



## IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E ESTUDO DO DESEMPENHO DE UM ELEMENTO DE CABO PARA A SIMULAÇÃO DINÂMICA DE LINHAS DE ANCORAGEM

### Computational Implementation and Performance Study of a Cable Element for the Dynamical Simulation of Mooring Lines

Pedro Henrique Rios Silveira (1P); Fábio Martins Gonçalves Ferreira (2); Eduardo Nobre Lages (3)

- (1) Engenheiro Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió – AL, Brasil  
Email para Correspondência: pedro.silveira10@gmail.com; (P) Apresentador  
(2) Dr. Engenheiro Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió – AL, Brasil  
(3) Dr. Prof., Universidade Federal de Alagoas, Maceió – AL, Brasil

**Resumo:** Este trabalho apresenta a formulação matemática, implementação computacional e estudo de desempenho de um elemento de cabo baseado em equações de catenária elástica em 3 dimensões desenvolvido para a simulação dinâmica de estruturas marinhas delgadas, especialmente linhas de ancoragem. Mostra-se o equacionamento das respostas elástica, viscosa e inercial do elemento, bem como algumas hipóteses simplificadoras adotadas. Na sequência, o elemento é computacionalmente implementado e incorporado a um sistema computacional capaz de gerar cenários realistas de arranjos de ancoragem *offshore*. Por fim, compara-se seu desempenho com o de elementos clássicos de treliça em relação a tópicos como tempo computacional, fidelidade das detecções e estabilidade, buscando averiguar viabilidade em diversos cenários, bem como limitações da formulação e diretrizes de uso. Exemplos são apresentados e discutidos para os pontos de interesse.

*Palavras chaves:* estruturas offshore; águas profundas; análise não linear; C++.

**Abstract:** This work presents the mathematical formulation, computational implementation and performance analysis of a cable element based on the three-dimensional elastic catenary equations for the dynamical simulation of slender marine structures, especially mooring lines. It presents equations for the elastic, viscous and inertial behaviors of the element, along with simplifying considerations made by the authors. The element is then implemented inside a computational base capable of creating realistic mooring scenarios. At last, the element's performance is compared to that of a classic truss-based element in regard to its computational cost, accuracy, and stability as to determine viability in different analysis scenarios, limitations, and necessary user guidelines. Examples illustrate these focuses.

**Keywords:** offshore structures; deep water; non-linear analysis; C++.



## 1 INTRODUÇÃO

A demanda por soluções computacionais para a simulação de elementos estruturais sob solicitações complexas tem motivado o estudo de uma ampla gama de métodos numéricos, sistemas computacionais e formulações matemáticas dentro do contexto da engenharia. Especialmente no que toca a exploração de petróleo em ambiente *offshore*, e mais ainda águas profundas, desafios tecnológicos importantes ainda precisam ser vencidos, dentre eles a necessidade de se restringir a movimentação das unidades flutuantes, garantindo níveis adequados de segurança (Chakrabarti, 2005).

Em uma grande variedade de cenários, a dinâmica dessas unidades é controlada por linhas de ancoragem, que fazem a conexão das mesmas com ancoradores. Essas linhas, compostas comumente por cabos de aço ou materiais sintéticos, ou ainda correntes metálicas, têm comportamento mecânico altamente não linear do ponto de vista geométrico, este associado a um regime de grandes deslocamentos e rotações tipicamente presente, ainda que os elementos estruturais apresentem pequenas deformações. Tal não linearidade é oriunda do fato de cabos apresentarem rigidez muito pequena aos esforços fletores, torcionais ou cisalhantes, resistindo bem apenas a esforços axiais de natureza tracional (Karoumi, 1999; Thai e Kim, 2011; Chang, Park e Lee, 2008).

Para representar o comportamento mecânico de estruturas de cabo, diferentes estratégias são usadas por diferentes autores. Uma das soluções mais simples consiste em aproximar tais peças por uma série de elementos de treliça conectados linearmente, de maneira similar a uma corrente, onde os elementos agem como elos. Tal metodologia é usada, por exemplo, pelo *framework* DOOLINES (Silveira, Lages e Ferreira, 2012). Como limitação para essa estratégia, tem-se que, pela necessidade de aproximar uma geometria curva por elementos exclusivamente retos, o número dos mesmos pode se tornar elevado, especialmente em arranjos com grande curvatura. Isto, por sua vez, acarreta em passos de integração pequenos, uma vez que os mesmos têm correlação direta com o tamanho do elemento.

Outra solução presente na literatura consiste em usar elementos que possuam uma noção interna de curvatura. Nessa categoria, podem ser citados elementos de viga, para os quais rigidezes à flexão muito pequenas são utilizadas, bem como elementos finitos de cabo propriamente ditos, esses baseados em funções interpoladoras polinomiais, comumente parabólicas, oriundas de uma gama de diferentes hipóteses simplificadoras e manipulações algébricas. Tais estratégias também têm suas limitações. No caso da primeira, graus de liberdade, variáveis de integração e equações constitutivas, cinemáticas e de equilíbrio extras precisam ser incluídas para tratar a flexão do elemento, cujo valor pequeno associado à sua rigidez pouco influencia na resposta mecânica. No caso da segunda, diferentes hipóteses e manipulações levam a diferentes respostas do elemento, que pode ser limitado a casos específicos de análise (por exemplo, cabos relativamente bem esticados). Alguns exemplos desta metodologia podem ser encontrados em Ozdemir (1979) e Ali e Abdel-Ghaffarf (1995), entre outros.

