_{F0} = \mathbf{u}_{F0}$$

onde  $\mathbf{f}_{I0}$  e  $\mathbf{f}_{F0}$  são ações de extremidade de elemento devidas à carga de membro e  $\mathbf{u}_{I0}$  e  $\mathbf{u}_{F0}$  são dados pelas Equação 7 e 3, respectivamente.

Neste artigo, utiliza-se uma função de interpolação quadrática para aproximar a carga do elemento. São determinados três pontos de carga conhecida ao longo do elemento em análise  $\left( x_1 = 0, x_2 = \frac{L}{2}, x_3 = L \right)$ , para determinar as expressões para as funções de cargas e esforços internos associados. Tem-se portanto

$$u_{10} = - \int_1 \frac{N_0''}{ES} dx_1, \quad u_{20} = \int_1 \left( \frac{x_1 M_0''}{EI} + \frac{\chi Q_0''}{GS} \right) dx_1, \quad u_{30} = - \int_1 \frac{M_0''}{EI} dx_1 \quad \text{(Equação 15)}$$

onde

$$M_0'' = M(q_n), \quad N_0'' = N(q_t), \quad Q_0'' = Q(q_n) \quad \text{(Equação 16)}$$

$$N_0''(x_1) = - \int_0^{x_1} q_t(\xi) d\xi = -a_t \frac{x_1^3}{3} - b_t \frac{x_1^2}{2} - c_t x_1 \quad \text{(Equação 17)}$$

$$Q_0''(x_1) = - \int_0^{x_1} q_n(\xi) d\xi = a_n \frac{x_1^3}{3} + b_n \frac{x_1^2}{2} - c_n x_1 \quad \text{(Equação 18)}$$

$$M_0''(x_1) = - \int_0^{x_1} (x_1 - \xi) q_n(\xi) d\xi = a_n \frac{x_1^4}{12} + b_n \frac{x_1^3}{6} + c_n \frac{x_1^2}{2} \quad \text{(Equação 19)}$$

$$\text{Com } a_k = -\frac{2}{l^2}(2q_{k2} - q_{k1} - q_{k3}), \quad b_k = -\frac{1}{l}(4q_{k2} - 3q_{k1} - q_{k3}), \quad c_k = q_{k1} \text{ e } k = n, t.$$

De posse dos deslocamentos  $\mathbf{u}_{I0}$  e  $\mathbf{u}_{F0}$  e da matriz de rigidez local de cada elemento, encontram-se as ações de extremidade para um carregamento genérico.

### 3. ESTRATÉGIA DE DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO COMPOSTA NORMAL

No presente artigo, propõe-se uma estratégia para o dimensionamento de elementos de pórtico plano em concreto armado com seções transversais quaisquer e diversos arranjos de armadura, sujeitos à flexão composta normal (Figura 5).

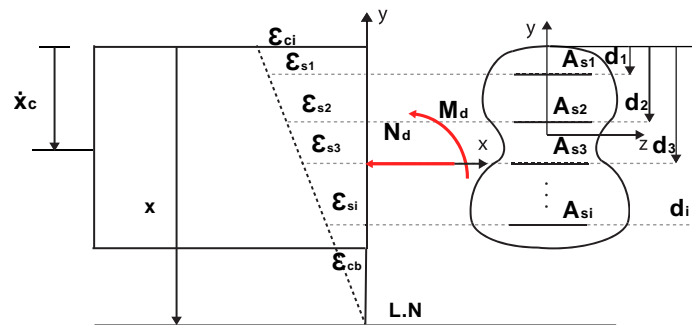


Figura 5 – Seção qualquer sujeita à flexão composta e a sua deformada

O dimensionamento é realizado nos pontos em que se conhecem os valores dos esforços atuantes, partindo-se do seu equilíbrio com os esforços resistentes. Assim, dados um momento fletor e um esforço normal solicitantes de cálculo atuando em uma seção com geometria e armaduras (quantidade e disposição) definidas, encontra-se a posição da linha neutra ( $x$ ) e a área de aço ( $A_s$ ) que correspondem ao equilíbrio da seção no E.L.U. em certo domínio de dimensionamento.

