

ESTUDO COMPARATIVO DOS RESULTADOS DO MATERIAL POINT METHOD E DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS DINÂMICOS UNIDIMENSIONAIS

Comparative study of Material Point Method and Finite Element Method results for unidimensional dynamic problems

Leonardo Tolêdo Ferreira (1); Luciana Correia Laurindo Martins Vieira (2); Tiago Peixoto da
Silva Lobo (3)

(1) Graduando em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió - AL, Brasil.

(2) M.a. Profa., Universidade Federal de Alagoas, Maceió - AL, Brasil.

(3) Pesquisador do LCCV*, Universidade Federal de Alagoas, Maceió - AL, Brasil.

E-mail para correspondência: contato@leonardotoledo.org; (P) Apresentador

Resumo: Deslizamentos submarinos são fenômenos geológicos naturais que merecem atenção pelo seu potencial de causar desastres naturais e, mais especificamente, pelos danos potenciais a estruturas *offshore*. Problemas geomecânicos como este — que incluem, por exemplo, estabilidade de poços e corrida de detritos — costumam envolver grandes deslocamentos, fraturas e grandes deformações. Considerando-se as dimensões e consequências desses deslizamentos de terra, torna-se inviável a utilização de modelos reais para estudar estes problemas. Os métodos numéricos tradicionais utilizados em problemas de engenharia, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), apresentam problemas com distorção de malha ao serem submetidos a situações que envolvem grandes deslocamentos, além de apresentarem dificuldades no tratamento de fraturas e superfícies em contato. Deste modo, o uso do MEF para tratar problemas de geomecânica e geologia fica comprometido. Este trabalho opta, então, pelo *Material Point Method* (MPM), pois ele possibilita o tratamento de problemas de mecânica do contínuo sem sofrer distorção de malha ao juntar as melhores características das formulações euleriana e lagrangeana, já que sua malha, em geral, é fixa e evita o termo convectivo na equação de conservação de momento. Este trabalho realiza uma análise detalhada do MPM através de estudos sobre a influência da quantidade de partículas (pontos materiais), do número de pontos Gauss (situação análoga, no MEF) e do passo de tempo na qualidade dos resultados obtidos. Por fim, faz-se, sempre que possível, uma comparação entre os resultados obtidos em condições análogas com o Método dos Elementos Finitos. Deste modo, este artigo dá o pontapé inicial num projeto de pesquisa mais amplo que visa a estudar a mecânica dos deslizamentos submarinos.

Palavras-chave: métodos numéricos; material point method; deslizamentos submarinos.

* Laboratório de Computação Científica e Visualização



Abstract: Submarine landslides are natural geological phenomena that deserve attention for their potential of causing natural disasters and, more specifically, for their potential damage to offshore structures. Geomechanical problems like this — which include the likes of well stability and debris flow — usually involve large displacements, fractures and large deformations. Considering the dimensions and consequences of these landslides, it becomes unviable to use real models to study them. Traditional numerical methods in engineering, as Finite Element Method (FEM), suffer of mesh distortion problems when subjected to situations that involve large displacements. Besides that, they show difficulties in handling fractures and contact surfaces. Moreover, usage of FEM in geology and geomechanical problems becomes limited. Therefore, this work chooses the Material Point Method (MPM) as an option, for it enables the handling of continuum mechanics problems without mesh distortion. This is achieved by filtering the best features of Lagrangian and Eulerian formulations, for MPM's mesh is generally fixed and it avoids the convective term in momentum conservation equation. This work makes a detailed analysis of MPM by studying the influence of the number of particles (material points), the number of Gauss points (analogous situation for FEM) and the time step the error value of the simulated problems. In the end, whenever possible, a comparison of results is done, under similar conditions, with FEM. Thus, this article makes the first step in a larger research project that aims to study the mechanics of submarine landslides.

Keywords: *computational methods; material point method; submarine landslides.*



1 INTRODUÇÃO

Proposto por Sulsky, Chen e Schreyer (1994), o *Material Point Method* (MPM) surgiu como uma extensão do método particle-in-cell (PIC) e consiste em resolver as equações de conservação de momento, massa e energia através da utilização de pontos materiais (também chamados de partículas) que se movem em uma malha de fundo fixa, de dimensões maiores que a da estrutura, pois precisa contemplar toda a região por qual esta pode se locomover (ver figura 1a). Os pontos materiais são as entidades que carregam as informações de massa, deslocamento, velocidade, tensão, deformação, entre outras ao longo da simulação. Os nós da malha são usados apenas como repositórios temporários de informação trazida pelas partículas, até que ocorra a próxima iteração.