Por fim, uma solução que tem motivado estudos, incluindo aplicações em dinâmica, consiste em usar equações de catenária elástica em 3 dimensões como bases exatas para



a definição da resposta elástica do elemento. Tal estratégia é originalmente apresentada, em sua versão bidimensional, por O'Brien e Francis (1964), com Irvine (1981) subsequentemente apresentando a matriz de flexibilidade do problema. Depois, soluções 3D são desenvolvidas por Thai e Kim (2011), entre outros, e, mais recentemente, Salehi Ahmad Abad *et al.* (2013), que desenvolveram uma formulação estendida que permite a aplicação de cargas distribuídas nas 3 direções cartesianas.

A estratégia de usar elementos de catenária traz consigo algumas vantagens. Com os mesmos, a resposta elástica dos cabos pode ser calculada de maneira exata, o que é bastante vantajoso, visto que um número bem menor de elementos é necessário para aproximar o comportamento elástico da estrutura. No caso de um problema estático com somente a carga peso homogeneamente distribuída, um único elemento garante a resposta exata, sendo a discretização necessária para outros casos, como o de interesse deste trabalho, que consiste em avaliar problemas dinâmicos sob a ação de solicitações de natureza mais geral. Outra vantagem que se espera obter com o uso de elementos de catenária é uma redução no passo de tempo necessário para a integração temporal, uma vez que os mesmos são significativamente mais longos e menos rígidos. Contudo, tal metodologia tem o problema dos elementos serem matematicamente muito custosos, uma vez que as relações de força e posição são não lineares e necessitam do cálculo de uma matriz de flexibilidade tangente que precisa ser invertida em todo passo de tempo, um custo computacional agravado especialmente em comparação com o dos elementos de treliça, cuja resposta pode ser obtida de maneira direta e bastante simples.

Especificamente no contexto *offshore*, Silveira, Ferreira e Lages (2017) apresentaram a utilização desses elementos de catenária para a simulação de uma linha de ancoragem baseada em um caso real de ancoramento, incluindo considerações acerca do efeito de arrasto com o fluido marinho. Apesar do elemento ter mostrado boa convergência e tempos computacionais considerados satisfatórios, os autores reforçam que comparações diretas com os elementos clássicos de treliça precisam ser feitas para que se possa averiguar a competitividade real do mesmo. Tal comparação direta em termos de tempos computacionais e medidas objetivas de erro para diferentes discretizações não foi feita por nenhum dos autores citados que contribuíram para o desenvolvimento das formulações de catenária elástica. Thai e Kim (2011), por exemplo, compararam o elemento desenvolvido por eles com o do sistema computacional SAP2000, observando tempos computacionais mais de 100 vezes menores com respostas que apresentam diferenças de deslocamento na ordem de 0,24%. Contudo, a comparação não averigua o efeito do passo de tempo e da discretização nessas respostas, nem compara os dois elementos dentro da mesma base computacional, ou mesmo com um elemento de treliça. Chang, Park e Lee (2008), por sua vez, compararam seus elementos de cabo com elementos de viga do ABAQUS com rigidez a flexão baixa, bem como os resultados de ambos com um estudo experimental, observando melhor concordância dos primeiros com relação aos dados coletados. Contudo, comparações com elementos de treliça também não são feitas, nem são citados tempos computacionais, passos de integração ou resposta para diferentes discretizações.

Dessa forma, este trabalho visa preencher a lacuna entre o avanço no desenvolvimento de elementos de cabo baseados em complexas equações de catenária

elástica tridimensional com a avaliação objetiva da competitividade destes elementos em comparação com soluções mais simples e computacionalmente menos custos, especialmente no âmbito da análise de estruturas *offshore*, levando ainda em consideração efeitos não investigados, como o do passo de integração e da discretização.

## 2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção, apresenta-se a formulação matemática da resposta elástica, incluído as relações força-posição e as construções das matrizes de flexibilidade e rigidez, do elemento de catenária. Na sequência, apresenta-se o procedimento iterativo para a determinação da configuração estática inicial do mesmo. Por fim, apresentam-se as considerações feitas para a o cálculo do arrasto e das forças inerciais dentro do contexto de dinâmica em cenário *offshore*.

### 2.1 Equações de Catenária Elástica

Ainda que Salehi Ahmad Abad *et al.* (2013) tenham apresentado uma solução generalizada para os elementos de catenária tratados, solução essa implementada em Silveira, Ferreira e Lages (2017), este trabalho considera um formato mais simples da equação, como apresentado por Thai e Kim (2011). O motivo para essa escolha é que a simplicidade do elemento, especialmente na construção da matriz de flexibilidade, tem enorme impacto no contexto de dinâmica não linear, onde as relações força-posição precisam ser calculadas em cada passo de tempo da integração temporal, às vezes para passos de tempo muito pequenos. Mais ainda, considera-se que o efeito dominante na determinação da configuração geométrica do elemento seja o peso próprio, e que, portanto, o arrasto do fluido pode ser aproximado pontualmente, nos nós de integração dinâmico, sem muito prejuízo em comparação com uma consideração de seu efeito de maneira homogeneamente distribuída ao longo do elemento, mais ainda se levado em consideração que o mesmo é tratado de maneira largamente simplificada no contexto de análise.

