**SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO E O GEOGEBRA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL**

Maria Graciene Moreira dos Santos [[1]](#footnote-1)

Monaliza de Azevedo Silva [[2]](#footnote-2)

 Francisco Régis Vieira Alves[[3]](#footnote-3)

**RESUMO**

Dadas as dificuldades dos estudantes na compreensão de figuras tridimensionais quando esboçadas no plano bidimensional em sala de aula, como o quadro ou lousa branca, vimos a necessidade de propor este estudo. O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta didática para a introdução do ensino de sólidos de revolução com o aporte do software GeoGebra, norteada pelas dialéticas da Teoria das Situações Didáticas. Para tal, adotamos a metodologia Engenharia Didática em suas duas primeiras fases – análises preliminares e análise a priori - dado o fato de que este é um trabalho em andamento. Como resultados trazemos uma construção que pode ser utilizada pelo professor para explorar conceitos geométricos de área e da visualização da passagem de figuras 2D para 3D, estimulando a visualização geométrica do estudante por meio da manipulação de comandos no GeoGebra. Como perspectivas futuras, almejamos desenvolver esta construção em sala de aula e continuas as duas fases posteriores da Engenharia Didática, com coleta de dados empíricos.

**Palavras-chave:** Visualização Geométrica. Ensino de Matemática. GeoGebra.

**INTRODUÇÃO**

O ensino de Geometria, especialmente da Geometria Espacial, tem sido desafiador para os professores, sobretudo do Ensino Médio. Tais dificuldades, por vezes, dizem respeito à estratégia metodológica e a consequente apreensão de conceitos geométricos pelos alunos. Nobre (1996) explica que nem sempre o docente é consciente de que o conhecimento por trás do conteúdo a ser ensinado, que aparece sistematizado nos livros, passou por modificações e aprimoramentos ao longo da história da Matemática, que por sua vez traz a fundamentação teórica e as respostas para muitos porquês que permeiam os pensamentos dos estudantes.

Partindo deste ponto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento norteador para as diretrizes curriculares na Educação Básica, traz, acerca do ensino de Geometria para o Ensino Médio a necessidade de o aluno aprender assuntos como: a localização de números em retas, de figuras ou configurações no plano cartesiano e no espaço tridimensional, direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas), bem como sua aplicação em situações-problema (BRASIL, 2018).

Os autores Oliveira e Leivas (2017) trazem que a Geometria, por sua natureza visual, tem potencial para desenvolver a percepção e autonomia do pensamento e do raciocínio do aluno, podendo desvincular-se de estruturas e fórmulas prontas. Os temas tratados em Geometria na Educação Básica reforçam a demanda de busca por metodologias de ensino que alcancem uma aprendizagem efetiva do aluno.

Sobre a relação entre Geometria e Tecnologia, a BNCC aponta a relevância de sua associação para o estudo e desenvolvimento do aluno, através de atividades investigativas com o uso de *softwares* dinâmicos que inter-relacionem conhecimentos geométricos e a realidade, trazendo como proposta a resolução de problemas (BRASIL, 2018).

Visando colaborar com o ensino de Geometria Espacial, o objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta didática para a introdução do ensino de sólidos de revolução com o aporte do *software* GeoGebra, norteada pelas dialéticas da Teoria das Situações Didáticas.

         O GeoGebra foi escolhido por ser um *software* livre e de fácil usabilidade, repleto de recursos com potencial para explorar a cognição do estudante. Além disso, Abar (2020) afirma que os recursos viabilizadas pelo GeoGebra podem oferecer um suporte às estratégias metodológicas do docente, modernizando o saber escolar. Já a Teoria das Situações Didáticas foi selecionada dado o fato de que esta possibilita ao aluno ser protagonista na construção de seu próprio conhecimento (BROUSSEAU, 2008).

 A metodologia para estruturar este trabalho é a Engenharia Didática (ED) em suas duas primeiras fases – análises preliminares e análise *a priori* – dado o fato de que este trabalho é uma proposta didática em construção, com vistas a uma aplicação futura.

 Deste modo nas seções seguintes trazemos a análise preliminar da ED, apontando algumas das dificuldades em Geometria Espacial dos estudantes e características intrínsecas a este assunto e sua relação com a BNCC. Em seguida, na análise *a priori*, apresentamos uma proposta didática para o aporte do ensino de sólidos de revolução com uso do GeoGebra, norteada pelos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas, seguido das considerações dos autores.

