



ESTUDO SEMI PROBABILISTICO E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS PARA O MÓDULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO APLICADO AO PROBLEMA DE FLEXÃO DE UMA VIGA

Semi probabilistic study for the concrete elasticity modulus applied to the flexion problem of a beam

Ana Carolina Carius (1); Bruna Teixeira Silveira (2); Ricardo Franciss (3); Leonardo de Souza Corrêa (4); João Vitor Curioni de Miranda (5)

(1) Dr. Prof, Instituto Federal do Rio de Janeiro, Duque de Caxias - RJ, Brasil.

(2) M.Sci. Prof., Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis - RJ, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis - RJ, Brasil.

(4) Graduando em Engenharia Civil, Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis – RJ, Brasil.

(5) Graduando em Engenharia Mecânica, Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis – RJ, Brasil.

E-mail para Correspondência: ana.carius@ifrj.edu.br; (P)Apresentador

Resumo:

O presente trabalho tem por objetivo apresentar um estudo do comportamento de uma viga de concreto bi apoiada, sujeita à carregamento pontual, partindo-se da hipótese de que o módulo de elasticidade do concreto não se comporta de forma homogênea não podendo, portanto, ser considerado uma constante. Preliminarmente foi feito um estudo da resistência à compressão do concreto, considerando que este é um material compósito e, sendo assim, admite variabilidade significativa e comportamento semi probabilístico. A partir desta conclusão, conjectura-se que o módulo de elasticidade do concreto possui, também, um comportamento semi probabilístico, divergindo das normas vigentes pela ABNT, às quais consideram o módulo de elasticidade como um valor a ser determinado através de cálculos envolvendo fórmulas matemáticas. A metodologia da pesquisa envolveu a escolha de um traço de concreto com resistência característica (f_{ck}) de 40 MPa, com o qual foram realizados ensaios para determinação do módulo de elasticidade tangente (E_{ci}), além de ensaios que garantissem o valor da resistência a compressão indicado. Os ensaios para a obtenção do módulo de elasticidade foram realizados de acordo com a norma ABNT NBR 8522 (2017). A partir dos resultados experimentais obtidos no Laboratório de Engenharia Civil da Universidade Católica de Petrópolis, desenvolveu-se um método de elementos finitos estocástico para a obtenção da linha elástica para a viga de concreto bi apoiada. Concluiu-se através das simulações numéricas realizadas que, em virtude do caráter compósito do concreto, a hipótese na qual se considera o módulo de elasticidade de forma probabilística influencia, diretamente, na função que determina o valor da linha elástica que descreve o comportamento da viga bi apoiada, exigindo-se, portanto, um cuidado maior no que diz respeito às hipóteses nas quais o módulo de



elasticidade é considerado um valor constante ou determinístico, como atestam as normas vigentes pela ABNT.

Palavras chaves: deflexão; semi probabilístico; módulo de elasticidade; método de elementos finitos.

Abstract:

The present work aims to present a study of the behavior of a bi supported concrete beam, subject to the punctual loading, starting from the hypothesis that the modulus of elasticity of the concrete does not behave homogeneously and therefore cannot be considered a constant. Preliminarily a study of the compressive strength of the concrete was made, considering that this is a composite material and, thus, it admits significant variability and semi probabilistic behavior. From this conclusion, it is conjectured that the modulus of elasticity of concrete also has a semi-probabilistic behavior, diverging from the norms in force by ABNT, which consider the modulus of elasticity as a value to be determined by calculations involving mathematical formulas . The research methodology involved the selection of a concrete trait with characteristic strength (f_{ck}) of 40 MPa, with which tests were carried out to determine the tangential elasticity modulus (E_{ci}), in addition to tests that guarantee the value of the compressive strength indicated. The tests to obtain the modulus of elasticity were performed according to ABNT NBR 8522 (2017). From the experimental results obtained in the Civil Engineering Laboratory of the Catholic University of Petrópolis, a stochastic finite element method was developed to obtain the elastic line for the bi supported concrete beam. It was concluded through numerical simulations that, due to the composite character of the concrete, the hypothesis in which the modulus of elasticity is considered in a probabilistic way directly influences the function that determines the value of the elastic line that describes the behavior of the beam thus requiring greater care regarding the hypotheses in which the modulus of elasticity is considered a constant or deterministic value, as evidenced by the norms in force by ABNT.

Keywords: deflection; semi probabilistic; elasticity modulus; finite element method.