Como contraste, temos o Método dos Elementos Finitos (FEM). Nele, uma malha de nós e elementos é utilizada para guardar todas as informações relevantes do problema. A malha aqui passa sobre estritamente a região em que fica a estrutura e se deforma junto com ela (ver figura 1b). Deste modo, alguns problemas de distorção de malha podem ocorrer quando a estrutura é exposta a grandes deformações. Outra diferença é que, apesar de ambos os métodos partirem da mesma forma fraca, o modo como resolvem as integrais dessa formulação é diferente, pois no FEM as integrais da forma fraca são resolvidas numericamente com o uso da quadratura de Gauss. Deste modo, a integração é exata para polinômios de ordem $2n - 1$, em que n é o número de pontos de Gauss utilizados na simulação. No MPM, entretanto, a integração numérica é feita através de um somatório executado nas posições das próprias partículas, que podem estar distribuídas de várias formas.

Dentro desse contexto, propomos, neste artigo, uma comparação entre os resultados do FEM e do MPM aplicados a dois problemas distintos: um pilar submetido ao peso próprio e uma barra engastada submetida a uma velocidade senoidal prescrita. Deste modo, pretendemos analisar o comportamento de ambos os métodos na situação em que as forças de campo estão presentes ou ausentes nas estruturas. Para que esta análise seja válida, conforme citamos no parágrafo anterior, este artigo posiciona as partículas inicialmente nos pontos de Gauss, para que seja possível uma comparação entre os dois métodos.

2 FORMULAÇÃO E METODOLOGIA

Na formulação de problemas de mecânica do contínuo, é preciso obedecer à equação de conservação de momento, conforme mostrada por Landau (1986) para problemas dinâmicos unidimensionais:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + b_x = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

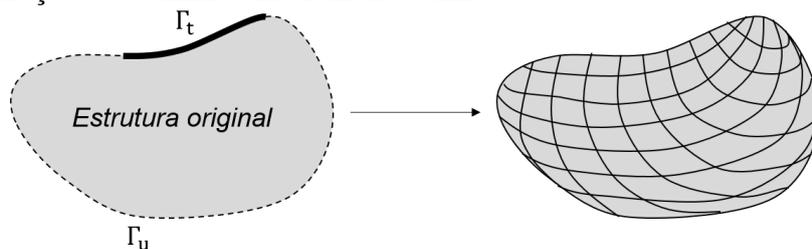
em que σ_x é a tensão, b_x é a força de corpo, ρ é a densidade de massas do material e u é o deslocamento.

Partindo da equação 1, introduzindo uma função peso ω e fazendo algumas manipulações algébricas (Zienkiewicz (2016)), chegamos à forma fraca da equação de conservação de momento:

$$\int_{\Omega} \omega \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \sigma_x dx = \int_{\Omega} \omega \cdot b_x dx + \omega(t_x|_{\Gamma_u} + \bar{t}_x|_{\Gamma_t}), \quad (2)$$

em que Ω é o domínio do problema, Γ_u é o contorno de deslocamentos prescritos e Γ_t é o contorno de trações prescritas.

a) Discretização do domínio em elementos finitos



b) Discretização do domínio no MPM

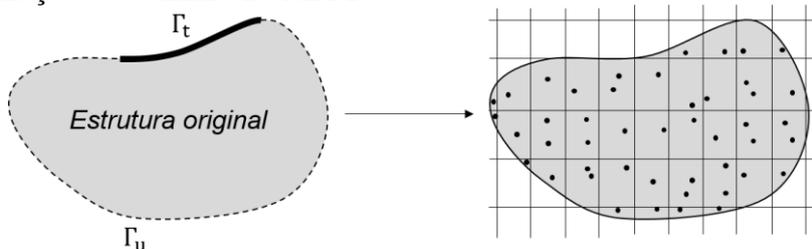


Figura 1: Discretização do domínio

A partir da forma fraca, algumas aproximações são feitas. No MPM, aproximamos a densidade (ρ) com o uso do delta de Dirac:

$$\rho = \sum_p m_p \cdot \delta(x - x_p), \quad (3)$$

em que m_p é a massa da partícula e $\delta(x - x_p)$ é a distribuição delta de Dirac aplicada na posição da partícula.