**METODOLOGIA**

A metodologia escolhida para estruturar este trabalho foi a Engenharia Didática (ED). Segundo Artigue (1996), a ED configura-se em um esquema experimental, que se norteia em realizações didáticas em sala de aula, referentes a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino. Contudo, por ser um trabalho em andamento, utilizamos apenas as duas primeiras fases da ED – análises preliminares e análise *a priori*.

As análises preliminares, segundo Almouloud e Silva (2012), é a etapa em que ocorre um levantamento bibliográfico acerca do quadro teórico-didático de moto geral acerca do objeto matemático a ser trabalhado. Também é realizada uma análise epistemológica do ensino deste assunto, a concepção dos estudantes, suas dificuldades e uma análise do campo das restrições e exigências em que a realização da sequência/situação didática será, de fato, efetivada.

No caso deste trabalho, para as análises preliminares buscamos levantar as dificuldades em Geometria, sobretudo na transição entre as Geometrias Plana e Espacial, trazendo o ponto de vista de autores voltado para a Educação Básica. Também trazemos a proposta da BNCC para o trabalho com tecnologias no ensino de Geometria.

Na análise a priori, segundo Almouloud e Coutinho (2008), é a etapa em que serão delimitadas as variáveis (globais e locais) sobre as quais o ensino pode atuar, como forma de nortear a pesquisa e elaborar um plano de ação. Partindo dessa premissa, elaboramos uma construção sobre sólidos de revolução no *software* GeoGebra, como proposta didática para viabilizar a visualização e instigar a percepção geométrica dos alunos no tocante à passagem da Geometria Plana para a Geometria Espacial.

Para o desenvolvimento desta proposta didática, propomos como teoria de ensino a Teoria das Situações Didáticas (TSD), que foi desenvolvida também no seio da Didática da Matemática francesa em consonância com a Engenharia Didática.

**DESENVOLVIMENTO**

**Análise preliminar**

 As dificuldades na resolução de questões em Geometria são pauta de muitos trabalhos. Como apontam Settimy e Bairral (2020), o pensamento visual, característico no estudo da geometria, deve ser estimulado tanto quanto se estimula o pensamento algébrico. Além disso, os autores reforçam que a priorização da álgebra em detrimento da geometria reverberou no desenvolvimento de apenas uma categoria de pensamento matemático, o que mostra a necessidade de estimular distintas formas do pensamento geométrico em sala de aula.

 As competências e habilidades necessárias para a compreensão da Geometria versam sobre o uso do conhecimento geométrico de espaço e forma para ler e interpretar a realidade que nos cerca. Como aponta Sousa *et al*. (2021) há a necessidade de se explorar a Geometria, de modo geral, devido a sua relevância e abordagem contextualizada, com situações relativas ao cotidiano, contribuindo significativamente para o desenvolvimento do aluno.

 A Geometria Plana e Espacial fazem parte do currículo escolar e seus axiomas e postulados se relacionam de modo a compreender o mundo que nos cerca. Assim, é notória a relação entre esses campos. Conforme a BNCC, o aluno precisa encontrar sentido nos problemas geométricos, reconhecer conceitos e criar estratégias para a resolução de problemas, levando em conta a análise de modelos pré-existentes e verificando sua validação para as situações propostas (BRASIL, 2018). A competência específica 3, da área de Matemática e suas tecnologias, a BNCC traz que:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 527).

 Partindo disso, entendemos que a Geometria como um todo é uma área do conhecimento que oportuniza meios para a resolução de situações reais, estimulando o pensamento geométrico a partir do estudo das formas, relações entre figuras planas e espaciais e até mesmo entre Álgebra e Geometria, atendendo a necessidade humana de se estabelecer dentro de um espaço.

Entretanto, segundo Sousa *et al*. (2021), mesmo sendo uma área importante, a Geometria ainda traz consigo dificuldades em seu entendimento por parte dos alunos. “Há uma ruptura na transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial, existindo um maior grau de dificuldade na percepção e associação dos entes geométricos fundamentais e sua respectiva associação à composição de figuras espaciais” (SOUSA *et al*., 2021, p. 110).

 Para tal trazemos neste trabalho uma proposta para o ensino de Geometria com uso de tecnologias, em particular o software GeoGebra. O ensino de Geometria com aporte do GeoGebra já vem sendo estudado por diversos autores da área da Matemática como Silva e Abar (2016), Abar (2020), entre outros. Os autores Silva e Abar (2016) explicam que a construção de atividades com o GeoGebra oferece recursos visuais e manipuláveis, com potencial para facilitar o processo de ensino e aprendizagem.