1 INTRODUÇÃO

Estruturas apoiadas são amplamente utilizadas na engenharia civil, sobretudo na engenharia de estruturas. A posição e o comportamento mecânico dos suportes são determinantes na resposta mecânica do conjunto (HIDALGO, 2014). Devida à simplicidade geométrica, estruturas podem ser adequadamente avaliadas utilizando-se modelos lineares. Nesse sentido, para efeitos de estudo, destacam-se as vigas de Euler-Bernoulli, objeto de estudo deste trabalho.

As vigas podem ser classificadas de acordo com o modo como as mesmas são apoiadas. Dentre os principais tipos de apoio, destacamos: **viga simplesmente apoiada**, que é aquela suportada por um apoio fixo em uma extremidade e um apoio móvel na outra extremidade; **viga em balanço**, que é engastada em uma extremidade e livre na outra e **viga apoiada com extremidade em balanço**, que é a viga na qual uma ou ambas as extremidades ultrapassam livremente os apoios (HIBBELER, 2010). Neste trabalho considerou-se, por questões relacionadas aos experimentos laboratoriais que poderiam ser realizados no laboratório da universidade, apenas as vigas simplesmente apoiadas como modelo.

Considerando como ponto de partida para este estudo uma viga bi apoiada, o objetivo deste trabalho foi analisar a deflexão desta viga. Para tanto, define-se o conceito de linha elástica. Para Hibbeler (2010), **linha elástica** corresponde ao diagrama da deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centroide de cada área da seção transversal da viga.

O modelo matemático que descreve a linha elástica inclui, em sua formulação, a contribuição do módulo de elasticidade ou módulo de Young. Por definição, o módulo de elasticidade é a razão entre a tensão aplicada sobre um corpo e a deformação específica sobre o corpo. Para os materiais idealizados por Robert Hooke, verifica-se uma proporcionalidade entre a força aplicada e a deformação verificada. No entanto, o concreto não mantém esta proporcionalidade, variando-se o módulo de elasticidade de acordo com a carga aplicada (PACHECO et. al, 2014). Desta forma, considera-se dois tipos de módulo de elasticidade: módulo de elasticidade estático e módulo de elasticidade dinâmico. Em geral, o módulo de elasticidade é obtido através de métodos experimentais, uma vez que diversos fatores afetam o valor para o mesmo, tais como: o tempo de cura do concreto, a temperatura da cura, proporções da mistura e propriedades dos agregados, destacando-se a proporção água/cimento, tamanho e forma do corpo de prova, entre outros (DIÓGENES et. al, 2011).

Um dos maiores desafios atualmente para a construção civil é diminuir a intensidade de uso de recursos materiais, que deve ser feita selecionando-se os materiais mais adequados para cada necessidade. A otimização do uso de materiais e recursos só é possível com a redução da variabilidade, como é percebida hoje para o controle da resistência à compressão, onde trabalha-se com valores característicos, baseados na teoria de probabilidades (DE MARCHI, 2011).

Apesar de considerar para o parâmetro de resistência à compressão variabilidade intrínseca do concreto, não se considera, para o módulo de elasticidade, as mesmas hipóteses, sendo este tratado como uma grandeza determinística definida com fórmulas



pré-estabelecidas nas normas ABNT vigentes. Entretanto, valores determinísticos para o módulo de elasticidade nem sempre são confirmados pelo controle tecnológico realizado em campo, fato que pode acarretar situações problemáticas nas obras. Nesse sentido destaca-se a importância do controle de qualidade, pois irá fornecer os dados para análise e decisão sobre o atendimento às especificações de projeto, de forma a garantir a otimização no uso de materiais e recursos, gerando menores custos financeiros e ambientais (DE MARCHI, 2011).

Baseados na hipótese de não consideração do módulo de elasticidade para o concreto como um parâmetro determinístico, obtido através de fórmulas matemáticas pré-determinadas pelas normas vigentes, estudou-se a influência desta hipótese na formulação matemática para o problema da viga bi apoiada.

A fim de estudar o comportamento da linha elástica de uma viga, considerando-se contribuições, no modelo, das diferentes formas com as quais o módulo de elasticidade pode ser obtido, propôs-se a seguinte equação diferencial de quarta ordem para o problema de deflexão de uma viga de comprimento L , submetida a uma carga pontual, bi apoiada em suas extremidades:

Encontrar $u \in C^4(0,L)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \right] &= f(x), \\ u(0) &= u(L) = 0, \\ \frac{d^2 u}{dx^2}(0) &= \frac{d^2 u}{dx^2}(L) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

onde f representa o carregamento desta viga e u representa a função que define a linha elástica para a viga.

Observa-se que, caso considerássemos que os parâmetros de rigidez EI fossem constantes, obteríamos uma equação diferencial de quarta ordem, a qual seria resolvida analiticamente através de integrações sucessivas. No entanto pretende-se, a partir da formulação acima, avaliar as soluções obtidas através de métodos numéricos para a Eq. (1).