Deste modo, estabelecem-se as equações a seguir:

$$\sum F_x = 0 \quad N_d - r_{cc} - \sum_i^{ncs} r_{si} = 0 \quad (\text{Equação 20})$$

$$\sum M_{\text{topo}} = 0 \quad M_d - N_d x_c + \sum_i^{ncs} r_{si} d_i + r_{cc} d_c = 0 \quad (\text{Equação 21})$$

$$r_{si} = \sigma_{sdi} A_{si} \quad (\text{Equação 22})$$

$$r_{cc} = \int_{A_c} \sigma_c(y) dA \quad (\text{Equação 23})$$

$$A_{si} = \frac{n_i}{n} A_s \quad (\text{Equação 24})$$

$$A_c(x) = \int_0^{\min(x,h)} dA \quad (\text{Equação 25})$$



$$A = \int_0^h dA \tag{Equação 26}$$

nas quais  $n_{cs}$  é número de camadas de aço,  $n_i$  e  $A_{si}$  o número de barras de aço e a área da armadura da  $i$ -ésima camada,  $A_c$  e  $A$  são as áreas da seção de concreto armado sujeita à compressão e da seção bruta, respectivamente,  $\sigma_{sdi}$  e  $r_{si}$  são a tensão de cálculo e a força normal resistente do aço na  $i$ -ésima camada,  $r_{cc}$  corresponde à força normal resistente do concreto à compressão,  $N_d$  e  $M_d$  são a força normal e o momento fletor solicitantes,  $d_c$  é a distância do ponto de aplicação da força no concreto até o topo da seção e  $x_c$  é a posição do centróide da área transformada.

O espaçamento entre as barras de aço é uniforme e é dado por

$$s = \frac{h - 2d'}{n_{cs} - 1}, \tag{Equação 27}$$

sendo  $h$  a altura da seção transversal e  $d'$  a distância do centro das camadas 1 e  $n$  até as bordas da seção.

A distância entre o topo da seção até o centróide de cada armadura pode ser descrita por

$$s = d' + (i - 1)s \tag{Equação 28}$$

Com o objetivo de determinar o valor da força resistente do concreto ( $r_{cc}$ ) emprega-se o processo de integração de Gauss-Legendre. Para tanto, a seção é fornecida segundo uma malha de contorno, que é dividida em faixas de largura  $b(y)$  e altura  $\Delta_{strip}$  (Figura 6 (a)). Nestas faixas, por sua vez, são definidos pontos de integração (Figura 6 (b)) onde a função de tensão no concreto é avaliada.

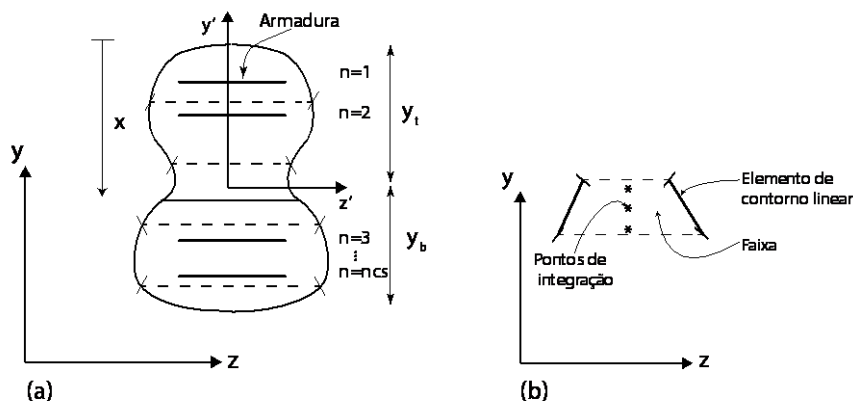


Figura 6 - (a) Malha de contorno da seção transversal e a mesma discretizada em faixas (b) detalhe de uma faixa com seus pontos de integração

Logo, reescreve-se a força de compressão no concreto como

$$r_{cc} = \sum_{i=1}^{nstrip} \int_0^{y_i} \sigma_c(y) b(y) dy$$

$$r_{cc} = \frac{\Delta strip}{2} \sum_{i=1}^{nstrip} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_c(y(\eta)) b(y(\eta)) \omega_j$$