 Dada a extensão deste trabalho, limitamos nossa análise preliminar a estes pontos específicos e convidamos o docente a refletir sobre o tema. Na seção seguinte, trazemos os resultados e discussão desenvolvidos neste trabalho.

**RESULTADOS E DISCUSSÃO**

**Análise *a priori***

Nesta seção trazemos como resultado parcial a análise *a priori*, que se configura em uma proposta didática para introduzir o ensino de sólidos de revolução, estruturada a partir da construção de uma situação didática utilizando o aporte do *software* GeoGebra e a Teoria das Situações Didáticas (TSD) como norteadora do processo para sua resolução. A TSD foi escolhida por sua familiaridade com a metodologia deste estudo, que é a Engenharia Didática.

A TSD é uma teoria de berço francês, criada por Guy Brousseau e que nos fornece suporte para a compreensão das relações entre professor, aluno e saber, visando aproximar o trabalho do aluno ao de um pesquisador, por meio do estímulo à formulação de hipóteses. Brousseau (2008) complementa que o professor (mediador) deve produzir situações de ensino no intuito de fazer com que o aluno construa e se aproprie do conhecimento. Segundo o autor, “uma ‘situação’ é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado” (BROUSSEAU, 2008, p. 20).

O processo de aprendizagem a partir da TSD é dividido em fases ou dialéticas, que são situação de ação, formulação, validação e institucionalização, sendo as três primeiras o que Brousseau (2008) denomina por situação adidática, ou seja, compõem a etapa que o aluno constrói o conhecimento sem intervenção direta do professor. O desenvolvimento de cada fase da TSD, pode ser descrito de forma sucinta, na perspectiva do autor:

*Situação de ação:* nesta fase inicial, o aluno ao entrar em contato com o problema deve buscar em seus conhecimentos prévios e sua interação com o meio, elementos que possam subsidiar suas estratégias para a solução da situação proposta.

*Situação de Formulação:* é a fase que pode ser caracterizada pelo diálogo e troca de informações entre o aluno e o meio em que a situação didática ocorre. Neste momento, o aluno deve estabelecer conjecturas e usar linguagem matemática, sem se preocupar com a formalidade das estruturas matemática, mas sim com a organização de suas ideias.

*Situação de Validação*: a partir da etapa anterior, o aluno deve, aqui, convencer os seus pares sobre a veracidade de seus argumentos, apresentando sua proposta de solução à situação didática, de forma organizada e com uso de linguagem adequada e mecanismos de prova.

*Situação de Institucionalização*: nesta última etapa, o professor intervém e, cm base no exposto pelos alunos nas etapas anteriores, mostra sua intenção com o problema proposto e institucionaliza o conteúdo matemático com linguagem adequada.

Para organização da situação didática proposta aqui, sugerimos uma situação contextualizada, tentando instigar a curiosidade e o pensamento geométrico do aluno, em que o professor pode disponibilizar para o aluno o *link*[[4]](#footnote-4) de uma construção realizada no GeoGebra, para que o mesmo possa manusear e construir hipóteses para solução do problema, como mostra o Quadro 1:

**Quadro 1 –** Situação Didática a ser proposta

|  |  |
| --- | --- |
| Mariana se utilizará de uma peça de tecido para confeccionar a cúpula do abajur de seu quarto, que apresenta o formato da figura ao lado. Sabendo que nas condições dadas, as medidas entre os pontos extremos de suas bases maior e menor equivalem a 12 cm e 6 cm, respectivamente, a distância entre estas bases equivale à 6 cm e que juntas, as áreas destas duas bases correspondem à medida da área lateral, descubra a quantidade de tecido que Mariana utilizará para sua confecção. (Use $π=3,14$). |  |

Fonte:Elaboração dos autores (2022).

De posse do problema, esperamos que na *situação de ação*, o aluno, a partir deuma leitura atenta do enunciado, reconheça os elementos matemáticos apresentados para a resolução do problema. Assim, esta fase deve ser o momento em que ele mobiliza seus conhecimentos prévios. É importante que ele traga em sua bagagem o aprendizado sobre áreas das figuras planas, em especial a área do círculo, para desenvolver as etapas da questão. Na sequência é importante que o docente proponha ao aluno a construção feita no *software.*

Diante disso, almejamos que ocorra a *situação de formulação*, em que o aluno deve trocar informações com o meio (*milieu*). Para tal, é importante que o docente instigue o diálogo entre os pares e faça questionamentos que auxiliem seu progresso na resolução. É importante salientar que o docente não deve intervir de modo a sugerir a resposta do problema ao aluno, mas sim instigá-lo a construir o seu conhecimento (BROUSSEAU, 2008).

