FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS: UMA PROPOSTA LÚDICA DOS ALUNOS DO PIBID PARA OS ALUNOS DO 3° ANO DO ENSINO MÉDIO

Josefa Ivanise Barbosa da Silva[1]

Anderson Elias da Silva[2]

Gilvaneide Nascimento Silva[3]

Resumo

O trabalho proposto vem com o intuito de reforçar e tirar dúvidas de uma forma mais dinâmica e divertida, associando o jogo à função exponencial e logarítmica. Escolhemos um jogo por ser mais atrativo e competitivo, então haverá uma maior aceitação a aprender para vencer.Começamos com uma revisão dessas funções e posteriormente dividimos a turma em dois grupos: O exponencial e o logaritmo. Foi apresentado dificuldades em relação aos logaritmos, mas com a aplicação desse jogo algumas dificuldades foram supridas, pois os alunos não haviam estudado função logarítmica no 1° ano do ensino médio.

Palavras Chave: Lúdico; exponencial; logaritmo.

INTRODUÇÃO

Um dos problemas recorrentes no ensino de matemática no Brasil é o professor não saber relacionar os conteúdos matemáticos com a realidade social dos alunos, realmente não é uma tarefa muito simples, é necessário que haja uma pesquisa e dedicação por parte do professor para que suas aulas sejam dinâmicas e interessantes para os aprendizes.

É nesse intuito que a utilização dos jogos em sala de aula trás um bom aproveitamento escolar, além de despertar a curiosidade, a investigação e o raciocínio lógico, tornando as aulas de matemática dinâmicas e prazerosas.

De acordo com (BRASIL, 2006, p.28), e conforme citado por Silva (2013, p.23), “Utilizar jogos como instrumento pedagógico, não se restringe a trabalhar com jogos prontos, nos quais as regras e os procedimentos já estão determinados; mas, principalmente, estimular a criação, pelos alunos, de jogos relacionados com os temas discutidos no contexto da sala de aula’’.

---

[1]Aluna de Graduação de Licenciatura em Matemática da UPE- Campus Mata Norte. Email: gatyiva_barbosa@live.com
[2]Aluno de Graduação de Licenciatura em Matemática da UPE- Campus Mata Norte. Email: andersonn13.elias@gmail.com
[3]PIBID, Mestre, Professor assistente da UPE- Campus Mata Norte. Email: gilvaneide.silva@upe.br

Não existe uma ‘’fórmula pronta’’ do jogo para o educador dar em sala de aula, faz-se necessário uma busca constante sobre qual jogo poderá ser usado em determinada aula, se as regras vão estar condizentes com o esperado e se os objetivos serão alcançados, muitas vezes pode-se relacionar a matemática com outras áreas do conhecimento, para que se estabeleça a interdisciplinaridade.

> O crescimento de estudos cognitivos, especialmente a partir dos anos 60, estimula as pesquisas sobre o jogo infantil, trazendo novos parceiros provenientes de áreas como Antropologia, Sociologia, Lingüística e História gerando estudos interdisciplinares. (Kishimoto, 1994, p. IX)

Para Trifu (1986), citado por Kishimoto (1994, p.11), o jogo é uma realidade que se metamorfoseia conforme a realidade e a perspectiva do observador e do jogador. Por essas razões faz-se necessário modelar o jogo no contexto social dos estudantes e na perspectiva do docente.

Mas o professor deve ter muito cuidado quando for trabalhar jogos em sala de aula, pois muitas vezes os alunos se sentem obrigados a jogar e pode gerar também um conflito entre quem ganha e perde. Por esse motivo é importante perguntar aos alunos no final quais são as estratégias que eles utilizaram e quais conhecimentos que eles adquiriram depois de jogarem.

As vantagens de utilizar os jogos em sala de aula são diversas. Favorece a concentração para realizar os cálculos que posteriormente serão facilmente memorizados pelos alunos; aperfeiçoa o domínio cada vez maior do jogo; e ajuda a ter uma interação social para os alunos que são considerados tímidos.