A partir do estudo realizado por Hidalgo (2014) para uma viga de Euler- Bernoulli, apoiada em fundação de Pasternak com o método de Galerkin estocástico, desenvolveu-se o método de Galerkin tradicional aplicado ao problema de flexão de uma viga, considerando-se que os parâmetros de rigidez não fossem constantes. Incluiu-se, na formulação parametrizada para o módulo de elasticidade do concreto, valores experimentais obtidos através de experimentos laboratoriais no Laboratório de construção Civil da Universidade Católica de Petrópolis. A partir das simulações realizadas, comparou-se os resultados clássicos da literatura com os resultados das simulações numéricas, discutindo-se as diferenças entre eles.

Por fim, este trabalho está dividido da seguinte forma: na Seção 2 discute-se a formulação variacional para a Eq. (1), objetivando-se obter as soluções aproximadas para o problema de flexão da viga. Na Seção 3 descreve-se as diferentes formas de cálculo para o módulo de elasticidade de forma determinística e a apresenta-se a forma

parametrizada para o mesmo, que será usada nas simulações numéricas. A Seção 4 apresenta os resultados obtidos a partir das simulações numéricas para o problema de flexão da viga. A Seção 5 discute as conclusões obtidas a partir dos resultados até o presente e apresenta perspectivas futuras na mesma linha de pesquisa.

2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Conforme discutido na Seção 1, ao caracterizar-se os parâmetros de rigidez EI como elementos probabilísticos no problema de flexão da viga de Euler-Bernoulli, a solução para o problema deve ocorrer de forma numérica, uma vez que não há possibilidade de cálculo, sob estas hipóteses, para solução analítica. Nessa perspectiva, é necessária a formulação variacional, a fim de realizar-se a discretização do problema contínuo e consequente obtenção da solução aproximada para a Eq. (1).

Desta forma, a fim de obter-se a formulação variacional para a Eq. (1), escolheu-se o seguinte espaço para as funções teste

$$V = \{v \in H^2(0, L) | v(0) = v(L) = 0 \text{ e } v''(0) = v''(L) = 0\}. \quad (2)$$

O espaço de Hilbert $H^2(0, L)$ é o espaço de Hilbert cujas funções, suas primeiras e também segundas derivadas são quadrado integráveis.

Multiplicando ambos os lados da Eq. (1) pela função teste $v \in V$, utilizando integração por partes e as condições de contorno do problema, define-se a seguinte formulação variacional para a Eq. (1)

Encontrar $u \in V$, tal que

$$a(u, v) = f(v), \quad \text{para todo } v \in V, \quad (3)$$

no qual $a: V \times V \rightarrow R$ é uma forma bilinear e $f: V \rightarrow R$ é um funcional linear, definidos como

$$a(u, v) = \int_0^L EI \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2v}{dx^2} dx$$

e

$$f(v) = \int_0^L f \cdot v dx.$$

Uma vez que a formulação variacional é obtida, é necessário avaliar se as soluções para a Eq. (1) e a Eq. (3) são equivalentes. A fim de validar essa relação solução para o problema forte, correspondente à solução para a Eq. (1) e solução para o problema variacional, correspondente à Eq. (3), considera-se o Lema de Lax-Milgram desde que a forma bilinear $a(u, v)$ e o funcional linear $f(v)$ satisfaçam às hipóteses do mesmo. É possível, considerando que os parâmetros de rigidez EI sejam limitados e que as



condições de contorno para o problema da viga bi apoiada satisfaz condições de regularidade para o espaço de Hilbert $H^2(0, L)$, como de fato ocorre para a Eq. (1), pode-se afirmar, a partir do Lema de Lax-Milgram, a equivalência entre as formulações forte e variacional, permitindo, então a discretização da Eq. (1) através de um método numérico.

3 MÓDULO DE ELASTICIDADE E PROGRAMA EXPERIMENTAL

3.1 Módulo de elasticidade: variabilidade intrínseca, extrínseca e cálculo tangencial

De acordo com De Marchi (2011) são descritos três tipos de módulo de elasticidade do concreto quando sujeito à compressão:

Módulo tangente: é calculado através do coeficiente angular da reta tangente a qualquer ponto da curva tensão X deformação na compressão, mas quando não for especificado o ponto da curva, refere-se à origem, ou seja, ao módulo tangente inicial E_{ci} .

Módulo secante: é dado pela relação entre uma tensão qualquer e a deformação a ela correspondente, ou seja, o coeficiente angular da reta que liga os pontos da curva tensão X deformação correspondente a essa tensão e à tensão igual a zero. Quando a tensão não é mencionada, infere-se que o módulo secante seja relativo a uma tensão entre 40 e 50 % da resistência à compressão.