Deste modo, é como se o volume da partícula fosse os pesos e, a posição, os pontos de Gauss quando comparamos o que acontece no MPM com o que acontece no FEM.

A equação que estaremos resolvendo em cada iteração de nosso problema no FEM é a seguinte (para a formulação completa, ver Zienkiewicz (2016)):

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, \quad (4)$$

em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{M} é a matriz de massa reduzida e \mathbf{f} é o vetor de forças internas e externas.

No MPM, o termo de rigidez aparece incorporado ao termo de forças, o que nos leva à equação a seguir (para a formulação completa, ver Kafaji (2013)):

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{int} + \mathbf{f}_{ext}, \quad (5)$$

em que \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas e \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externas.

Tradicionalmente, duas alternativas (Kafaji (2013)) são utilizadas na construção dos algoritmos de integração temporal do MPM. Essas alternativas são a atualização das tensões primeiro (ATP) e a atualização das tensões por último (ATU). Dependendo da ordem em que isso é feito, resultados diferentes são obtidos. Neste artigo, optamos por usar o algoritmo ATP, que está resumido na figura 1.

- Enquanto não atingir o tempo final, faça:
1. Mapeamento das partículas para os nós:
 - a. Cálculo da massa nodal.
 - b. Cálculo do momento nodal.
 - c. Cálculo da velocidade nodal.
 2. **Atualização da tensão das partículas.**
 - a. Atualização da velocidade das partículas.
 - b. Atualização da posição das partículas.
 3. Cálculo de força e aceleração nodais.
 4. Atualização do momento nodal.
 5. Mapeamento dos nós para as partículas:

Figura 2: Abordagem ATP do MPM

Além disso, para que fosse possível uma comparação entre os resultados gerados pelo *Material Point Method* e o Método dos Elementos Finitos, fez-se necessária a seleção de

alguns parâmetros que interferem de forma análoga no funcionamento de ambos e, assim, foi feita uma comparação direta entre o efeito do aumento do número de partículas no MPM e do número de pontos de Gauss no FEM. Esses e outros parâmetros escolhidos foram destacados na tabela 1 e foram variados em nossas simulações.

<i>Passo de tempo</i>	<i>FEM</i> <i>MPM</i>
<i>Número de pontos de Gauss</i>	<i>FEM</i>
<i>Número de partículas</i>	<i>MPM</i>

Tabela 1: Parâmetros analisados em simulação

3 PROBLEMA DO PILAR

Uma das análises deste artigo é a simulação de um pilar submetido ao próprio peso e fixo na extremidade inferior. Este problema é tratado no espaço unidimensional e foi adaptado de Tielen (2016). Ele está descrito pictoriamente na figura 2, onde \mathbf{g} é a aceleração da gravidade e H é a altura da viga em seu estado não deformado.

As seguintes condições de contorno e iniciais foram adotadas:

$$u(t, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad v(0, y) = 0, \quad (6)$$

em que u é o deslocamento do pilar e v é a sua velocidade.

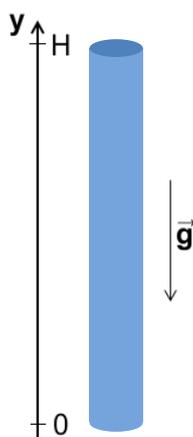


Figura 3: Problema do pilar submetido ao peso próprio

Para comparar o valor analítico do deslocamento da partícula com o valor observado nas soluções numéricas, foi calculado o valor do deslocamento no centro de massa do pilar, que obedece à seguinte equação:

$$u_{cm} = \frac{\rho g H^2}{E} \cdot \left\{ \frac{1}{3} - \frac{32}{\pi^4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \cdot \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot t\right) \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)\right] \right\}, \quad (7)$$

em que u_{cm} é o deslocamento no centro de massa, ρ é a densidade do pilar e E é o modo de elasticidade do pilar.