Como também existem os jogos estratégicos que são trabalhados o raciocínio lógico dos alunos, no qual irão ler as regras e buscar estratégias para atingirem o objetivo final. E os jogos de treinamento,pelos quais são utilizados quando o professor percebe que determinado assunto precisa ser reforçado. E por fim os jogos geométricos que são desenvolvidos através da observação e do pensamento lógico dos alunos.

O Subprojeto/ Matemática do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) surgiu, então, com o intuito de buscar alguns problemas na aprendizagem dos alunos e fazer uma intervenção desses problemas com projetos que busca melhorar o ensino-aprendizagem. Constatou-se que um desses problemas é o déficit na aprendizagem recorrente do 1° ano do Ensino Médio sobre funções exponencial e logarítmica dos alunos do 3° ano do Ensino Médio do EREM Joaquim Olavo localizado no Município de Carpina. Diante disso, foi proposto um jogo que servisse para preencher as lacunas dessas dificuldades. Esse irá auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem sobre função exponencial e logarítmica, visto que os alunos não viram esse assunto no 1° ano do Ensino Médio.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

David Paul Ausubel (1918 – 2018) propôs o conceito de aprendizagem significativa. Ele dizia que a aprendizagem ocorre quando se ensina a partir do que o aluno já sabe, onde indagou a estratégia dos organizadores prévios. Esses são materiais introdutórios a serem aplicados ao alunado para manipular sua estrutura cognitiva antes do material central. Servem como ancoragem para uma nova aprendizagem. Ausubel *et al* (1980), citado por Jesus e Silva, afirma:

> A principal função do organizador está em preencher o hiato entre aquilo que o aprendiz já conhece e o que precisa conhecer antes de poder aprender significativamente a tarefa com que se defronta. (Ausubel et al, 1980, p. 144).

Outro conceito importante na aprendizagem significativa de Ausubel é o subsunçor a qual diz ser um conceito que já existe na estrutura cognitiva que serve como ponto de ancoragem em conceitos já existentes na estrutura cognitiva para uma nova informação. Contudo, se os alunos não estão interessados a aprender, a aprendizagem significativa não acontece.

Dessa maneira foi embasado as aplicações dessa pesquisa com a perspectiva da aprendizagem significativa para uma prática dos conhecimentos vivenciados pelos estudantes no decorrer dos anos finais do ensino fundamental da educação básica relacionando a potenciação e suas propriedades para estabelecer uma ponte cognitiva com a absorção de novas informações, através da função exponencial e logarítmicas que seriam consolidadas ao longo do processo de ensino-aprendizagem no âmbito escolar.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função exponencial caracteriza-se por ser uma função que cresce e decresce rapidamente, sendo assim muito utilizada na Matemática, principalmente na Matemática Financeira para determinar os cálculos em juros compostos, e outras áreas tais como: na Biologia está ligada ao crescimento de plantas e ao desenvolvimento de bactérias em cultura; na Geografia está relacionada ao crescimento populacional; na Química ao decaimento radioativo (Carbono 14).

Uma lenda sobre o surgimento da função exponencial é a seguinte:

> Conta a lenda que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem umnovo jogo, a fim de diminuir o seu tédio. O melhor jogo teria direito a realizarqualquer desejo. Um dos seus súditos inventou, então, o jogo de xadrez. ORei ficou maravilhado com o jogo e viu-se obrigado a cumprir a suapromessa. Chamou, então, o inventor do jogo e disse que ele poderia pediro que desejasse. O astuto inventor pediu então que as 64 casas dotabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro,seguindo a seguinte condição: na primeira casa seria colocada uma moedae em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia nacasa anterior. O Rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenouque providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando ostesoureiros do reino lhe apresentaram a suposta conta, pois apenas naúltima casa o total de moedas era de 263, o que corresponde aaproximadamente 9 223 300 000 000 000 000 = 9,2233.1018. Não se podeesquecer ainda que o valor entregue ao inventor seria a soma de todas asmoedas contidas em todas as casas. O rei estava falido![4]

[4]Disponível em: http://matecprofchris.blogspot.com/2010/03/historia-sobre-funcao-exponencial.html?m=1 Acesso em: Nov. 2019

Essa lenda é um problema mais popular quando se trata de função exponencial. O problema do número de moedas é uma progressão geométrica {1,2,4,8,16,32,64}. Para se chegar ao resultado dessa soma utilizaremos a fórmula: $S = 2^{64} - 1$, obtendo assim o resultado: 18.446.744.073.709.551.615, deixando o rei falido.