(Equação 29)

e o momento resistente do concreto em 30:

$$M_c = \sum_{i=1}^{nstrip} \int_0^{y_i} \sigma_c(y) y b(y) dy$$

$$M_c = \frac{\Delta strip}{2} \sum_{i=1}^{nstrip} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_c(y(\eta)) y(\eta) b(y(\eta)) \omega_j$$

(Equação 30)

Os parâmetros  $\eta$  e  $\omega_j$  são as posições e pesos, respectivamente, e fazem parte do processo de integração numérica de Gauss-Legendre.

A partir da relação entre o momento resistente e a força resistente à compressão do concreto, obtém-se o ponto de aplicação da força normal,  $d_c$ , para a seção analisada, conforme Equação 31.

$$d_c = \frac{M_c}{r_{cc}}$$

(Equação 31)

Caso o momento fletor seja nulo,  $d_c$  é calculado de acordo com a Equação 32, pois admite-se que o esforço axial está aplicado no centroide da seção.

$$d_c = \frac{h}{2}$$

(Equação 32)

Assim, substituindo as Equações 22, 23 e 24 nas Equações 20 e 21, tem-se:

$$N_d - \int_{Ac(x)} \sigma_c(y) dA - \left( \sum_{i=1}^{nc_s} \sigma_{sdi} n_i d_i \right) \left( \frac{A_s}{n} \right) = 0$$

(Equação 33)

$$M_d - N_d x_c + \int_{Ac(x)} \sigma_c(y) y dA + \left( \sum_{i=1}^{nc_s} \sigma_{sdi} n_i d_i \right) \left( \frac{A_s}{n} \right) = 0$$

(Equação 34)

Em seguida, dividem-se as Equações 33 e 34 pelas Equações 35 e 36, respectivamente.



# XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018  
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



$$a_c = \sigma_c A \quad (\text{Equação 35})$$

$$a_c h = \sigma_c A h \quad (\text{Equação 36})$$

Deste modo, tem-se, as equações de equilíbrio adimensionais da seção

$$v - r_c - \left( \sum_{i=1}^{nc_s} \sigma_{sdi} n_i \right) \left( \frac{\omega}{n \cdot f_{yd}} \right) = 0 \quad (\text{Equação 37})$$

$$\mu - v \frac{x_c}{h} + r_c \beta_c + \left( \sum_{i=1}^{nc_s} \sigma_{sdi} n_i \beta_i \right) \left( \frac{\omega}{n \cdot f_{yd}} \right) = 0 \quad (\text{Equação 38})$$

com,

$$v = \frac{N_d}{a_c} \quad (\text{Equação 39})$$

$$\mu = \frac{M_d}{a_c h} \quad (\text{Equação 40})$$

$$r_c = \frac{r_{cc}}{a_c} \quad (\text{Equação 41})$$

$$\beta_i = \frac{d_i}{h} \quad (\text{Equação 42})$$

$$\beta_c = \frac{d_c}{h} \quad (\text{Equação 43})$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{a_c} \quad (\text{Equação 44})$$

Sendo, respectivamente,  $v$  e  $\mu$  o normal e o momento solicitantes, adimensionais,  $r_c$  o normal resistente e  $\omega$  a taxa de armadura.

A solução do sistema não-linear adimensional formado pelas Equações 37 e 38 é dada em termos da posição da linha neutra e da taxa mecânica de armadura. Isolando-se  $\omega$  em 37 e 38, obtém-se, respectivamente:

$$\omega = \frac{(v - r_c) n \cdot f_{yd}}{\left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \right)}, \quad \text{(Equação 45)}$$

$$\omega = \frac{\left[ -\mu + v \left( \frac{x_c}{h} \right) - r_c \beta_c \right] n \cdot f_{yd}}{\left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \beta_i \right)}. \quad \text{(Equação 46)}$$

