Resultado de Pesquisa

ESTUDO DE ALGUNS MODELOS MATEMÁTICOS EPIDEMIOLÓGICOS UTILIZANDO CONTROLE ÓTIMO

**Áurea Cristina Pacheco Matos, Universidade Federal do Norte do Tocantins,** [**aurea.cristina@mail.uft.edu.br**](mailto:aurea.cristina@mail.uft.edu.br)

**Alvaro Julio Yucra Hancco, Universidade Federal do Norte do Tocantins,** [**alvaroyucra@mail.uft.edu.br**](mailto:alvaroyucra@mail.uft.edu.br)

1. Apresentação e Justificativa

As doenças infecciosas, comumente causadas por algum vírus, bactéria, ou protozoário que infecta um organismo hospedeiro e que podem ser transmitidas de indivíduo infectado para outros, estão presentes no mundo ao longo da história da humanidade, trazendo diversas consequências, principalmente a morte. Quando estuda-se o comportamento dessas doenças, a aplicação da Matemática vem para simular os mecanismos de transmissão e disseminação, é a partir disso que surgem os modelos matemáticos epidemiológicos, comumente determinados através de sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

Assim, dentro da Modelagem Matemática, o estudo desses modelos matemáticos torna-se importante instrumento de pesquisa, permitindo estabelecer medidas de detecção, prevenção e controle. E, é a partir da Teoria do Controle Ótimo, onde se estuda o controle de sistemas de EDO, intervindo no comportamento desses sistemas.

Com isso, nossa pesquisa teve como objetivo estudar alguns modelos matemáticos epidemiológicos a partir da Teoria do Controle Ótimo, buscando definições e teoremas que nos ajudassem na análise desses modelos, da qual abrange as áreas das Ciências Exatas e da Terra, Matemática e Matemática Aplicada, possibilitando trazer para o meio acadêmico novas possibilidades para análise de modelos matemáticos, sejam de epidemias ou de outras doenças.

1. Objetivos

Nossa pesquisa teve como objetivo principal estudar alguns modelos matemáticos epidemiológicos utilizando a Teoria do Controle Ótimo. Isto é, estudar modelos matemáticos que descrevem algumas doenças, que são determinadas por sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

**(1)**

com a condição inicial

**(2)**

em que é uma função continuamente diferenciável e é diferenciável por partes, para depois determinar uma função de controle ótimo que minimize o funcional

,

sujeito a

, **(3)**

com a condição inicial

, **(4)**

em que as e são funções continuamente diferenciáveis, é diferenciável por partes.

A partir do objetivo principal, os objetivos específicos desta pesquisa são os seguintes:

* Estudar modelos matemáticos de algumas doenças, tais como, por exemplo, a Malária, Psoríase (doenças autoimunes crônicas da pele), entre outras, utilizando a Teoria do Controle Ótimo;
* Analisar a existência e unicidade da solução do sistema de Equações Diferenciais Ordinárias **(1)-(2)**;
* Determinar as condições necessárias de otimalidade para o problema determinado pelo sistema **(3)-(4)**;
* Utilizar métodos numéricos para determinar uma solução aproximada para o sistema **(3)-(4)**, em cada modelo que for estudado. Para realizar as simulações numéricas, pretendemos utilizar algum software, como por exemplo, o Matlab.

1. Metodologia

Para o estudo e análise de alguns modelos matemáticos epidemiológicos utilizamos principalmente teses, dissertações, monografias, artigos científicos e livros que pudessem nos auxiliar no entendimento da temática principal, tornando assim nossa pesquisa essencialmente bibliográfica. Utilizamos alguns trabalhos para compreender a Teoria do Controle Ótimo, e suas aplicações, e o principal teorema que utilizamos para a análise dos modelos matemáticos epidemiológicos, sendo ele: o Teorema da Existência da Solução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Assim, no próximo tópico, trazemos os resultados advindos dessa pesquisa.

1. Resultados

Após os estudos feitos, a partir da teoria, conseguimos compreender os principais conceitos para realizarmos a análise dos modelos matemáticos epidemiológicos. Esses, em sua maioria, eram definições, como a definição de um Problema de Controle Ótimo, e o teorema que garante a existência da solução de um PCO. Além disso, traremos mais a frente o modelo matemático epidemiológico estudado.