Para esse formato, as equações de catenária elástica em 3 dimensões, para o elemento apresentado na Fig. 1, podem ser escritas como

$$l_i = -\frac{l_0 f_i}{EA} + \frac{f_1}{w} \ln \left( \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + (w_0 l_0 - f_3)^2 + w l_0 - f_3}}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - f_3}} \right), \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

e

$$l_3 = -\frac{l_0 f_3}{EA} - \frac{l_0^2 w_3}{2EA} + \frac{1}{w} \left( \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + (w l_0 - f_3)^2} - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \right) \quad (2)$$

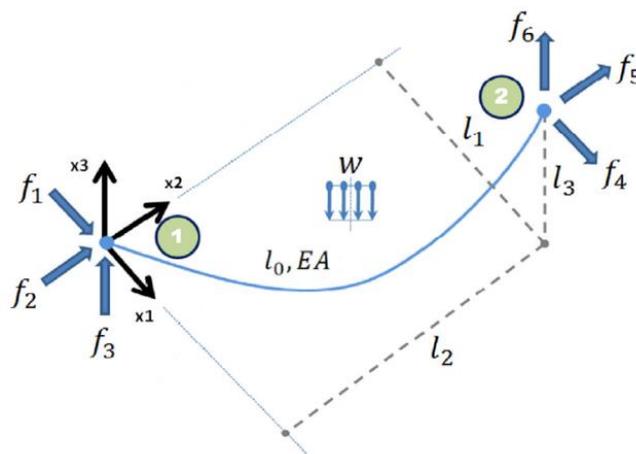
nas quais  $l$  são as posições do nó  $j$ , sendo o nó  $i$  considerado centrado na origem, com  $f$  sendo a força aplicada no mesmo decomposta nas 3 direções cartesianas;  $EA$  é a rigidez axial tradicional do cabo tratado, sendo  $l_0$  seu comprimento total e  $w$  seu peso por unidade de comprimento. Considerando que a tensão atuante no cabo pode ser calculada

em 1 como  $T_1 = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} = \sqrt{H^2 + f_3^2}$  e em 2 como  $T_2 = \sqrt{(-f_1)^2 + (-f_2)^2 + (-f_3 + l_0 w)^2} = \sqrt{H^2 + (-f_3 + l_0 w)^2}$ , nas quais  $H = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$  é componente horizontal da tensão, e considerando-se ainda que  $w l_0 - f_3 = f_6$ , sendo  $f_6$  a componente vertical da força no nó 2, tem-se que as equações apresentadas simplificam para

$$l_i = -\frac{l_0 f_i}{EA} + \frac{f_1}{w} \ln \left( \frac{T_2 + f_6}{T_1 - f_3} \right), \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

e

$$l_3 = -\frac{l_0 f_3}{EA} - \frac{l_0^2 w_3}{2EA} + \frac{1}{w} (T_2 - T_1) \quad (4)$$



**Figura 1. Elemento de catenária elástica em três dimensões (adaptada de Abad *et al.*, 2013)**

Mais ainda, para acelerar a implementação computacional, uma vez que algumas parcelas dessas equações se repetem tanto das relações força-posição como na matriz de flexibilidade que será apresentada em seguida, chega-se ao formato final

$$l_i = -\frac{f_i}{k} + f_i \cdot LN \quad (5)$$

e

$$l_3 = -\frac{f_3}{k} - \frac{W}{2k} + \frac{1}{w} (T_2 - T_1) \quad (6)$$

nas quais  $W = w l_0$  é o peso total do elemento,  $k = \frac{EA}{l_0}$  é a rigidez axial do mesmo e  $LN = \ln \left( \frac{T_2 + f_6}{T_1 - f_3} \right)$  é um termo que se repete algumas vezes.

Uma vez que tais relações força-posição são dadas em termos das forças como variáveis livres, sendo as posições as variáveis dependentes, e que a mesma é não linear e não facilmente invertível, é necessário definir um procedimento iterativo de solução para que se possa chegar nas forças desejadas dadas as projeções como variáveis prescritas. Esse procedimento parte da definição de uma matriz de flexibilidade tangente, que será apresentada na sequência, bem como sua inversa, uma matriz de rigidez tangente.

## 2.2 Matrix de Flexibilidade e de Rigidez Tangente

A matriz de flexibilidade tangente  $[F_t]$  pode ser obtida derivando-se as posições com relação às forças. Matematicamente,

$$[F_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial f_1} & \frac{\partial l_1}{\partial f_2} & \frac{\partial l_1}{\partial f_3} \\ \frac{\partial l_2}{\partial f_1} & \frac{\partial l_2}{\partial f_2} & \frac{\partial l_2}{\partial f_3} \\ \frac{\partial l_3}{\partial f_1} & \frac{\partial l_3}{\partial f_2} & \frac{\partial l_3}{\partial f_3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Tomando como partida as equações simplificadas apresentadas para as projeções, os componentes da matriz de flexibilidade, segundo Thai e Kim (2011), podem ser escritos como

$$F_{t_{11}} = -\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{w}LN\right) + \frac{f_1^2}{w} \left[ \frac{1}{T_1(T_1-f_3)} - \frac{1}{T_2(T_2+f_6)} \right] \quad (8)$$

$$F_{t_{12}} = F_{t_{21}} = \frac{f_1 f_2}{w} \left[ \frac{1}{T_1(T_1-f_3)} - \frac{1}{T_2(T_2+f_6)} \right] \quad (9)$$

$$F_{t_{13}} = F_{t_{31}} = \frac{f_1}{w} \left[ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right] \quad (10)$$

$$F_{t_{22}} = F_{t_{22}} = -\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{w}LN\right) + \frac{f_2^2}{w} \left[ \frac{1}{T_1(T_1-f_3)} - \frac{1}{T_2(T_2+f_6)} \right] \quad (11)$$

$$F_{t_{23}} = F_{t_{32}} = \frac{f_2}{w} \left[ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right] \quad (12)$$

$$F_{t_{33}} = -\left[ \frac{1}{k} + \frac{1}{w} \left( \frac{f_6}{T_2} - \frac{f_3}{T_1} \right) \right] \quad (13)$$