Igualado as Equações 45 e 46 pode-se definir a função  $F(x)$ , como segue,

$$F(x) = \left[ \mu - v \left( \frac{x_c}{h} \right) + r_c \beta_c \right] \left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \right) + (v - r_c) \left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \beta_i \right) \quad \text{(Equação 47)}$$

A seção atinge o equilíbrio para o valor de  $x$  no qual a Equação 47 se iguala a zero, ou seja, quando o equilíbrio de forças é atingido. A solução numérica é obtida via método da bissecante, apresentada em ARAÚJO J.M., 2014. Acrescenta-se, ainda, uma estratégia para a otimização da procura da solução de acordo com o tipo de solicitação, ou seja, domínios de dimensionamento.

De posse da posição da linha neutra, determina-se a taxa mecânica de armadura segundo as Equações 45 e 46.

Se  $\sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} \cdot n_i < tol$ , calcula-se  $\omega$  com base na Equação 45;

Se  $\sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} \cdot n_i \geq tol$ , calcula-se  $\omega$  com base na Equação 46.

Por fim, determina-se o valor da área de aço por meio da Equação 48, e o processo se repete para a seção seguinte e posteriormente, para o próximo elemento.

$$A_s = \frac{\omega \cdot a_c}{f_{yd}} \quad \text{(Equação 48)}$$

#### 4. APLICAÇÃO

A presente aplicação trata da análise linear elástica e dimensionamento do pórtico plano mostrado na Figura 7. O pórtico é composto por dois pilares e uma viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído. A seção transversal de todos os elementos do sistema é de forma geométrica trapezoidal (Figura 8) em concreto armado com a resistência característica  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$  (Grupo I) e aço CA50. O módulo de elasticidade do aço é  $E_s = 210 \text{ GPa}$  e do concreto  $E_c = 25 \text{ GPa}$ . Também são dados conhecidos do problema a posição do centroide da seção,  $x_c = 13,33 \text{ cm}$ , e a deformação de escoamento do aço, calculada de acordo com a classe do mesmo,  $\varepsilon_{yd} = 2,07 \times 10^{-3}$ .