Assim, Kheiri e Jafari (2018, p. 7) definem um PCO como:

**Definição 1.** Um Problema de Controle Ótimo (PCO) pode ser definido como um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), determinado por uma função que consiste em minimizar o funcional

,

sujeito a

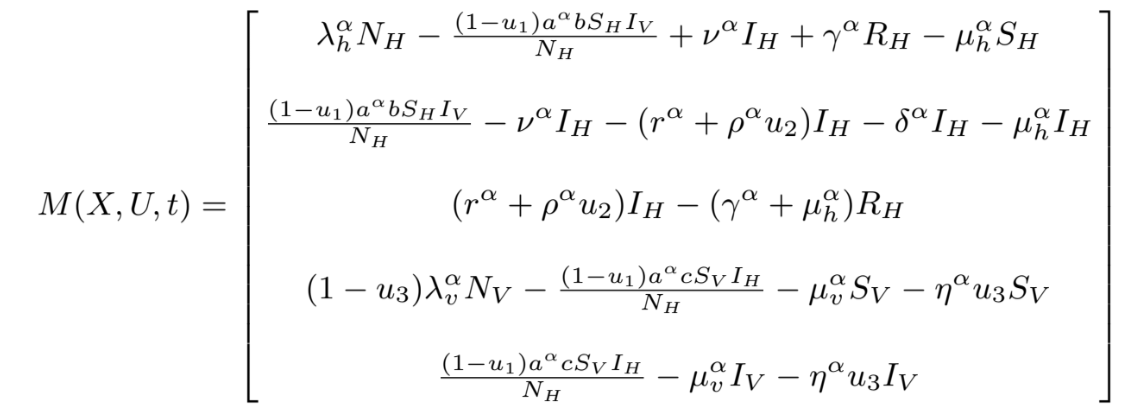
,

com a condição inicial

,

em que as funções e são funções continuamente diferenciáveis, é diferenciável por partes.

No modelo matemático epidemiológico estudado, proposto por Okyere et. al. (2016), do qual os autores analisam a Malária, eles definem o modelo como



**(5)**

onde são as variáveis do modelo que descrevem ações da doença ou dos indivíduos.

Entendendo o que é um PCO e realizando a análise do modelo proposto, iniciamos então a prova da existência da solução. Para isso, Lin (2007, p. 711-712) diz

**Teorema 1.** *Assumindo que* , *e* *e a função satisfaz as seguintes condições:*

1. *é Lebesgue mensurável com respeito a em ,*
2. *é contínua com respeito a em ,*
3. *existe uma função de valor real de tal modo que*

*,*

*para quase todo e todo .*

Então, para , existe pelo menos uma solução para o problema de valor inicial **(5)** no intervalo para um número positivo .

**Demonstração:**

Seja o modelo da malária com controle, apresentado por Okyere, et. al. (2016, p. 5) onde representam cada linha da matriz. Pelo **teorema 1,**

onde

aplicando a desigualdade triangular

.

provando assim a existência da solução do modelo.

1. Considerações Finais

Ao longo da pesquisa, conseguimos conduzir os estudos propostos para a compreensão de certos modelos matemáticos epidemiológicos com base na Teoria do Controle Ótimo. Isso implicou em uma ampliação das definições e teoremas, incluindo os principais como a definição de um Problema de Controle Ótimo (PCO) e o teorema que demonstra a existência da solução de um PCO.

Buscou-se, com o desenvolvimento dos estudos, realizar simulações numéricas propostas no plano de trabalho, mas que ainda estão sendo desenvolvidas. A ideia é utilizar os resultados teóricos previamente estudados em conjunto com a teoria dos métodos numéricos para obter soluções aproximadas através do software Matlab.

1. Referências Bibliográficas

KHEIRI, H. JAFARI, M. Optimal control of a fractional-order model for HIV/AIDS epidemic. **International Journal of Biomathematics,** v. 11, n. 6, p. 1850086, 2018. DOI: 10.1142/S179/93524518500869.

LIN, W. Global existence theory and chaos control of fractional differential equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications,** v. 332, p. 709-726, 2007. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.10.040.

OKYERE, E.; ODURO, F. T.; AMPONSAH, S. K.; DONTWI, I. K. **Fractional Order Optimal Control Model For Malaria Infection.** July, 2016.