Simplificando ainda mais os termos repetidos, pode-se escrever

$$F_{t_{ii}} = B + C f_i^2, \quad i = 1,2 \quad (14)$$

$$F_{t_{12}} = C f_1 f_2 \quad (15)$$

$$F_{t_{1i}} = D f_i, \quad i = 2,3 \quad (16)$$

$$F_{t_{23}} = \frac{f_2}{w} \left[ \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right] \quad (17)$$

$$F_{t_{33}} = -\left[ \frac{1}{k} + \frac{1}{w} \left( \frac{f_6}{T_2} - \frac{f_3}{T_1} \right) \right] \quad (18)$$

nos quais  $B = -\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{w} \cdot LN\right)$ ,  $C = \frac{1}{w} \left[ \frac{1}{T_1(T_1-f_3)} - \frac{1}{T_2(T_2+f_6)} \right]$  e  $D = \frac{1}{w} \left[ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right]$  são coeficientes simplificados que abreviam termos repetidos.

Por fim, para o cálculo da matriz de rigidez tangente, tem-se que o determinante da matriz de flexibilidade pode ser escrito como

$$\det([F_t]) = F_1 F_2 F_3 - F_1 F_6^2 - F_2 F_5^2 - F_3 F_4^2 + 2F_4 F_5 F_6 \quad (19)$$

na qual se toma partido da simetria da matriz de flexibilidade, escrevendo-a como

$$[F_t] = \begin{bmatrix} F_1 & F_4 & F_5 \\ F_4 & F_2 & F_6 \\ F_5 & F_6 & F_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Nessa configuração, a matriz de rigidez tangente, também simétrica, pode ser escrita simplificada com

$$[K_t] = \begin{bmatrix} K_1 & K_4 & K_5 \\ K_4 & K_2 & K_6 \\ K_5 & K_6 & K_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

na qual os coeficientes, por sua vez, podem ser escritos como

$$K_1 = \frac{1}{\det(F)} (F_2 F_3 - F_6^2) \quad (22)$$

$$K_2 = \frac{1}{\det(F)} (F_1 F_3 - F_5^2) \quad (23)$$

$$K_3 = \frac{1}{\det(F)} (F_1 F_2 - F_4^2) \quad (24)$$

$$K_4 = \frac{1}{\det(F)} (F_5 F_6 - F_3 F_4) \quad (25)$$

$$K_5 = \frac{1}{\det(F)} (F_4 F_6 - F_2 F_5) \quad (26)$$

$$K_6 = \frac{1}{\det(F)} (F_4 F_5 - F_1 F_6) \quad (27)$$

### 2.3 Procedimento Iterativo de Solução e Atualização no Tempo

Para chegar à configuração de equilíbrio sendo prescritas as posições ao invés das forças, parte-se de um procedimento iterativo de Newton–Raphson. Inicia-se por estimar um valor para o vetor de forças iniciais,  $\{f\}_0$ . Na sequência, tal vetor é utilizado para determinar as projeções iniciais, bem como a matriz inicial de flexibilidade e sua inversa. Por fim, a diferença entre a configuração obtida e a prescrita é associada a um vetor de erro, que, multiplicado pela matriz de rigidez tangente, define um incremento de força que aproxima linearmente o necessário para atingir a configuração prescrita. Atualizando-se o vetor de força com esse incremento, pode-se iniciar o processo descrito novamente para a nova força encontrada. A cada iteração, portanto, obtém-se uma aproximação melhor das forças que geram a configuração prescrita. Matematicamente, tal procedimento pode ser expresso, partindo da atualização do vetor de forças, como

$$\{\Delta f\}_i = [K_t]_i \{ \{\bar{l}\} - \{l\}_i \} \quad (28)$$

$$\{f\}_{i+1} = \{f\}_i + \{\Delta f\}_i \quad (29)$$

$$\{l\}_{i+1} = g_1(\{f\}_{i+1}) \quad (30)$$

$$[F_t]_{i+1} = g_2(\{f\}_{i+1}) \quad (31)$$

$$[K_t]_{i+1} = ([F_t]_{i+1})^{-1} \quad (32)$$

nas quais  $\{\bar{l}\}$  é o vetor de posições prescritas e  $g_1$  e  $g_2$  são as funções anteriormente

discutidas, que correlacionam as forças com as projeções e a matriz de flexibilidade, respectivamente.

Equações para a estimativa do vetor de forças iniciais, bem como considerações acerca da convergência do método descrito, são apresentadas em Silveira, Ferreira e Lages (2017) e não serão tratadas aqui por questão de brevidade. Para a definição da configuração inicial de equilíbrio, esse procedimento é repetido até que a norma do vetor de erro seja menor que um erro mínimo permitido. No caso dinâmico, como os passos de integração adotados são pequenos, o procedimento é realizado apenas uma vez, e não iterativamente, sendo  $\{\bar{l}\}$  a posição prescrita no passo de tempo corrente e  $\{l\}_i$  a configuração obtida pelo algoritmo para o passo de tempo anterior. O subscrito  $i$ , portanto, tem conotação de iteração na definição da configuração de equilíbrio estático inicial, mas passa a ter conotação de passo de tempo no caso da análise dinâmica.