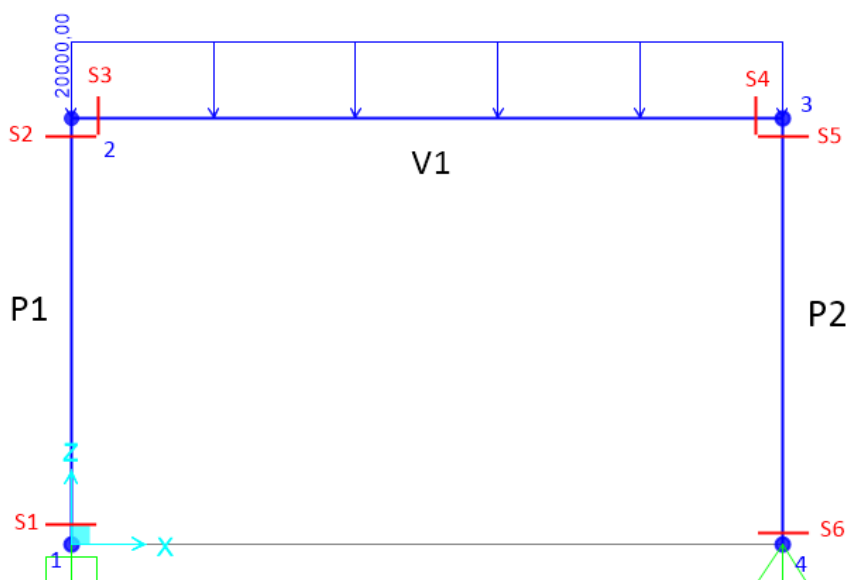


Figura 7 – Pórtico plano carregado modelado pelo SAP2000

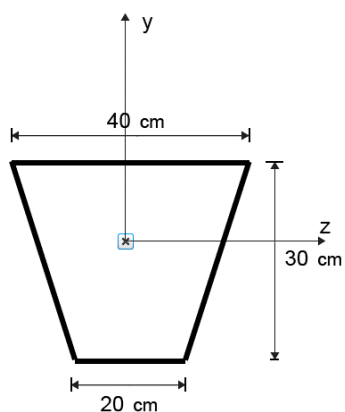


Figura 8 – Seção transversal trapezoidal do modelo

Com o intuito de se obter os esforços nos elementos, imprescindíveis ao dimensionamento, foi realizada a análise linear elástica do pórtico utilizando-se o programa computacional NAESY – *Numerical Analysis of Engineering Systems*, cuja base foi desenvolvida por de Araújo (1994) e onde foi incorporada a formulação apresentada neste artigo. Para fins de comparação, o pórtico também foi modelado no *software* SAP2000 (2013). A Tabela 1 contém os resultados encontrados através de ambos os programas.

Tabela 1 - Esforços nos elementos

Elemento	Seção	Normal (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN.m)	
		NAESY	SAP2000	NAESY	SAP2000	NAESY	SAP2000
Pilar 1	1	48,78	48,78	-11,05	-11,06	-6,09	-6,10
	2	-48,78	-48,78	11,05	11,06	-27,07	-27,07
Viga 1	3	11,05	11,06	48,78	48,78	27,07	27,07
	4	-11,05	-11,06	51,22	51,22	-33,16	-33,17
Pilar 2	5	51,22	51,22	11,05	11,06	33,16	33,17
	6	-51,22	-51,22	-11,05	-11,06	0	0

Como pode-se observar, os resultados obtidos na análise estrutural pelo NAESY se aproximam de forma satisfatória dos valores calculados através do SAP2000 (2013), atestando a efetividade da formulação utilizada para a análise de sistemas estruturais reticulados de seção qualquer.

Em seguida, foi realizado o dimensionamento das seções mais solicitadas de cada elemento. A estratégia implementada exige saber de antemão, além da geometria da seção, a quantidade e distribuição das armaduras longitudinais. Para tanto, de posse dos valores característicos dos esforços internos, faz-se a combinação última normal para o estado limite último. Aplicando-se a estratégia descrita no item 3, encontra-se a posição da linha neutra e a área de aço que correspondem ao equilíbrio da seção em um determinado domínio de dimensionamento.

Para constatação da solução (área de aço) encontrada pelo NAESY, verificou-se analiticamente se a linha neutra, obtida iterativamente, equilibra os esforços solicitantes e resistentes na seção. Neste caso, foram utilizadas as Equações 20 e 21. O dimensionamento realizado através do NAESY e sua verificação analítica são mostrados a seguir.

P1 (Seção 2):

A seção transversal e a distribuição de armaduras propostas, para este caso, estão representadas na Figura 9. A mesma está submetida à flexão composta normal e os esforços solicitantes de cálculo obtidos são  $N_d = 68,29 \text{ kN}$  (compressão) e  $M_d = -3789,25 \text{ kN.cm}$  (tração nas fibras superiores).

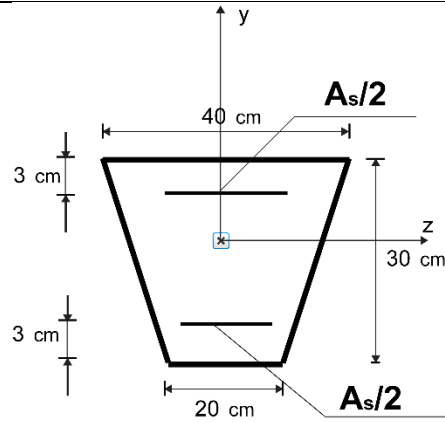


Figura 9 – Seção trapezoidal e disposição das armaduras para o P1

Através da Figura 9, constata-se que a distância do topo da seção até o centroide de cada camada de armadura é  $d_1 = 3 \text{ cm}$  e  $d_2 = 27 \text{ cm}$  para a primeira e segunda camadas, respectivamente, com a orientação a partir do topo da seção. O valor da linha neutra calculado é  $x = 4,90 \text{ cm}$ , portanto a seção encontra-se dimensionada no Domínio 2. A área de aço encontrada é  $A_s = 5,20 \text{ cm}^2$  e  $A_{s1} = A_{s2} = 2,60 \text{ cm}^2$ .