3.1 RESULTADOS

Os resultados da simulação deste problema foram avaliados em duas etapas. A primeira consistindo na análise da variação do erro conforme se altera o tamanho do passo de tempo e a segunda etapa consistindo na análise da variação do erro conforme se varia o número de partículas, para um passo de tempo fixo. Para ambas as análises, os parâmetros físicos e do material que foram simulados são os que constam na tabela 2, abaixo.

Módulo de elasticidade (E)	$5 \cdot 10^4 Pa$
Densidade de massa (ρ)	$1 kg/m^3$
Altura do pilar (H)	$25 m$
Aceleração da gravidade (g)	$-9,81 m/s^2$
Tempo de simulação (t_{sim})	$1s$

Tabela 2: Propriedades simuladas no problema do pilar

Para a primeira etapa, em que foi variado o passo de tempo em relação ao passo de tempo crítico (obtido pela equação $\Delta t_{critico} = \Delta x / \sqrt{E/\rho}$, em que Δx é o tamanho do elemento), foi utilizado o seguinte domínio:

Passo de tempo (% do crítico)	1%; 10%; 100%
$N.$ elementos	20
$N.$ nós por elemento	2
$N.$ partículas por elemento (MPM)	5
$N.$ pontos de Gauss (MEF)	5

Tabela 3: Parâmetros do domínio simulado no problema do pilar

Com o uso desses parâmetros, foram obtidos os seguinte gráficos, que mostram as curvas *Erro x Tempo* para uma malha única, variando-se o valor do passo de tempo de acordo com a tabela 3. Notamos nestes gráficos uma melhora do resultado conforme diminuição do passo de tempo, conforme já esperávamos. O MPM apresenta um resultado ligeiramente pior que do MEF por fazer aproximações em duas etapas: na passagem das informações das partículas para os nós e vice-versa.

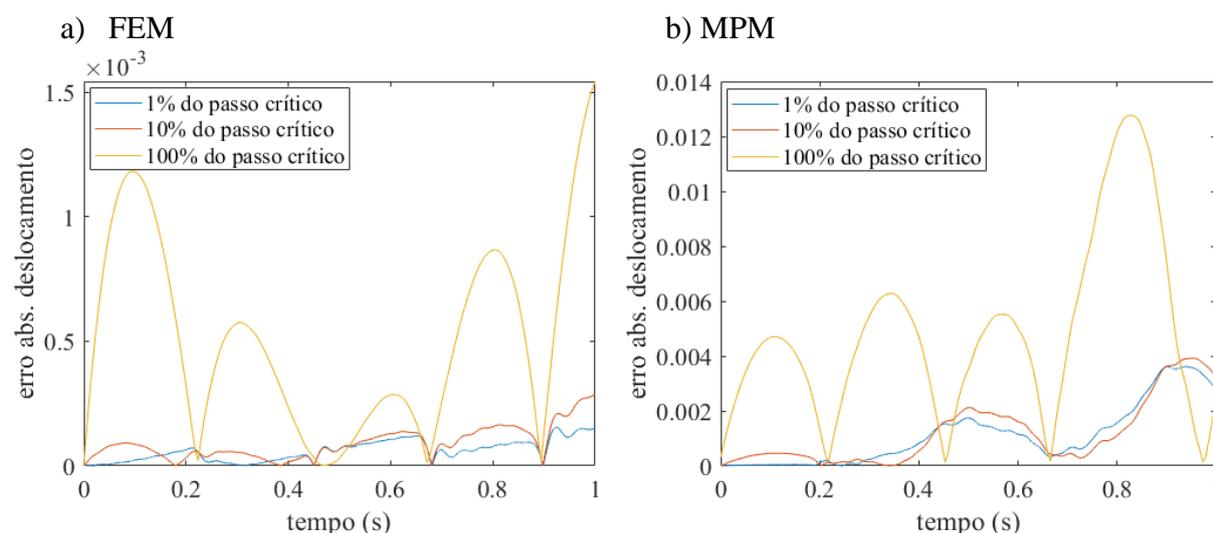


Figura 4: Resultados do problema do pilar na primeira etapa

Na segunda etapa do problema, que diz respeito à variação do número de partículas, foi utilizado o seguinte domínio.:

<i>Passo de tempo (% do crítico)</i>	10 %
<i>N. elementos</i>	20
<i>N. nós por elemento</i>	2
<i>N. partículas por elemento (MPM)</i>	1 – 10
<i>N. pontos de Gauss (MEF)</i>	1 – 10