Módulo cordal: É definido pela reta que liga dois pontos quaisquer da curva tensão X deformação.

Adotou-se, para este trabalho, o cálculo do módulo de elasticidade tangente, de acordo com o previsto pela ABNT NBR 8522 (2017). Existem, contudo, alguns modelos matemáticos que tentam prever o comportamento do módulo de elasticidade sem levar em consideração toda a variabilidade intrínseca, discutida na Seção 1. De acordo com De Marchi (2011), as abordagens teóricas não possuem muita aplicabilidade e se restringem ao uso do ponto de vista acadêmico. No entanto, é possível verificar algumas fórmulas para o cálculo do módulo de elasticidade, obtidas de forma empírica, que estão presentes em normas e recomendações técnicas internacionais de projetos de estruturas de concreto, conforme a Tabela 1.

Do ponto de vista experimental, diversos fatores intrínsecos contribuem para a variabilidade do concreto. Dentre estes fatores destacamos os agregados, os quais ocupam, em média, 75 % do volume do concreto, impactando diretamente na variabilidade do mesmo e alterando significativamente o valor do módulo de elasticidade (DE MARCHI, 2011).

Tabela 1: Diferentes formas para o cálculo do módulo de elasticidade tangencial (PACHECO et. al, 2014).

Autor	Expressão
NBR 6118/2007	$E_{ci} = 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}}$
EUROCODE 2/2004	$E_c = 1,05 \cdot E_{cm}$ $E_c(t) = 1,05 \cdot \left(e^{\left\{ s + \left[1 - \left(\frac{28}{t} \right)^{0,5} \right] \right\}} \right)^{0,3} \cdot E_{cm}$
ACI 318/2005	Não tem cálculo para o módulo tangencial
Fib MODEL CODE 2010	$E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_E \cdot \left(\frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{\frac{1}{3}}$ $E_{ci}(t) = \left(e^{\left\{ s + \left[1 - \left(\frac{28}{t} \right)^{0,5} \right] \right\}} \right)^{0,5} \cdot E_{ci}$

Assim como para os agregados graúdos, a porosidade desempenha um papel fundamental no módulo de elasticidade da pasta de cimento endurecida. Esse fenômeno está diretamente atrelado à relação água/cimento, teor de ar incorporado, adições minerais e grau de hidratação do cimento (MEHTA e MONTEIRO, 2008). Os vários tipos de vazios na pasta de cimento são classificados como porosidade gel e porosidade capilar. O volume da porosidade diminui durante a hidratação.

A zona de transição entre a matriz da pasta de cimento e o agregado é normalmente considerada como a parte mais fraca do concreto de resistência normal. Para o concreto de alta resistência, a resistência da argamassa e da zona de transição pode ser comparável com a resistência do agregado graúdo (DE MARCHI, 2011).

MASO apud METHA e MONTEIRO (2008) descreve o comportamento do concreto a partir de seu lançamento: primeiro forma-se um filme de água ao redor das partículas dos agregados graúdos, podendo formar uma relação água/cimento mais elevada nas proximidades do agregado graúdo do que na matriz da pasta de cimento. Os íons de cálcio, sulfato, hidroxila e aluminatos formados pela dissolução dos compostos de sulfato de cálcio e de aluminato de cálcio, combinam-se para formar etringita e hidróxido de cálcio. Devido à relação água/cimento elevada, estes produtos cristalinos vizinhos ao agregado graúdo consistem de cristais relativamente grandes e, conseqüentemente, formam uma estrutura mais porosa do que na matriz da pasta de cimento ou na matriz da argamassa.

Além dos fatores que contribuem para a variabilidade intrínseca, destacam-se os fatores responsáveis pela variabilidade extrínseca do concreto como os parâmetros do ensaio e as variáveis envolvidas no ensaio em si, incluindo a precisão do aparato utilizado para a fixação dos corpos-de prova, bem como a calibração dos extensômetros associados ao aparato.

Entre os parâmetros influenciadores para o módulo de elasticidade relacionados aos corpos-de-prova, encontram-se a forma e a dimensão da seção transversal, a relação entre o comprimento e essa dimensão e a direção de concretagem (SHEHATA, 2005). Já os parâmetros relacionados ao procedimento de ensaio estão o teor de umidade do corpo-de-prova, a velocidade de aplicação da tensão, a restrição à deformação nas extremidades do corpo-de-prova causada pela placa de carregamento, o comprimento ao longo do qual se mede a deformação, o diâmetro do prato transmissor de carga e a rigidez da prensa.