Com o valor de  $x$ , é possível conhecer a deformação nas camadas de aço,  $\varepsilon_{s1} = -10\%$  e  $\varepsilon_{s2} = 8,62 \times 10^{-4}$  e, por consequência, as tensões atuantes nessas barras,  $\sigma_{sd1} = f_{yd} = -43,47 \text{ kN/cm}^2$  e  $\sigma_{sd2} = E_s \cdot \varepsilon_{s2} = 18,10 \text{ kN/cm}^2$ . A força resistente do concreto à compressão e a distância do seu ponto de aplicação até o topo da seção calculados são,  $r_{cc} = 134,24 \text{ kN}$  e  $d_c = 28,07 \text{ cm}$ , respectivamente.

Logo, através das Equações 20 e 21, é possível verificar o equilíbrio da seção, conforme segue:

$$\sum F_x = 0: N_d - r_{cc} - \sum_i^{ncs} r_{si} = 0$$

$$N_d - r_{cc} - \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} \cdot A_{si} = 0$$

$$N_d - r_{cc} - \sigma_{sd1} \cdot A_{s1} - \sigma_{sd2} \cdot A_{s2} = 0$$

$$68,29 - 134,24 - (-43,48 \cdot 2,60) - 18,10 \cdot 2,60 = 0$$

$$0 = 0; \text{ OK}$$

$$\sum M_{topo} = 0: M_d - N_d \cdot x_c + \sum_i^{ncs} r_{si} \cdot d_i + r_{cc} \cdot d_c = 0$$

$$M_d - N_d \cdot x_c + \sum_i^{ncs} \sigma_{sdi} \cdot A_{si} \cdot d_i + r_{cc} \cdot d_c = 0$$

$$M_d - N_d \cdot x_c + \sigma_{sd1} \cdot A_{s1} \cdot d_1 + \sigma_{sd2} \cdot A_{s2} \cdot d_2 + r_{cc} \cdot d_c = 0$$

$$-3789,25 - 68,29 \cdot 13,33 + (-43,48 \cdot 2,60 \cdot 3,00) + 18,10 \cdot 2,60 \cdot 27 + 134,24 \cdot 28,07 = 0$$

$$0 = 0; OK$$

Portanto, confirma-se que  $x = 4,90 \text{ cm}$  é uma solução possível para o problema e que  $A_s = 5,20 \text{ cm}^2$  equilibra a seção no ELU.

V1 (Seção 4):

Neste caso, a seção está submetida a um esforço normal de cálculo  $N_d = 15,47 \text{ kN}$  (compressão) e  $M_d = -3789,25 \text{ kN.cm}$  (tração nas fibras superiores). Avalia-se a possibilidade de desconsiderar o esforço normal, considerado pequeno, e então dimensionar a viga à flexão simples com armadura simples; ou à flexão simples com armadura dupla e; ou considerar o esforço normal, e dimensionar a mesma à flexão composta normal com armadura dupla. A consideração mais favorável do ponto de vista econômico, e, portanto, a escolhida, foi a primeira e por isso,  $N_d$  é considerado nulo. A seção transversal utilizada é a representada na Figura 10.