Atualmente, entende-se por função uma regra que associa para cada valor de x a um valor f(x). Chamando-se de x o domínio da função e f(x) ou y a imagem. Uma função exponencial terá como característica principal a variável no expoente: $f(x) = a^x$, sendo$a$base uma constante, ou seja, um número real.

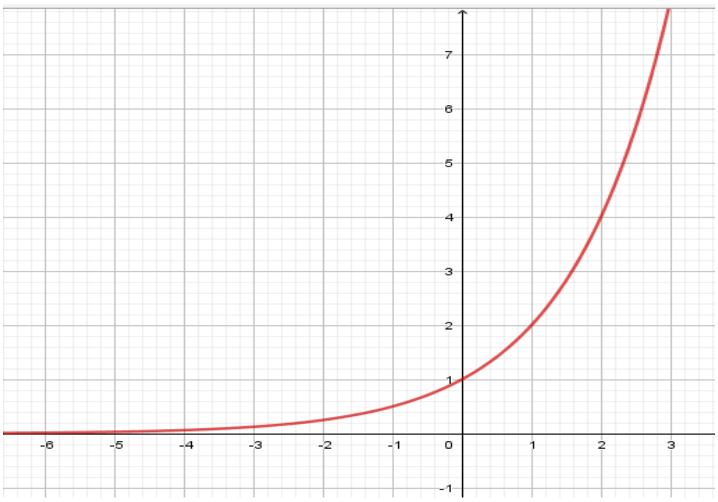
Definição: Dado um número real a (com $a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial debase a, uma função f de R em R^*_+ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$. Dadas as restrições $a > 0$ e $a \neq 1$, pois a sendo negativo a função não estaria bem definida para quando x for algum número racional, por exemplo, $x = \frac{1}{2}$ e $a = -1$; e a sendo 1 a função seria constante.

GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Construir gráficos é de suma importância para observarmos determinados comportamentos que acontecem em situações do dia-a-dia do alunado e também de fenômenos de outras disciplinas e da própria Matemática.

O gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ tem comportamento:

- Crescente: Quando $a > 1$, se o valor de x aumenta o valor de y também vai aumentar, entãotemos para $f(x) = 2^x$:



Fonte: Geogebra

- Decrescente: Quando $0 < a < 1$, à medida que x aumenta, o valor de y diminui. Vejamos para $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

Fonte: Geogebra

Percebe-se, então, que para qualquer gráfico exponencial a curva está toda acima do eixo x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in R$ e corta o eixo y em 1, pois quando se tem $x = 0$ para qualquer número na base se tem o número 1.

Uma função muito importante é aquela cuja base é **e** (Funções de base neperiana) são muito utilizadas em diversas áreas, tais como na Matemática Aplicada para modelar situações de crescimento e decrescimento contínuo; na Demografia são utilizadas para calcular o tamanho de populações; na Psicologia para estudar problemas de aprendizagem; na indústria para estimar a confiabilidade de certos produtos; em finanças calcular juros, prestações e montantes, entre outros exemplos.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA, A INVERSA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Os logaritmos surgiram a partir de necessidades do homem nas navegações e astronomia devido ao surgimento de cálculos muito complexos na época facilitando, assim, os cálculos. John Napier (1550-1617) é considerado o inventor dos logaritmos que não era matemático, mas tinha um grande interesse em simplificar os cálculos. Com isso, criou um método chamado Método de Napier, mostrado na tabela a seguir:

5+9=14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

16x512 = 16384

Fonte: InfoEscola

Os números da primeira linha são os expoentes e a segunda linha contém as potências de 2 correspondentes a esses expoentes. Na tabela faz-se a seguinte operação: $2^5 \times 2^9 = 2^{14}$ (em azul), o resultado de $2^5 = 32$ e $2^9 = 512$ e como multiplicando a base soma-se os expoentes, então multiplicou-se o 32 por 512 e deu resultado 16384.