## 2.4 Integração Dinâmica

Para o tratamento da dinâmica, algumas considerações simplificadoras precisam ser feitas. A princípio, parte-se de um procedimento de *Lumped Mass*, no qual as massas dos elementos são “condensadas” nos nós de integração temporal nas suas extremidades, e, portanto, cada nó tem metade da massa de cada um dos dois elementos a eles conectados. Na sequência, a equação de movimento de cada nó é escrita como

$$m\ddot{x} = f_{res}(t) = f_{ext}(t) - f_{\eta}(t) - f_{int}(t) \quad (33)$$

na qual  $f_{res}(t)$  é a força resultante atuando no nó, proveniente da soma de forças gerais quaisquer, aqui destrinchadas e especificadas como externas, viscosas e internas (respectivamente  $f_{ext}(t)$ ,  $f_{\eta}(t)$  e  $f_{int}(t)$ ),  $m$  é a massa do nó e  $x$  sua posição, sendo  $\ddot{x}$  a sua segunda derivada no tempo, portanto aceleração. Na sequência, considera-se uma integração temporal numérica explícita, e, portanto,

$$ma^{j+1} = f_{res}^j = f_{res}^j(x^j, v^j, a^j) \quad (34)$$

ou seja: a aceleração ( $a$ ) no passo de tempo  $j + 1$  é calculada usando a força resultante do instante de tempo  $j$ , força essa definida com as posições ( $x$ ), velocidades ( $v$ ) e acelerações também do instante  $j$ , em um caso mais geral. Tal aceleração em  $j + 1$  é então usada para aproximar as velocidades e posições no instante  $j + 1$  por meio de equações que variam a depender do método. Uma vez definidas as novas velocidades e posições, resolve-se mais uma vez a equação com a nova força calculada, e assim sucessivamente. O nome 'explícito' vem do fato de que as informações no instante  $j + 1$  são obtidas explicitamente a partir das do instante  $j$ , ao contrário dos métodos implícitos, que necessitam de procedimentos iterativos para o avanço temporal. Dentro da vasta gama de algoritmos de integração explícitos existentes, utiliza-se o de Chung-Lee (Chung e Lee, 1994). Nele, o procedimento de solução é definido pelas aproximações

$$a^{j+1} = \frac{f_{res}^j}{m} = \frac{f_{res}^j(x^j, v^j, a^j)}{m} \quad (35)$$

$$v^{j+1} = v^j + \gamma_1 a^j + \gamma_2 a^{j+1} \quad (36)$$

$$x^{j+1} = x^j + \Delta v^j + \beta_1 a^j + \beta_2 a^{j+1} \quad (37)$$

nas quais  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são definidos, respectivamente, como

$$\beta_1 = \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \quad (38)$$

$$\beta_2 = \Delta t^2 \beta \quad (39)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} \Delta t \quad (40)$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{2} \Delta t \quad (41)$$

sendo  $\beta$  o único parâmetro livre do modelo, escolhido de maneira a aumentar a dissipação numérica de altas frequências sem perda de estabilidade. Para  $\beta = 1$ , tem-se aproximadamente o método das diferenças finitas, enquanto  $\beta = 28/27$  é um valor associado a boas dissipações numéricas (Silveira, 2001).

## 2.5 Iteração Fluido-Estrutura

Para completar a definição do problema dinâmico, resta explicitar a totalidade das forças que compõem o vetor  $f_{res}(x, v, a)$ . Enquanto a parcela de forças internas estáticas já foi determinada previamente no elemento de catenária elástica, a aproximação da resposta inercial e viscosa do fluido parte da equação de Morison (Morison, Johnson e Schaaf, 1950), que pode ser escrita, em sua versão original, como

$$f_a = \frac{1}{2} \rho C_d A v |v| + \rho C_m V \dot{v} \quad (42)$$

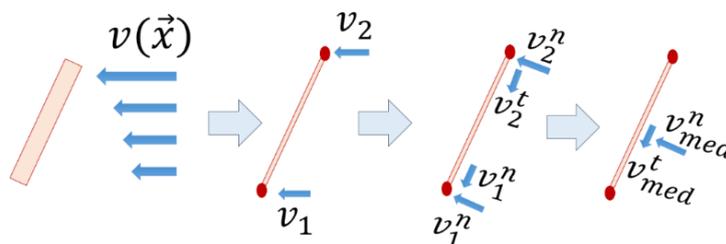
na qual  $\rho$  é a densidade do fluido (no caso a água na qual o sistema de ancoragem está embebido);  $C_d$  um coeficiente adimensional de arrasto, sendo  $A$  a área característica de arrasto;  $v$  a velocidade relativa entre o fluido e a linha, sendo  $\dot{v}$  a aceleração relativa;  $C_m$  um coeficiente adimensional de força inercial e  $V$  o volume de fluido deslocado. A primeira parcela da equação, portanto, representa forças de arrasto, enquanto a segunda são as forças inerciais do fluido sendo deslocado pela linha com aceleração não nula.

Contudo, essa expressão foi desenvolvida para um cilindro na direção vertical sob a ação de um fluido movendo-se perpendicularmente ao seu eixo, o que, de um modo geral, não retrata o comportamento de linhas de ancoragem sob efeito dinâmicos, para as quais, via de regra, o fluxo tem direção oblíqua com relação ao eixo da peça, que por sua vez é curvo. Para considerar tal efeito, utiliza-se a expressão para as forças de Morison tal como apresentada por Journee e Massie (2001) e Chakrabarti (2005). A equação, neste formato mais geral, fica escrita como

$$\{f_a\} = \frac{1}{2} \rho C_d^n A^n v^n |v^n| \{\hat{n}\} + \frac{1}{2} \rho C_d^t A^t v^t |v^t| \{\hat{t}\} + \rho C_m V \{\dot{v}\} \quad (43)$$

na qual o índice superior  $n$  representa componentes na direção normal ao eixo da peça, sendo  $\{\hat{n}\}$  seu vetor diretor, enquanto o índice  $t$  refere-se ao componente transversal, sendo  $\{\hat{t}\}$  o seu vetor diretor. Neste caso,  $\{\vec{v}\}$  e  $\{f_a\}$  passam a ser vetores tridimensionais, e não mais unidimensionais e perpendiculares ao eixo do cilindro, como antes.