Tabela 4: Valores dos parâmetros numéricos simulados na segunda etapa

Nesta etapa, obtivemos os resultados da figura 5, em que notamos que no FEM não há variação do resultado conforme o número de pontos de Gauss é aumentado, algo que já era esperado, pois utilizamos funções de forma lineares e, para estas, 1 ponto de Gauss é o suficiente para uma integração exata. No MPM notamos variações na qualidade dos resultados a partir de 4 partículas por elemento, o que acreditamos ocorrer, provavelmente, por causa do *grid-crossing error*, sendo algo que merece ser melhor investigado posteriormente.

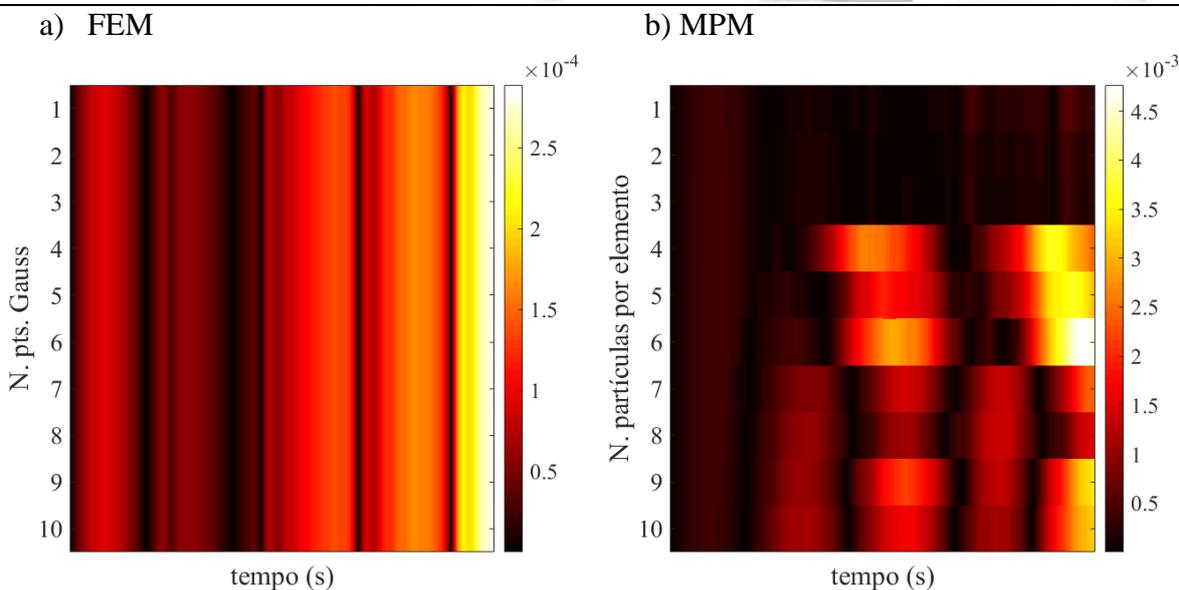


Figura 5: Resultados do problema do pilar na segunda etapa

4 PROBLEMA DA BARRA

No artigo de Bardenhagen (2002), é simulado o problema de uma barra fixada numa de suas extremidades e submetida a uma velocidade senoidal prescrita em sua extensão. Esse problema está ilustrado na figura 5.

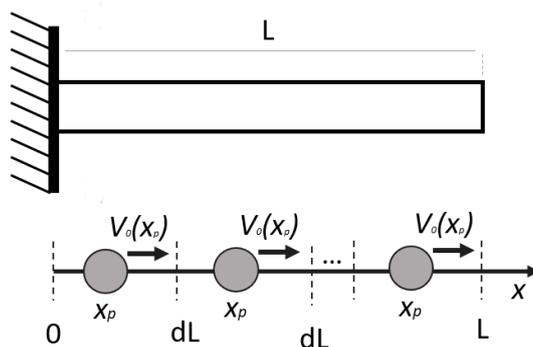


Figura 6: Problema da barra engastada

Para este problema, as seguintes condições de contorno e iniciais foram adotadas:

$$u(t, 0) = 0, \quad u(0, x) = 0, \quad v(0, x) = v_0 \cdot \text{sen}(\beta_n x), \quad (8)$$

em que u é o deslocamento da barra, v a sua velocidade, $\beta_n = \frac{(2n-1)\cdot\pi}{2L}$ é um termo que depende do modo de vibração da barra (n) e v_0 é a amplitude da velocidade.