São utilizados em diversas áreas, tais como: Na Computação para representar dígitos de informação (bits); na Geologia para medir a amplitude de um abalo sísmico; Na física, uma das aplicações está na escala de decibéis que mede a intensidade de sons suportáveis pelo ouvido humano; na Química é utilizado para medir o pH(Potencial Hidrogeniônico) de uma solução.

Os logaritmos devem ser um dos assuntos mais artificiais e mecanizados no Ensino Médio, por serem tratados de forma repetitiva, esquecendo-se de sua principal ideia de que ‘’o logaritmo é o expoente em uma exponenciação’’ (Aguiar, 2015, p. 35).

Definição: O logaritmo de um número b, na base a, onde a e b são positivos e a é diferente de um, é um número x, tal que x é o expoente de a para se obter b, então: $\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$, sendo $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, b é chamado de logaritmando, a é chamado de base e x é o logaritmo.

Os logaritmos naturais (na base e) são representados por $\ln a = \log_e a$ no qual serão utilizados para calcular o crescimento populacional, desintegração radioativa, na Matemática Financeira, entre outros.

Propriedades decorrentes da definição:

1. $\log_a a^m = m$, $a > 0$ e $a \neq 1$;
2. $\log_a 1 = 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$;
3. $a^{\log_a b} = b$, sendo $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Propriedades operatórias dos logaritmos:

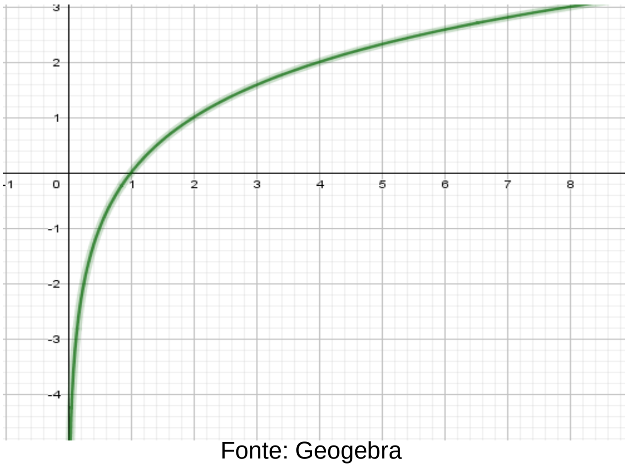
a) Logaritmo do produto: $\log_a(m.n) = \log_a m + \log_a n$, sendo $m > 0$, $n > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$;
b) Logaritmos do quociente: $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$, sendo $m > 0$, $n > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$;
c) Logaritmo de potência: $\log_a m^p = p.\log_a m$, sendo $p \in R$, $m > 0$, $n > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$;
d) Mudança de base: $\log_n m = \frac{\log_a m}{\log_a n}$, sendo $m > 0$, $n > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

O gráfico da função logarítmica serve para reconhecer grandezas físicas que se faz uso dos logaritmos, como por exemplo, a força de um terremoto, a intensidade do som, desintegração de uma substância radioativa, entre outros.

O gráfico da função $f(x) = \log_a x$ tem dois comportamentos:

- Crescente: Quando $a > 1$, à medida que x cresce y também vai crescer, por exemplo, $f(x) = \log_2 x$:



Fonte: Geogebra

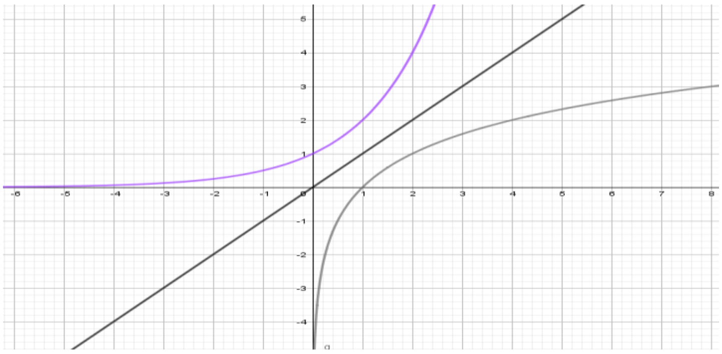
- Decrescente: Quando 0 < a < 1, quando x cresce, y diminui. Vejamos para g(x) = $\log_{\frac{1}{2}} x$:

Fonte: Geogebra

Em geral, o gráfico está sempre todo do lado do eixo y (x > 0); corta do eixo x no ponto de abscissa 1; a função logarítmica cresce muito lentamente ao contrário da função exponencial que cresce muito rapidamente.