Com essa equação, o procedimento de definição das forças de Morison pode ser ilustrado graficamente, para um caso 2D simplificado e um elemento reto, na Fig. 2. Nela, as etapas apresentadas indicam, respetivamente, a aproximação do perfil de velocidade relativa ao longo do elemento ( $v(\vec{x})$ ), que, em um caso geral, pode variar com o vetor posição ( $\vec{x}$ ), como sendo representada por seu valor nos dois nós extremos do elemento ( $v_1$  e  $v_2$ ), este considerado como reto. Na sequência, o vetor de velocidade relativa nodal é decomposto em suas parcelas normal ( $v^n$ ) e tangencial ( $v^t$ ) para cada nó. Por fim, faz-se uma média dos valores encontrados para os componentes, sendo estes os valores considerados representativos para o elemento, calculando-se assim a parcela de arrasto. A parcela inercial é calculada de maneira análoga, contudo usando-se o vetor de acelerações ao invés dos componentes do vetor de velocidades.



**Figura 2. Procedimento de cálculo das forças de Morison.**

É importante observar que essa aproximação, conforme descrita, considera o elemento como sendo reto, o que não corresponde exatamente com a natureza real do problema, no qual o elemento de cabo é dotado de curvatura interna. Contudo, o cálculo real do arrasto e da inércia do fluido é bastante complexo, mesmo para o caso de elementos retos, sendo a equação de Morison já bastante simplificada. Dessa forma, o tratamento do elemento como se fosse reto é uma aproximação rudimentar, mas necessária. Mais ainda, aproxima-se as áreas de arrasto como

$$A^n = |\vec{P}_2 - \vec{P}_1|D \quad (44)$$

$$A^t = |\vec{P}_2 - \vec{P}_1|\pi D \quad (45)$$

nas quais  $\vec{P}_2$  e  $\vec{P}_1$  representam a posição dos dois pontos extremos do elemento, sendo a norma da diferença entre eles a distância entre os mesmos, representando, portanto, uma aproximação linear da geometria curva.  $D$  é a dimensão característica de arrasto que, no caso de cilindros, corresponde ao diâmetro dos mesmos. Já o volume do elemento, levado

em consideração na parcela inercial da equação de Morison, pode ser calculado de maneira exata, ao menos para o regime de pequenas deformações considerado, segundo a equação

$$V = \pi D^2 L_0 \quad (46)$$

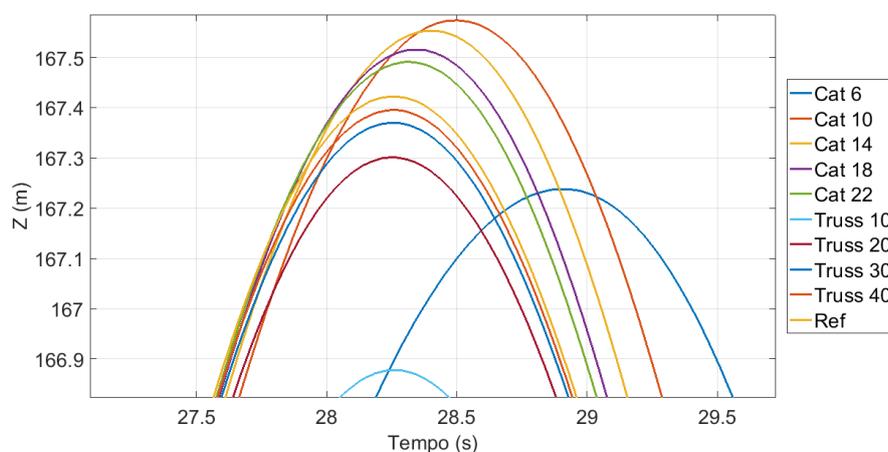
na qual  $L_0$  é o supracitado comprimento real indeformado do elemento. Essa equação define o volume de um cilindro simples. Uma observação importa é que, no caso de elementos de correntes, portanto contendo elos e não sendo cilindros perfeitos, o cálculo das áreas permanece inalterado, sendo os coeficientes  $C_m$  e  $C_D$  tabelados para este caso, assim como para cilindros.  $D$  passa a ser o diâmetro do elo neste caso.

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

A geração dos resultados numéricos baseia-se em um exemplo inspirado no artigo de Silveira, Lages e Ferreira (2012), porém ligeiramente modificado. Os elementos de catenária discutidos são implementados de maneira análoga a elementos clássicos de treliça e dentro da mesma base computacional com os mesmos *overheads*, de modo a fazer um comparativo justo entre os mesmos. Considera-se uma linha de ancoragem de 1050 m, densidade linear de 120 kg/m, rigidez axial de  $4,5 \cdot 10^8$  N e diâmetro característico de 0,1 m. A linha é fixada entre o solo marinho e a superfície, mais especificamente nos pontos (0, 400, 0) m e (800, 0, 500) m, e aplica-se uma prescrição sinusoidal de movimento de amplitude final 4,1 m e período de 8,6 s na segunda extremidade, enquanto a primeira é mantida fixa. Essa prescrição é feita gradualmente, com a amplitude crescendo linearmente do instante inicial até atingir seu valor máximo no tempo de 30 s, sendo este também o tempo total da simulação. Para o cálculo das forças de Morison, os coeficientes são  $C_d^t = 0,085$ ,  $C_d^n = 1,5$  e  $C_m = 2,0$  e a dimensão característica de arrasto é  $D = 0.1$  m. São analisadas linhas discretizadas por um total de 6, 10, 14 e 18 e 22 elementos de cabo, bem como 10, 20, 30 e 40 elementos de treliça. Cria-se ainda uma discretização de referência de 100 elementos de treliça, usada para as medidas de erro feitas.