Para as análises a que este artigo se propõe, foi considerado o deslocamento no centro de massa como parâmetro de comparação entre os valores analíticos e numéricos, conforme equação descrita a seguir:

$$u_{cm} = \frac{v_0}{\omega\beta_n L} \cdot \text{sen}(\omega t), \quad (9)$$

em que u_{cm} é o deslocamento no centro de massa, ω é a frequência de vibração da barra e L é o seu comprimento.

4.1 RESULTADOS

Assim como o problema do pilar, o problema da barra foi simulado em duas etapas. A primeira, variando-se o passo de tempo e mantendo o número de partículas fixo. A segunda, variando o número de partículas e mantendo o passo de tempo fixo. Isto foi feito com a adoção das seguintes propriedades físicas e de material:

Módulo de elasticidade (E)	$200 \cdot 10^9 Pa$
Densidade de massa (ρ)	$7800 kg/m^3$
Comprimento da barra (L)	$25 m$
Amplitude de velocidade (v_0)	$0,1 m/s$
Tempo de simulação (t_{sim})	$0,0395 s$
Modo de vibração da barra (n)	1

Tabela 5: Propriedades simuladas no problema da barra

Os parâmetros da tabela 5 foram simulados, na primeira etapa, para os seguintes valores:

<i>Passo de tempo (% do crítico)</i>	1%; 10 %; 100%
<i>N. elementos</i>	20
<i>N. nós por elemento</i>	2
<i>N. partículas por elemento (MPM)</i>	5
<i>N. pontos de Gauss (MEF)</i>	5

Tabela 6: Parâmetros do domínio simulado no problema da barra

Os resultados da primeira etapa mostram a variação do erro absoluto para o deslocamento no centro de massa da barra (figura 6) conforme foi aumentado o passo de tempo em relação ao passo de tempo crítico. Novamente, tal qual no problema do pilar, notamos uma melhoria dos resultados conforme se diminui o passo de tempo.

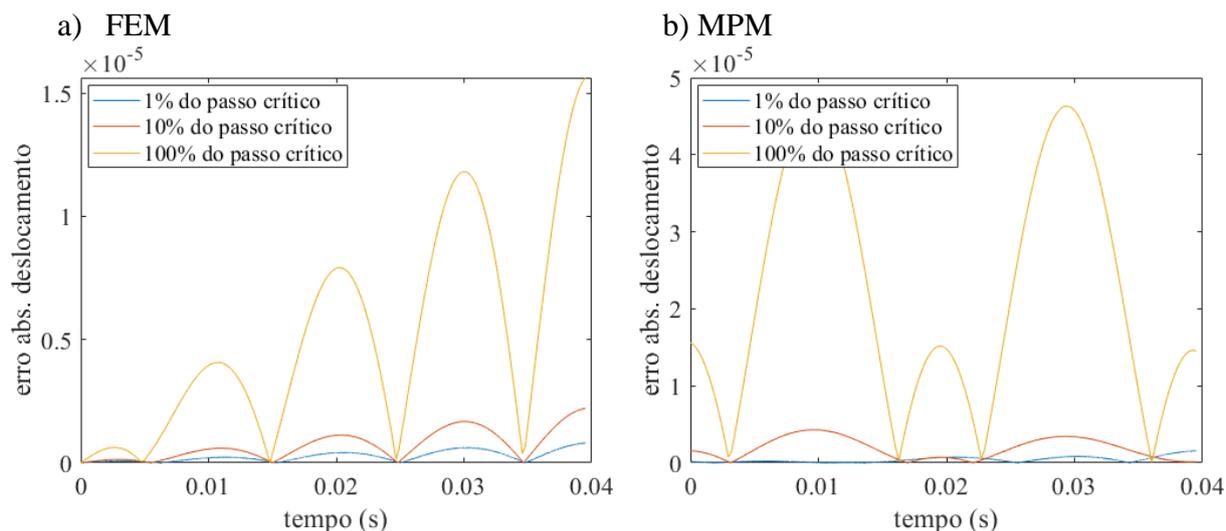


Figura 7: Resultados do problema da barra na primeira etapa

Na segunda etapa, onde o erro obtido ao compararmos o deslocamento numérico com o analítico no centro de massa foi investigado para um passo de tempo e um número de elementos fixos, variando-se o número de partículas, foram feitos mapas de cores, onde um tom mais escuro é representativo de um erro absoluto menor, conforme se confere na figura 7.