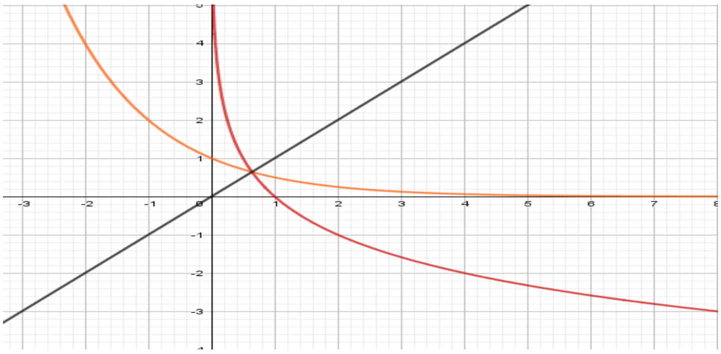
Relação do gráfico da exponencial e da logarítmica: É simétrico em relação à reta y = x (bissetriz dos quadrantes ímpares), em preto, ao gráfico da função exponencial.

Para a> 1, sendo f(x) = 2^x(em lilás) e g(x)= $\log_2$x (cinza) temos:



Fonte: Geogebra

Para 0 < a < 1, sendo h(x) = $log_{\frac{1}{2}}x$ (laranja) e t(x) = $(\frac{1}{2})^x$ (vermelho), temos:



Fonte: Geogebra

O JOGO DAS CARTAS

Antes de trabalharmos o jogo em sala de aula foi revisada a função exponencial e logarítmica, bem como suas propriedades. Os alunos relembraram muito bem a questão sobre as propriedades da exponencial, mas quando chegou ao logaritmo sentiram dificuldades, pois o professor do 1° ano do Ensino Médio não havia ensinado o assunto. Com isso, eles ficaram questionando muito e indignados por não terem visto. É frustrante quando não se dá o assunto no período certo e acabam posteriormente os alunos sendo prejudicados.

O jogo é da seguinte maneira:

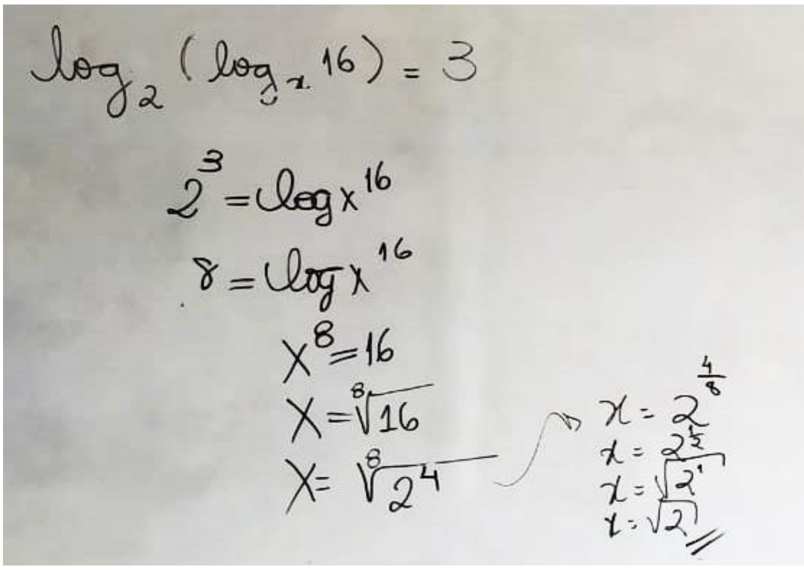
Separamos a turma em dois grandes grupos. Chama-se: A exponencial e o logaritmo. Espalha na mesa do professor questões de vestibulares sobre propriedades e equações de exponencial e logaritmo. O grupo tem a chance de pedir três dicas para responder as questões. Respondem-se as questões no quadro para que todos possam discutir a resolução de cada uma e assim tirar dúvidas. No final uma pessoa do grupo apresenta a resolução da questão para a turma e no fim pontua-se jogando o dado uma vez, caso o grupo da exponencial pegue uma questão que seja de logaritmo e acerte, irá jogar o dado duas vezes.