Caso o aluno apresente dificuldades na compreensão da proposta, o professor pode estimulá-lo com algumas provocações, tais como solicitar ao aluno que altere o controle deslizante $n$ e os pontos *A*, *B* e *C* para observar o que ocorre, ou questionar que tipo de figura compõe a construção apresentada, além de incentivar ao aluno a imaginar objetos que ele conhece com formato similar. A partir de tais estímulos, o aluno deve descrever suas estratégias de forma verbal e/ou escrita, com aporte do GeoGebra e de suas conjecturas.

A princípio, o estudante deve se deparar com a construção em $n=0$ e o seguinte formato nas janelas 2D e 3D, como apontado na Figura 1:

**Figura 1:** Formato inicial da construção



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Espera-se que o aluno movimente o controle deslizante *n* e deixe-o em uma posição com medidas compatíveis com as apresentadas no problema. Assim, o aluno pode perceber que em $n=2$ e os pontos $A$, $B$ e $C$ tendo coordenadas respectivamente $A(6,0)$, $B(3,6)$ e $C(0,6)$, encontrando a figura de um trapézio, que corresponde à secção meridiana ou versão 2D do tronco de cone que forma a cúpula do abajur (Figura 2):

**Figura 2:** Secção meridiana do abajur.



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

É importante que o aluno reconheça que o formato do abajur em 2D equivale à figura de um trapézio, enquanto que, a partir de sua revolução, ele deve encontrar um tronco de cone como sua versão 3D. Além disso, durante a *formulação*, espera-se que o aluno reconheça, com base em seus conhecimentos prévios, que as medidas entre os pontos extremos das bases maior e menor correspondem aos respectivos diâmetros das circunferências. Desta forma, para encontrar sua área lateral, faz-se necessário que o aluno calcule as medidas das áreas de ambas as bases com $r\_{1}=3$ e $r\_{2}=6$.

Com efeito, na *situação de validação*,esperamos que os alunos cheguem à resolução da proposta através do cálculo de área das cincurferências, encontrando que:

$A\_{1}=3,14\*3^{2}=28,26 cm²$ e $A\_{2}=3,14\*6^{2}=113,04 cm²$

e assim, para a área lateral, correspondente à soma das áreas das duas bases, temos:

$$A\_{l}=28,26+113,04=141,3 cm²$$

Como apontam os autores Sousa *et al*. (2021, p. 117) vale salientar “a importância da visualização e percepção dos alunos com o GeoGebra, pois este recurso permite a inferência de informações para além do que a questão apresenta, tornando-se um elemento facilitador do pensamento geométrico”. Então, esperamos que, a partir do manuseio do controle deslizante $n$, o aluno perceba que há uma rotação em torno do eixo $x$, em que ocorre uma passagem da figura plana (trapézio) para a figura espacial (tronco de cone), como apontado na Figura 3:

**Fígura 3:** Rotação do trapézio com $n>2$, gerando o tronco de cone



Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

Desta forma, ao realizar a *situação de institucionalização*, o professor “fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber” (Almouloud, 2007, p. 40). Assim, é importante que o docente revise os conceitos de áreas, mas sobretudo, busque apresentar aos alunos a relação entre o trapézio e o tronco do cone, apresentando o conceito de sólido de revolução. Sugerimos a definição proposta em Medeiros e Costa (2020), que explica que um sólido de revolução é uma região do espaço tridimensional que se obtém rotacionando uma região plana ao redor de um eixo de giro.

Esta institucionalização apresentada assevera a possibilidade de se explorar no GeoGebra o comportamento de outros sólidos de revolução por meio do controle deslizante e dos pontos dados e sua respectiva manipulação, reforçando a demonstração presente no livro, com vistas a instigar o pensamento geométrico do estudante e seu aprendizado sobre superfícies 2D e 3D, pois pode-se inferir, a partir deste contexto que “o GeoGebra enquanto recurso tecnológico faz essa evolução conceitual a partir do momento em que propicia o diálogo entre a Geometria Plana e Espacial” (SOUSA *et al*., 2021 p. 117).