Para os estudos comparativos, inicia-se por definir o incremento temporal de integração como  $\Delta t = (\lambda/n) \cdot 10^{-3}$  s, sendo  $n$  o número de elementos analisados e  $\lambda$  um fator escolhido para garantir convergência. Esse formato parte do princípio de que o passo de tempo crítico depende diretamente do comprimento do elemento, e portanto inversamente do número de elementos. Contudo, essa análise não é tão simples, especialmente no contexto de dinâmica não linear, e, também, objetiva-se entender a influência do tipo de elemento no passo crítico de integração, portanto o ajuste da equação com o fator  $\lambda$ , tomado como inteiro. Para a configuração de referência,  $\lambda$  foi considerado 1, um valor bastante pequeno, escolhido de forma a minimizar o erro. Para os elementos

que não o de referência, adota-se  $\lambda = 5$  como valor padronizado que garante convergência. A Figura 3 mostra a resposta das diferentes discretizações dos dois elementos em um instante de tempo ao redor do pico final de amplitude da simulação. Mostra-se uma fração do intervalo visto que a totalidade do mesmo dificulta a observação das diferenças pequenas entre as configurações. O eixo vertical apresenta a posição do ponto central das linhas discretizadas no direção vertical  $Z$ . A legenda *Cat* refere-se aos elementos de catenária, com *Truss* representando os de treliça, sendo o número subsequente à legenda o número de elementos associado ao mesmo.



**Figura 3. Posição do ponto central ao longo do tempo para as diversas discretizações**

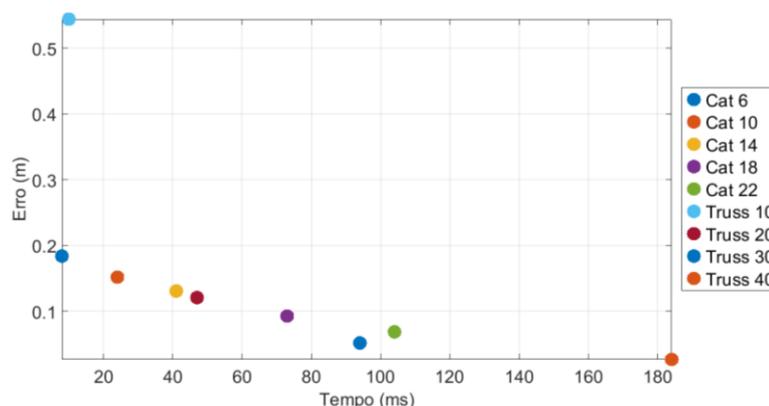
Observa-se que, a exceção da primeira discretização, que é bastante grosseira, os elementos de cabo tendem a se aproximar da configuração de referência superestimando os deslocamentos, uma propriedade desejável por uma questão de segurança da análise. A convergência dos elementos de treliça acontece de maneira a subestimar os deslocamentos máximos, o que pode ser perigoso. Mais ainda, a discretização de 10 elementos de treliça apresenta respostas bastante ruins, estando abaixo de todas as demais, erro agravado para malhas mais grossas testadas, mas não apresentadas. Para 20 elementos, a resposta de treliça melhora bastante, o que era esperado, visto que o mesmo necessita de malhas mais finas para se adaptar à geometria da linha tratada.

Na sequência, para implementar uma métrica mais objetiva do que comparações visuais, a diferença máxima, em módulo, entre as maiores amplitudes observadas é calculada de acordo com a equação

$$\text{Erro} = \left| \max \left( X_{mid}^i(j) \right) - \max \left( X_{mid}^{ref}(j) \right) \right| \quad (47)$$

na qual  $j$  é o conjunto de passos de tempo em análise e  $X_{mid}^i(j)$  é o vetor posição do ponto médio da linha no instante  $j$  associado à discretização  $i$ , sendo  $X_{mid}^{ref}(j)$  associado à

discretização de referência. Um gráfico que compara essa métrica de erro com o tempo computacional total de simulação, medido em milissegundos, é apresentado na Fig. 4.



**Figura 4. Erro máximo versus tempo computacional para todas as discretizações**

Mais uma vez, observa-se que a discretização de 10 elementos de treliça apresenta respostas bem piores que as demais, com os de cabo mostrando uma relação quase linear entre erro e tempo computacional para as discretizações de 6 a 18 elementos. Para discretizações maiores, começando pela de 22 elementos, outras das quais foram analisadas, mas não apresentadas, os tempos computacionais observados crescem muito rapidamente sem melhorias tão grandes na resposta de erro. Isso acontece porque poucos elementos são necessários para aproximar a resposta elástica da linha, mas os efeitos viscosos e inerciais são tão melhor representados quanto mais elementos são utilizados, independentemente da natureza. Mais ainda, mostra-se que a discretização de 30 elementos de treliça apresenta o segundo menor erro, mesmo tendo tempo computacional menor que a de 22 elementos de catenária.