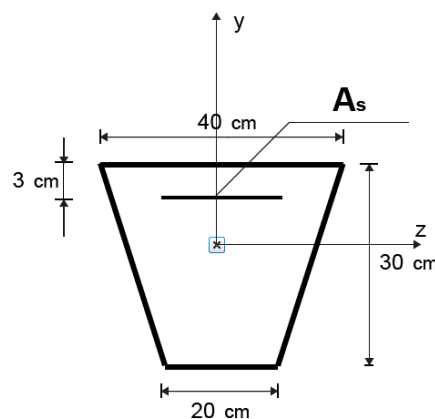


Figura 10 – Seção trapezoidal e disposição das armaduras para a V1

A posição da linha neutra obtida, que equilibra a seção é  $x = 6,20 \text{ cm}$ , e por isso a seção encontra-se dimensionada no Domínio 2. A área de aço encontrada é  $A_s = 4,27 \text{ cm}^2$ . Por conseguinte, o aço encontra-se com deformação específica maior que a de escoamento,  $\varepsilon_{s1} = -10\text{‰}$  e a tensão atuante na armadura,  $\sigma_{sd1} = f_{yd} = -43,47 \text{ kN/cm}^2$ . A força resistente do concreto à compressão e a distância do seu ponto de aplicação até o topo da seção calculados são,  $r_{cc} = 190,01 \text{ kN}$  e  $d_c = 27,43 \text{ cm}$ , respectivamente. Neste caso, a distância do topo da seção até o centroide da camada de armadura é  $d_1 = 3 \text{ cm}$ .

Assim, escreve-se as equações de equilíbrio a seguir:



$$\sum F_x = 0: N_d - r_{cc} - \sum_i^{ncs} r_{si} = 0$$

$$N_d - r_{cc} - \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} \cdot A_{si} = 0$$

$$N_d - r_{cc} - \sigma_{sd1} \cdot A_{s1} = 0$$

$$0 - 190,01 - (-43,48 \cdot 4,37) = 0$$

$$0 = 0; OK$$

$$\sum M_{topo} = 0: M_d - N_d \cdot x_c + \sum_i^{ncs} r_{si} \cdot d_i + r_{cc} \cdot d_c = 0$$

$$M_d - N_d \cdot x_c + \sum_i^{ncs} \sigma_{sdi} \cdot A_{si} \cdot d_i + r_{cc} \cdot d_c = 0$$

$$M_d - N_d \cdot x_c + \sigma_{sd1} \cdot A_{s1} \cdot d_1 + r_{cc} \cdot d_c = 0$$

$$-4642,22 - 0,00 \cdot 13,33 + (-43,48 \cdot 4,37 \cdot 3,00) + 190,01 \cdot 27,43 = 0$$

$$0 = 0; OK$$

Desta forma, comprova-se que  $x = 6,20\text{cm}$  é uma solução possível para o problema e que  $A_s = 4,37\text{ cm}^2$  equilibra a seção no ELU.

P2 (Seção 5):

A Figura 11 representa a seção transversal e a distribuição de armaduras para este caso. A solicitação considerada é a flexão composta normal e os esforços solicitantes de cálculo obtidos são  $N_d = 71,71\text{ kN}$  (compressão) e  $M_d = -4642,22\text{ kN.cm}$  (tração nas fibras superiores).

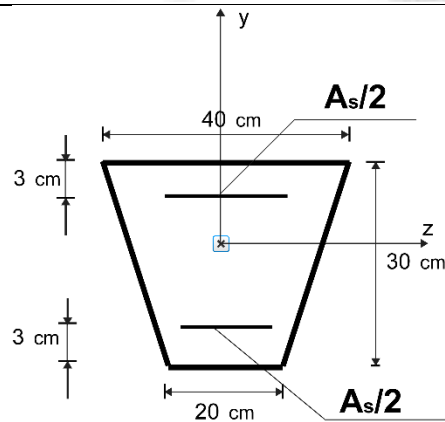


Figura 11 – Seção trapezoidal e disposição das armaduras para o P2

Novamente, a distância do topo da seção até o centroide de cada camada de armadura é  $d_1 = 3 \text{ cm}$  e  $d_2 = 27 \text{ cm}$  para a primeira e segunda camadas, respectivamente.

Assim, o valor da linha neutra que equilibra a seção é  $x = 5,27 \text{ cm}$  e por isso a seção encontra-se dimensionada no Domínio 2. A área de aço encontrada é  $A_s = 6,74 \text{ cm}^2$  e  $A_{s1} = A_{s2} = 3,37 \text{ cm}^2$ . Com o valor de  $x$  é possível conhecer a deformação nas camadas de aço,  $\varepsilon_{s1} = -10\text{‰}$  e  $\varepsilon_{s2} = 1,04 \times 10^{-3}$  e conseqüentemente, as tensões atuantes nessas barras,  $\sigma_{sd1} = f_{yd} = -43,47 \text{ kN/cm}^2$  e  $\sigma_{sd2} = E_s \cdot \varepsilon_{s2} = 21,90 \text{ kN/cm}^2$ . A força resistente do concreto à compressão e a distância do seu ponto de aplicação até o topo da seção calculados são,  $r_{cc} = 144,46 \text{ kN}$  e  $d_c = 28,00 \text{ cm}$ , respectivamente.