O jogo foi procedido da seguinte forma:

Separamos dois grupos: A exponencial e o logaritmo, com 15 pessoas cada um.Cada grupo escolheu uma pessoa para ‘’tirar ímpar ou par’’ para ver quem começava, começou assim com o grupo da exponencial. A exponencial retirou uma questão de logaritmo, no inicio sentiram dificuldades em resolver, apesar de ter sido uma questão que se resolvia pela definição de logaritmo, mas depois de duas dicas eles conseguiram. A questão foi a seguinte:

Resolver a equação $log_2 (log_x 16) = 3$.

A questão além da definição de logaritmo envolveu também de um número ser elevado a uma fração em como transformar numa raiz. Essa parte eles disseram que nunca viram. Mas obtiveram como resultado a seguinte solução:

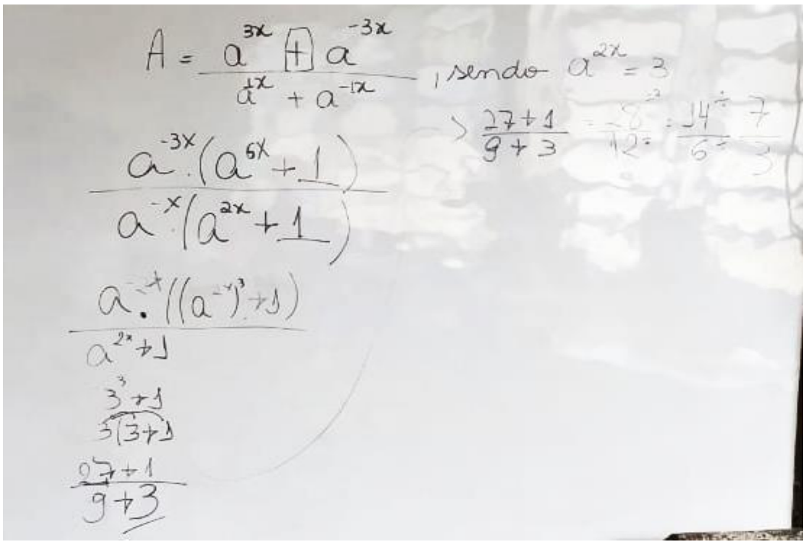


Ao mesmo tempo o grupo do logaritmo retirou uma questão da exponencial, sentiram bastantes dificuldades também, mas depois da segunda dica eles conseguiram resolver. Essa questão envolveu além das propriedades da exponencial como o número poderá ser colocado em evidência. A questão foi a seguinte:

Calcular o valor da expressão

$A = \frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}$, sendo $a^{2x} = 3$.

Obtendo como solução:



Algumas questões que fizemos nas cartas:

Resolvendo o sistema de equações e multiplicando os valores de x e de y que satisfazem o sistema, teremos m = xy. Qual será o valor de m? $\begin{cases} 2^x.125^y = \frac{1}{25} \\ 9^x.27^{2y} = 3 \end{cases}$	Se $3^{x^2-3x} = \frac{1}{9}$, então os valores de x são
Para verificar se a igualdade $2\sqrt{4^{2x^2+3}} = 256$, x deve valer?	Qual é a solução de $2^{\frac{48}{x}} = 2$?
O conjunto solução da equação $\sqrt{3^x.\sqrt{3^{2x}}} = \frac{1}{27}$ está contido em: a) $]-\infty, -5[$ d) [-1, 10[b) [-5, -3[e) $[10, +\infty[$ c) [-3, -1[	Se $(0,1)^{x-5}$=10, então qual será o valor de x?
O valor de $log_{\frac{1}{5}}(\log_5 125)$ é :	Se b = $\sqrt{3}$, c = 0,04 e d = 2, a expressão $\log_b 9 + \log_c 125 + \log_d \sqrt{32}$ vale :

A aplicação do jogo das cartas obteve uma sondagem diferenciada em sala de aula, no qual gerou dúvidas e incertezas durante a resolução das cartas, possibilitando a participação dos estudantes e uma revisão fundada no conteúdo a ser aplicado durante a sequência didática.