De Marchi apud Montija (2007) sinaliza que o uso de uma fórmula que exige uma aproximação matemática contribui para a interpretação do resultado de ensaio do módulo de deformação do concreto. Desta forma, é necessário garantir que os limites do trecho retilíneo estejam bem definidos e confiáveis. Também são citados pelo autor como fontes de variabilidade inerentes ao ensaio, a velocidade de aplicação da carga, a definição do plano de carga e o tipo de instrumentação para a medição das deformações.

Para os ensaios do módulo de elasticidade, segue-se as recomendações da norma ABNT NBR 8522 (2017). São indicados 5 corpos-de-prova cilíndricos, de forma que a altura do corpo-de-prova seja o dobro do diâmetro do mesmo corpo de prova. O diâmetro deve ser dado de acordo com o tamanho do agregado graúdo, de forma que o diâmetro seja, no mínimo, 4 vezes o tamanho máximo do agregado graúdo. Primeiramente deve ser feito um ensaio de resistência à compressão para dois corpos de prova, de acordo a ABNT NBR 5739 (2007). Este ensaio tem por objetivo determinar o nível de carregamento a ser aplicado no ensaio de módulo.

A fim de determinar o módulo de elasticidade através da tangente inicial, posiciona-se o corpo de prova corretamente em relação aos medidores que serão usados e aplica-se o carregamento até uma tensão de 30% da resistência à compressão obtida no ensaio anterior (σ_b), a uma velocidade de 0,25 MPa/s, podendo-se variar esta velocidade em 0,05 MPa/s, tanto positivamente quanto negativamente. Esse nível de carregamento deve ser mantido por 60 segundos e, em seguida, reduzido à mesma velocidade do processo de carregamento até o nível de tensão básica (considerado $\sigma_a = 0,5$ MPa, com variação de 0,1 MPa, tanto positivamente quanto negativamente). Devem ser realizados mais ciclos de carregamento adicionais, entre σ_a e σ_b , mantendo essas tensões por 60 segundos. Depois do último ciclo de carga são medidas as deformações específicas.

Após o término das leituras de deformação, o corpo de prova deve ser carregado até a sua ruptura. Se a resistência efetiva à compressão do corpo de prova diferir de f_{ci} em mais de 20 %, os resultados do corpo de prova devem ser descartados.

O módulo de elasticidade, com tensão fixa σ_a , pode ser calculado pela seguinte equação

$$E_{ci} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} 10^{-3} = \frac{\sigma_b - 0,5}{\varepsilon_b - \varepsilon_a} 10^{-3},$$

onde

σ_b é a tensão maior, em MPa ($\sigma_b = 0,3 f_{ck}$) ou outra tensão especificada em projeto, de até 40 % de f_{ck} ;

0,5 é a tensão básica em MPa;

ε_b é a deformação específica média, sob a tensão maior;

ε_a é a deformação específica média, sob a tensão básica de 0,5 MPa.

3.2 Programa experimental

O objetivo deste programa experimental foi investigar o comportamento do módulo de elasticidade do concreto. A seguir, foram realizados ensaios para a medir a deformação e cálculo do módulo de elasticidade para o método da tangente inicial, descrito na Seção 3.1.

A primeira etapa da pesquisa foi realizada durante um período de sessenta dias. A partir de um traço calculado para um concreto convencional de 40 MPa, foram confeccionados 10 corpos-de-prova, dos quais 7 foram ensaiados à compressão e 3 foram ensaiados para cálculo do módulo de elasticidade.

A segunda etapa da pesquisa objetivou o uso dos dados obtidos nos ensaios experimentais para o módulo de elasticidade em um programa computacional, desenvolvido a partir do método de Galerkin para o problema de flexão de uma viga bi apoiada.

Em virtude de condições externas à pesquisa, foram ensaiados apenas três corpos-de-prova para o módulo de elasticidade, cujos resultados podem ser indicados na Tabela 2.

Tabela 2: Resumo da análise estatística para o módulo de elasticidade do traço de 40 MPa.

Variável	Valor obtido
Número de amostras	3
Eci previsto segundo NBR 6118 (GPa)	35,417
Eci médio	39,37
Desvio padrão Eci	2,6777
Coefficiente de variação (%)	6,8

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS PARA O PROBLEMA DE FLEXÃO DE UMA VIGA

4.1 Problema discreto

Conforme descrito na Seção 3, a primeira etapa do trabalho objetivou o estudo dos fatores experimentais, intrínsecos e extrínsecos ao cálculo do módulo de elasticidade para o concreto. Além disso, discutiu-se a validade de alguns modelos de formulações determinísticas para o cálculo do módulo de elasticidade, especificado em diversas normas, incluindo na ABNT NBR 6118 (2014). A partir da formulação variacional para o problema, descrita na Seção 2, foi possível obter uma discretização para o problema variacional.