Abar (2020) explica que o uso de tecnologias digitais por meio de softwares como o GeoGebra tem potencial para alavancar a compreensão da evolução de um objeto matemático por meio de conceitos descobertos, à medida em que são foram pesquisados. Neste caso, propomos a observação da evolução dos objetos matemáticos da seguinte forma: um retângulo, que ao ter seus pontos manipulados passa a ser visto como um trapézio (secção meridiana de tronco de cone de bases paralelas) e a partir da rotação em torno do eixo, temos o tronco de cone que, hipoteticamente, representaria o abajur proposto no problema.

Note que no decorrer da situação didática solicitamos o cálculo da área das bases (círculos) e o cálculo da área lateral a partir das bases, contudo, a visualização e percepção geométrica do aluno pode ser facilitada com o uso do GeoGebra, por meio da interação do aluno com o *software*.

**CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A partir deste trabalho, e da Engenharia Didática desenvolvida para sua realização, almejamos que a situação didática proposta e explorada com o *software* GeoGebra facilite a compreensão de sólidos de revolução, por meio da relação dialética entre a Geometria Plana e Espacial, sendo uma abordagem metodológica que pode viabilizar o entendimento do aluno e auxiliar o professor de Matemática.

Segundo a nossa análise preliminar, o uso do GeoGebra no viés desta pesquisa traz uma proposta didática relevante para a melhoria da assimilação deste assunto, por meio do desenvolvimento da percepção geométrica do aluno, o que seria bem diferente caso a abordagem ocorresse por métodos tradicionais, restringindo-se ao uso de lápis e papel.

Já em nossa análise a priori, buscamos uma maneira de realizar o ensino de sólidos de revolução com o uso do GeoGebra, pois este *software* por meio de suas possibilidades visuais e construções bidimensionais e tridimensionais, preconiza a construção de objetos para experimentação e exploração de conceitos dentro da Geometria Plana e Espacial, como um recurso dinâmico e interativo.

As limitações deste estudo foram dificuldades em encontrar outras propostas metodológicas acerca da passagem da Geometria Plana para a Geometria Espacial com viés tecnológico, tratando especificamente da revolução dos sólidos, o que nos mostra a relevância deste assunto no âmbito científico.

Como perspectivas futuras, pretendemos que este estudo seja difundido e aplicado em sala de aula, visando minimizar as barreiras pré-existentes no aprendizado sobre o tema abordado. Ademais, este trabalho pode ser replicado por professores como uma proposta didática para o ensino e a aprendizagem de Geometria.

**REFERÊNCIAS**

ABAR, Celina A. A. P. A Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra** **de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 59-75, 2020.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná: Universidade Federal do Paraná. 2007.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**,Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade.
**Revemat**, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** 2018. p. 528. Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 12 nov. 2020.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

MEDEIROS, D. M.; COSTA, P. T. Sólidos de revolução e o Cálculo, uma extensão do estudo do volume e da área.**Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**, v. 3, n. 3, p. 141-154, 2020.

NOBRE, S. Alguns “porquês” na História da Matemática e suas contribuições para a educação matemática. **Cadernos CEDES – História e Educação Matemática**. São Paulo: Papirus, v. 40, p. 29-35, 1996.

OLIVEIRA, M. T.; LEIVAS, J. C. P. Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele. **Ciência e Natura**, v. 39, n. 1, p. 108-117, 2017.

SETTIMY, T. F. O.; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em Geometria Espacial. **Vidya**, v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020.

SILVA, H. N.; ABAR, C. A. A. P. A utilização do GeoGebra na reconstrução de atividades do Imagiciel.  In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2016. **Anais…** São Paulo, 2016.

SOUSA, R. T.; AZEVEDO, I. F.; LIMA, F. D. S.; ALVES, F. R. V. Transposição Didática com aporte do GeoGebra na passagem da Geometria Plana para a Geometria Espacial. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 7, n. 5, p. 106-124, 2021.

1. Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, CE, gracienemoreira546@gmail.com; [↑](#footnote-ref-1)
2. Graduada em Pedagogia pela Universidade Estadual Vale do Acaraú, Sobral CE, monalizaa540@gmail.com. [↑](#footnote-ref-2)
3. Professor orientador: Francisco Régis Vieira Alves, Doutor em Educação, Universidade Federal do Ceará, CE, fregis@ifce.edu.br [↑](#footnote-ref-3)
4. Construção realizada no *software* GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/hac7gmr4 [↑](#footnote-ref-4)