Por fim, verifica-se o equilíbrio da seção:

$$\sum F_x = 0: N_d - r_{cc} - \sum_i^{ncs} r_{si} = 0$$

$$N_d - r_{cc} - \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} \cdot A_{si} = 0$$

$$N_d - r_{cc} - \sigma_{sd1} \cdot A_{s1} - \sigma_{sd2} \cdot A_{s2} = 0$$

$$71,71 - 144,46 - (-43,48 \cdot 3,37) - 21,90 \cdot 3,37 = 0$$

$$0 = 0; \text{ OK}$$

$$\sum M_{topo} = 0: M_d - N_d \cdot x_c + \sum_i^{ncs} r_{si} \cdot d_i + r_{cc} \cdot d_c = 0$$



# XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018  
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



$$M_d - N_d \cdot x_c + \sum_i^{ncs} \sigma_{sdi} \cdot A_{si} \cdot d_i + r_{cc} \cdot d_c = 0$$

$$M_d - N_d \cdot x_c + \sigma_{sd1} \cdot A_{s1} \cdot d_1 + \sigma_{sd2} \cdot A_{s2} \cdot d_2 + r_{cc} \cdot d_c = 0$$

$$-4642,22 - 71,71 \cdot 13,33 + (-43,48 \cdot 3,37 \cdot 3,00) + 21,90 \cdot 3,37 \cdot 2,7 + 144,46 \cdot 28,00 = 0$$
$$0 = 0; OK$$

Dessa forma, certifica-se, mais uma vez, que a posição da linha neutra determinada iterativamente pelo programa,  $x = 5,27 \text{ cm}$ , é uma solução possível para o problema e que  $A_s = 6,74 \text{ cm}^2$ , para a distribuição da armadura conforme representado na Figura 11, equilibra a seção no ELU.

## 5. CONCLUSÃO

Neste artigo foi apresentado um processo computacional para análise e dimensionamento de estruturas reticuladas planas, em concreto armado, com seções transversais quaisquer e diversos arranjos de armadura, sujeitas à flexão composta normal. Utilizou-se uma formulação do Método da Rigidez Direta para encontrar os esforços internos e com base nestas respostas, dimensionar as seções mais solicitadas, por meio de uma estratégia iterativa para determinação da linha neutra através do processo da bissecante para equilíbrio de forças no ELU.

Sobre as aplicações, estudou-se um pórtico plano, obtendo-se excelentes respostas na análise estrutural e no dimensionamento das seções avaliadas sob a flexão simples e a flexão composta normal.

A partir dos resultados, verifica-se, portanto, que a estratégia proposta é eficiente e relevante para modelar seções transversais de formas geométricas quaisquer (usuais ou não). Ressalta-se ainda a facilidade na geração de modelos devido ao processo baseado em formulações integrais de contorno para criação das seções.

## Agradecimentos

Esta pesquisa foi fomentada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG).



## 6. REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J.M. **Curso de Concreto Armado**. Rio Grande: Dunas, 2014, v.3, 4.ed.

de ARAÚJO, F. C., 1994. **Time-domain solution of three-dimensional linear problems of elastodynamics by means of a BE/FE coupling process (in German)**, Ph.D. Thesis, Technical University of Braunschweig, Germany.

de ARAÚJO, F. C., PEREIRA, R. A. T., 2017. **Boundary-integral-based process for calculating stiffness matrices of space frame elements with axially varying cross section**. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 77, 2017; p.61-69.

MAGA, T. **Análise não-linear física e geométrica de sistemas apertados com elementos de rigidez variável em concreto armado**, em: Dissertação de Mestrado, 2017.

NBR6118 - **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**, ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, 2007.

SAP2000 – **Structural Analysis Program (SAP)** – Versão Ultimate 16.0.0. Computers and Structures, Inc, 2013.