O primeiro passo descrito na aproximação para o problema (3) se refere à construção de aproximações de dimensão finita para o problema

Seja V_h uma coleção de dimensão finita para as funções u e v , ou seja, $V_h \subset V$. Portanto V_h é um subespaço, de dimensão finita, de V . O método de Galerkin para a aproximação da solução de tal problema consiste em definir problemas similares em subespaço de dimensão finita de V . Assim, com qualquer subespaço de dimensão finita V_h de V , associa-se ao problema discreto (CIARLET, 2002).

Encontrar $u_h \in V_h$, tal que

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \text{para todo } v_h \in V_h. \quad (4)$$

Observa-se que, como a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica, a solução discreta é também caracterizada pela propriedade

$$J(u_h) = \inf_{v_h \in V_h} J(v_h),$$

onde o funcional J é dado por

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - f(v).$$

Essa forma alternativa para a solução discreta é chamada método de Ritz.

Seja $(w_k)_{k=1}^M$ uma base no espaço V_h . Então a solução $u_h = \sum_{k=1}^M u_k w_k$ do problema (7) é tal que os coeficientes u_k são soluções do sistema linear

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h)$$

$$a\left(\sum_{k=1}^M u_k w_k, \sum_{l=1}^M v_l w_l\right) = \left(f, \sum_{l=1}^M v_l w_l\right).$$

Para cada K , onde K é um elemento do intervalo $(0, L)$, temos

$$a\left(\sum_{k=1}^M u_k w_k, v_l w_l\right) = (f, v_l w_l).$$

Define-se

$$a\left(\sum_{k=1}^M u_k w_k, v_l w_l\right) = \int_K EI \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{k=1}^M u_k w_k\right) \frac{d^2}{dx^2} (v_l w_l) dx,$$

donde escreve-se

$$\sum_{k=1}^M a(w_k, w_l) u_k = f(w_l), \quad 1 \leq l \leq M, \quad (5)$$

cujas matriz é sempre invertível, desde que a forma bilinear seja coerciva.

A matriz $a(w_k, w_l)$ é chamada matriz de rigidez e o vetor $f(w_l)$ é chamado de vetor força.

Uma vez que $(w_k)_{k=1}^M$ é uma base para V_h , então $u_h = \sum_{k=1}^M u_k w_k$, onde $w_k(x)$, $x \in [0, L]$, $k = 1, 2, \dots, M$ são as funções de interpolação. A fim de garantir as condições de existência e unicidade para o problema, as funções de interpolação w_k , $k = 1, 2, \dots, k$ devem satisfazer às condições de contorno do problema (1). Desta forma

$$w_k(0) = w_k(L) = 0, \quad 1 \leq k \leq M$$

$$\frac{d^2 w_k}{dx^2}(0) = \frac{d^2 w_k}{dx^2}(L) = 0, \quad 1 \leq k \leq M$$

A partir da formulação variacional local (5), é possível observar que todos os elementos da igualdade são conhecidos, exceto u_k . Logo

$$A_{kl} = a(w_k, w_l) \text{ e } F_l = (f, w_l),$$

temos o seguinte sistema linear a ser resolvido

$$\sum_{k=1}^M A_{kl} u_k = F_l, \quad 1 \leq l \leq M.$$

Como a forma bilinear para o problema (1) envolve derivadas de segunda ordem para as funções de interpolação, utilizou-se, para a implementação do problema (1), os polinômios de Hermite, definidos da seguinte forma

$$H_1(x) = \frac{-(x - x_{k+1})^2[-h + 2(x_k - x)]}{h^3}$$

$$H_2(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})^2}{h^2}$$

$$H_3(x) = \frac{(x - x_k)^2[h + 2(x_{k+1} - x)]}{h^3}$$

$$H_4(x) = \frac{(x - x_{k+1})^2(x - x_k)}{h^2}$$

onde h é a amplitude do intervalo $[x_k, x_{k+1}]$.