Realização do momento da revisão:

Execução da aplicação do jogo das cartas:

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fundamentando-se a pesquisa em volta de uma aprendizagem significativa,obteve-se a estrutura para manusear conteúdos que haviam sido visualizados pelos estudantes durante os anos finais do ensino fundamental,com a inserção da base e dos conhecimentos prévios pré-estabelecidos a partir de uma revisão pautada nas funções exponenciais e logarítmicas que geram um índice elevado de dificuldades pela ausência de significados atribuídos ao conteúdo científico-específico em classe.

Com a aplicação desse jogo foram percebidas as dificuldades dos alunos nas questões sobre colocar em evidência; na transformação de um número fracionário que está no expoente em um número na forma de raiz; na transformação de um número fracionária em forma de decimal; em produtos notáveis.

É exatamente isso que Ausubel propôs: Ensinar aos alunos a partir do que ele já conhece. Com isso essas dificuldades foram encontradas e suprimidas ao longo da resolução das questões discutidas em grupo. Foi um jogo bastante proveitoso na qual prendeu a atenção dos alunos que gostam muito de um desafio e competitividade. Á medida que buscam vencer o jogo acabam se permitindo entender mais sobre o assunto proposto, a aprendizagem vem de uma maneira lúdica, pois põem em prática o que foi revisado por meio do jogo.

Portanto é fundamental que seja estimulado a ludicidade e interatividade aos estudantes como forma motivacional para que transformem um conteúdo que eles consideram um código de difícil acesso em uma margem de possibilidades que podem aguçados para dúvidas, pesquisas, interdisciplinaridade e desafios a serem alcançados ao longo da construção do processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

SILVA, D. L. **Jogos Matemáticos nas Aulas do Ensino Médio: Um Estudo dos Trabalhos Publicados no ENEM**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2013. [Orientador: Prof. Ms. Fabiane Guimarães Vieira Marcondes]. Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/7465/mod_resource/content/0/TCC_David.pdf. Acesso em: 18 de out. 2019.

PROFª MÁRCIA AMPLATZ. Foz Bartolomeu Mitre. **Jogos de tabuleiro na aprendizagem matemática**. Disponível em: http://www.fozbartolomeumitre.seed.pr.gov.br/redeescola/escolas/11/830/82/arquivos/File/Matematica/Prof-Marcia-Amplatz.pdf. Acesso em: 18 de out. 2019.

KISHIMOTO, Tizuko M. **O Jogo e a Educação Infantil.** Cengage Learning. São Paulo. 1994.

AGUIAR, Ricardo J. **Contexto e Aplicações das Funções Exponenciais no Ensino Médio:** Uma Abordagem Interdisciplinar.2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciênciase Tecnologia da Universidade Estadual do Norte

Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Gytacazes-RJ, 2015. [Orientador: Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre]. Disponível em:http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wpcontent/uploads/sites/14/2017/09/18092015Ricardo-Jose-Aguiar-Silva.pdf. Acesso em: 18 de out. 2019.

VIVEIRO, Tânia; Corrêa, Marlene. **Minimanual Compacto de Matemática:** Teoria e Prática, Ensino Médio.Rideel.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI, Bonjorno. **Matemática Atividades.** FTD S.A. 1990.

GRANERO, Chaiene Alarcon Mendes. **Função Logarítmica e Exponencial:** Aplicação à Matemática Financeira. 2016. Monografia- Universidade Federal de São João del-Rei.

JESUS, Marcos Antonio Santos; SILVA, Romeu Carlos Oliveira. **A Teoria David Ausubel:** O uso dos organizadores prévios no ensino contextualizado de funções.

OSTERMANN, Feranda; CAVALCANTI, Cláudio José de Holanda. **Teorias de Aprendizagem.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de Aprendizagem.** 2. Ed. São Paulo: Pegagógica e Universitária LTDA, 2011.