Por fim, para melhor ilustrar o efeito do passo de integração na resposta de ambos os elementos, bem como testar a hipótese de que os elementos de cabo aceitam passos de tempo mais folgados por conta de suas rigidezes menores, o coeficiente  $\lambda$  é gradativamente aumentado até que as respostas dos elementos diverjam. Algumas discretizações são escolhidas entre a totalidade pra ilustrar o efeito. O maior valor que garantiu convergência foi de 9 para os elementos de catenária e 8 para os de treliça. Neste caso, a métrica de erro é apresentada na Fig. 5.

Mais uma vez, observa-se que a discretização de 20 elementos de treliça se mostra abaixo da curva feita pelas diferentes discretizações de cabo, tendo uma melhor relação entre erro e tempo computacional. Mesmo o coeficiente  $\lambda$  observado para os elementos de treliça tendo sido ligeiramente menor, e, portanto, os mesmos necessitando de menores passos de tempo, tal diferença não compensa o elevado custo computacional dos de cabo. Notadamente, para os mesmos valores de erro encontrados para 30 elementos de treliça,

o custo computacional dos de cabo é significativamente maior e não foi apresentado para melhorar o enquadramento do gráfico. Considera-se o uso de elementos de catenária em detrimento dos de treliça, a menos no contexto *offshore*, como válido apenas para discretizações bastante pequenas. Diferenças grandes como as observadas por outros autores, que compararam o desempenho dos elementos de catenária com outros de natureza diversa, não se repete para comparações com treliça, ao menos para problemas de linhas de ancoragem.

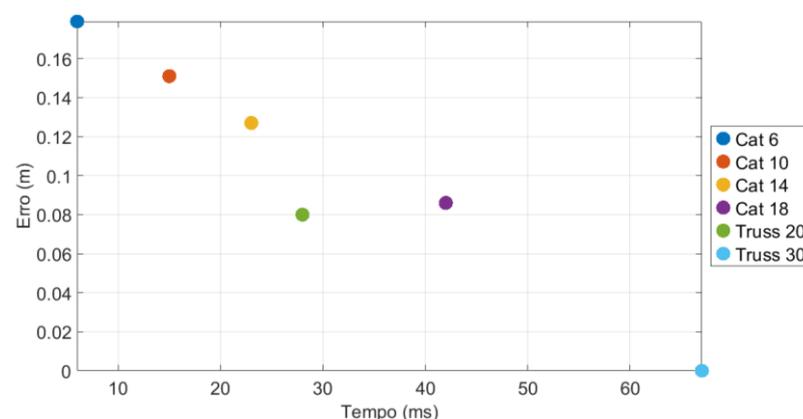


Figura 5. Erro máximo *versus* tempo computacional para algumas discretizações selecionadas

## 4 CONCLUSÃO

Mostrou-se a implementação computacional e o estudo do desempenho de um elemento de cabo baseado em equações de catenária elástica tridimensional. Testes realizados comparando-se os mesmos com elementos clássicos de treliça, ao menos para o caso de estudo de um sistema de ancoragem *offshore*, não observaram os mesmos ganhos computacionais que os demonstrados por outros autores, que compararam seus elementos com outros diversos. Resultados melhores são observados apenas para pequenas discretizações.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e à PETROBRAS pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

Abad, M.S.A., Shooshtari, A., Esmaili, V., Riabi, A. N. 2013. Nonlinear analysis of cable structures under general loadings. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 73, p. 11-19.



- Ali, H.M., Abdel-Ghaffarf, A.M. 1995. Cable-stayed bridges with passive control bearings. *Computers and Structures*, v. 54, p. 461-492.
- Chakrabarti, S.K. 2005. *Handbook of Offshore Engineering*. 1. ed. Elsevier, v. 1.
- Chang, S.P.; Park, J.I., Lee, K.C. 2008. Nonlinear dynamic analysis of spatially suspended elastic catenary cable with finite element method. *KSCE Journal of Civil Engineering*, v. 12, n. 2, p. 121-128.
- Chung, J., Lee, J.M. 1994. A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(23), 3961-3976.
- Irvine, H. M. 1981. *Cable Structures*. The MIT Press.
- Journee, J., Massie, W. 2001. *Offshore Hydromechanics*. Delft University of Technology.
- Karoumi, R. 1999. Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges. *Computers and Structures*, v. 71, p. 397-412.
- Morison, J. R., Johson, J., Schaaf, S. 1950. The force exerted by surface waves on piles. *Journal of Petroleum Technology*, v. 2, n. 5, pp. 149-154.
- O'Brien, W. Francis, A. 1964. Cable movements under two-dimensional loads. *Journal of the Structural Division*, ASCE 90(3), 89-123.
- Ozdemir, H.A. 1979. Finite element approach for cable problems. *The International Journal of Solids and Structures*, v. 15, p. 427-437.
- Silveira, E.S.S. 2001. *Análise Dinâmica de Linhas de Ancoragem com Adaptação no Tempo e Subciclagem*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Silveira, P.H.R., Ferreira, F.M.G., Lages, E.N. 2017. Desenvolvimento de um elemento de cabo para a análise dinâmica de linhas de ancoragem. *Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Florianópolis, SC, Brasil.
- Silveira, E.S.S., Lages, E.N.; Ferreira, F.M.G. 2012. DOOLINES: an object-oriented framework for non-linear static and dynamic analyses of offshore lines. *Engineering with Computers*, v. 28, n. 2, p. 149-159.
- Thai, H.T., Kim, S.E. 2011. Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, p. 237-246.