Portanto os elementos da matriz de rigidez A podem ser dados por

$$A_{kl} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} EI \frac{d^2 H_k}{dx^2} \frac{d^2 H_l}{dx^2} dx,$$

assim como os elementos do vetor \vec{F} ,

$$F_l = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f H_l dx.$$

4.2 Simulações numéricas

De acordo com a discretização descrita na Seção 4.1, realizou-se simulações numéricas para o problema (1). Conforme descrito na Seção 3, este trabalho pretendeu analisar as contribuições da caracterização semi probabilística para o módulo de elasticidade. A fim de incorporar tal hipótese nas simulações numéricas, a exemplo de Hidalgo (2014), considerou-se a seguinte parametrização para o módulo de elasticidade

$$E(x, \xi(\omega)) = \mu + \sqrt{3}\sigma \sum_{n=1}^N \left[\xi_{2n-1}(\omega) \cos\left(\frac{x}{nL}\right) + \xi_{2n}(\omega) \sin\left(\frac{x}{nL}\right) \right], \quad (6)$$

onde o vetor $\xi(\omega)$ representa um vetor de variáveis aleatórias, μ representa a média aritmética para os valores do módulo de elasticidade experimental, obtidos a partir dos ensaios descritos na Seção 3, assim como o desvio padrão σ .

Desta forma, realizou-se simulações numéricas com o método de Galerkin clássico, substituindo-se o módulo de elasticidade constante pela Eq. (6). O código foi desenvolvido em MATLAB, na versão R2016b.

A seguir, apresenta-se os resultados para a função que descreve a linha elástica, obtido numericamente a partir da formulação variacional (3), com a discretização definida na Seção 4.1 e incluindo-se a parametrização para o módulo de elasticidade (6). Os valores para a média μ e o desvio padrão σ encontram-se na Tabela 2 da Seção 3.2. O vetor de valores aleatórios $\xi(\omega)$ foi gerado pela função rand do MATLAB, considerando-se, na Eq. (6), $N = 1000$.

Tanto a função para a linha elástica quanto para o momento fletor foram calculadas para uma viga bi apoiada de comprimento 20 m, submetida a uma carga pontual $P=1$ kN, no centro da viga, ou seja, a 10 m de cada extremidade.

A Figura 1 mostra a função que define a linha elástica aproximada, utilizando o módulo de elasticidade parametrizado pela Eq. (6) e o método de Galerkin clássico, comparado com a solução exata, obtida da literatura para o módulo de elasticidade constante (HIBBELER, 2010).

A Figura 2 mostra os gráficos para os momentos fletores, sendo o gráfico para o momento fletor aproximado obtido com os mesmos parâmetros que foram usados para a obtenção da linha elástica na Figura 1. O momento fletor exato é obtido para os mesmos parâmetros da linha elástica exata, a partir da literatura (HIBBELER, 2010).

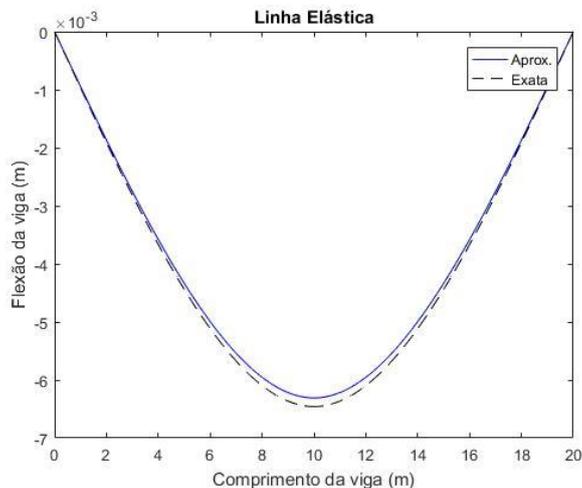


Figura 1: Gráficos das funções que descrevem a linha elástica.

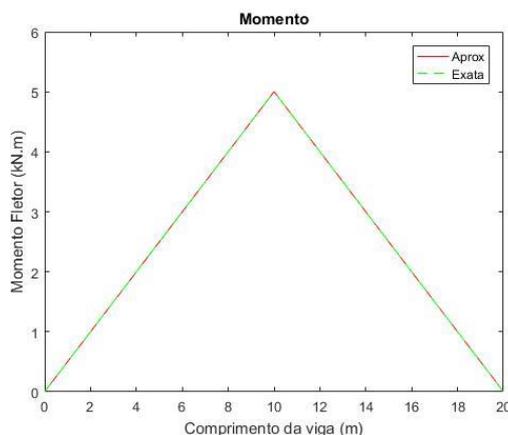


Figura 2: Gráfico dos momentos fletores.

Observa-se que os gráficos da linha elástica, apresentados na Figura 1, estão próximos, destacando-se o fato das soluções serem distintas em virtude da contribuição do módulo de elasticidade parametrizado, conforme a Eq. (6), incluindo em sua constituição parâmetros obtidos experimentalmente para o concreto, provenientes da Seção 3. Já os gráficos para o momento fletor não se distinguem, indicando que, apesar do concreto ser um material heterogêneo não há contribuição, de forma significativa, para a estabilidade do modelo de flexão para a viga bi apoiada.



5. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho objetivou estudar o comportamento do módulo de elasticidade para o concreto através do problema de flexão de uma viga de Euler-Bernoulli bi apoiada. Conforme discutido pela literatura, a solução da equação diferencial de quarta ordem originada pela modelagem do problema proposto é obtida de forma analítica, desde que os parâmetros de rigidez sejam considerados constantes. No entanto, para o concreto, tomar essa condição como hipótese não se constitui uma verdade absoluta, uma vez que o concreto, sendo um material heterogêneo, não se comporta como tal. Baseados nestas motivações, desenvolveu-se um método numérico de elementos finitos tradicional, conhecido como método de Galerkin, no qual considerou-se que os parâmetros de rigidez não eram constantes e se utilizou, para efeitos de cálculo, uma parametrização, a partir da literatura, para o módulo de elasticidade. Nessa parametrização foram necessários dados estatísticos provenientes de medições laboratoriais. Ao invés de se lançar mão de valores para o módulo de elasticidade presentes em estudos anteriores, realizou-se, no Laboratório de Engenharia Civil da Universidade Católica de Petrópolis ensaios tangenciais para o módulo de elasticidade do concreto, obtendo-se, desta maneira, valores para média e desvio-padrão das aferições, os quais foram necessários ao uso na parametrização presente no método numérico.

A partir dos resultados obtidos neste primeiro estudo, pretende-se ampliar as simulações numéricas, introduzindo-se métodos de elementos finitos estocásticos. Acredita-se que tais modelos refletirão melhor as influências da variabilidade do concreto nas simulações computacionais. Do ponto de vista laboratorial, pretende-se ampliar a quantidade de corpos-de-prova para os ensaios e cálculos do módulo de elasticidade realizando, de forma plena, o estudo do comportamento semi probabilístico para o módulo de elasticidade, bem como pretende-se simular uma viga bi apoiada com carregamento pontual, a fim de comparar os resultados para a linha elástica sob três aspectos: simulações computacionais, soluções exatas extraídas da literatura e ensaios laboratoriais. Ao final do projeto acredita-se que a avaliação da contribuição semi probabilística para o módulo de elasticidade possa influenciar as formas de controle deste parâmetro em centrais de concreto, atualmente realizadas através de cálculos determinísticos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio do CNPq e da Universidade Católica de Petrópolis na concessão de bolsas aos estudantes envolvidos no projeto. Ao professor M,Sci. Vinícius Costa Furtado da Rosa e ao laboratorista Alex Justen Teixeira pela colaboração nos ensaios laboratoriais.

REFERÊNCIAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 8522 (2017): determinação do módulo estático de elasticidade à compressão.



Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 5739 (2007): ensaio de compressão de corpos-de-prova cilíndricos.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118 (2014): projeto de estruturas de concreto – procedimento.

Ciarlet, P.G., 2002 *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Classics in Applied Mathematics; 40. North-Holland, Amsterdam: Society for Industrial and Applied Mathematics.

De Marchi, R. D. *Estudo sobre a variabilidade do módulo de deformação do concreto associada a fatores intrínsecos à produção do material*. São Paulo: Universidade de São Paulo. Dissertação (Mestrado). 2011. 121 p.

Diógenes, H. J. F.; Cossolino, L. C.; Pereira, A. H. A.; El Debs M.K.; El Debs, A. L. H. C., 2011 Determinação do módulo de elasticidade do concreto a partir da resposta acústica, *Revista Ibracon de Estruturas e Materiais*, v. 4, n. 5, pp. 803-813.

Hibbeler, R.C., 2010 *Resistência dos materiais*. São Paulo: Editora Pearson.

Hidalgo, F. L. C. 2014 *Quantificação da incerteza do problema de flexão estocástica de uma viga de Euler-Bernoulli, apoiada em fundação de Pasternak, utilizando o método estocástico de Galerkin e o método de elementos finitos estocástico*. Dissertação (Mestrado). Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Metha, P.K.; Monteiro, P.J.M. *Concreto: Estrutura, propriedades e materiais*, Ed. PINI, São Paulo, 2008.

Pacheco, J.; Bilesky, P.; Moraes, T.R.; Grando, F.; Helene, P., 2014 Considerações sobre o módulo de elasticidade do concreto, *Anais do 56º Congresso Brasileiro do Concreto*, Natal: Rio Grande do Norte.

Shehata, L.D., In Isaia, G.C. (Ed.). *Concreto: ensino, pesquisa e realizações*, vol. 1, cap. 21, IBRACON. São Paulo, 2005.