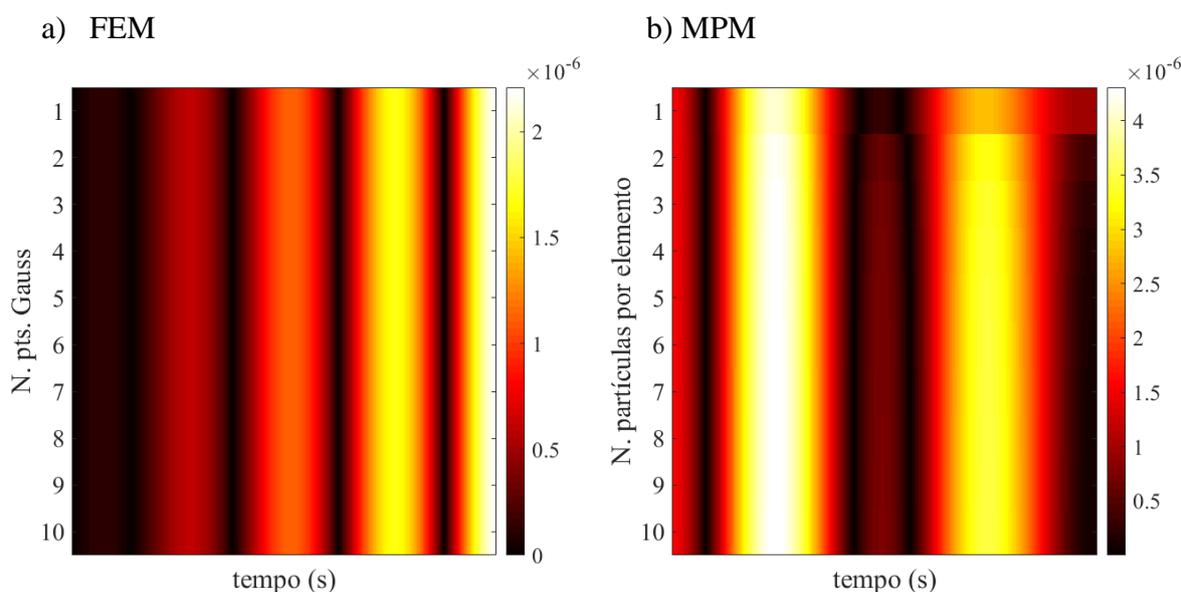


Figura 8: Resultados do problema da barra na segunda etapa



<i>Passo de tempo (% do crítico)</i>	10 %
<i>N. elementos</i>	20
<i>N. nós por elemento</i>	2
<i>N. partículas por elemento (MPM)</i>	1 – 10
<i>N. pontos de Gauss (MEF)</i>	1 – 10

Tabela 7: Valores dos parâmetros numéricos simulados na segunda etapa

Notamos, na figura 8, que, ao contrário do que ocorreu no problema do pilar, temos um resultado consistente para um número maior de partículas por elemento. Acreditamos que isso ocorra porque o problema é de menor complexidade (não há o cálculo de forças de campo) e porque não ocorreu aqui o *grid-crossing error*.

5 CONCLUSÃO

A variação do número de pontos de Gauss não traz, como esperado, alteração nos resultados do MEF e a variação do número de partículas afeta de maneira pouco significativa o resultado do MPM no problema da barra, que não traz forças externas. No problema do pilar, que possui força de campo gravitacional, a variação do número de partículas passa a influenciar bastante os resultados na porção final do intervalo de tempo simulado. Por fim, nota-se que a qualidade dos resultados do FEM é ligeiramente superior à do MPM em todas as simulações executadas.

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer pelo apoio financeiro da FUNDEPES, pelo espaço cedido pelo Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV) para o desenvolvimento de nossas pesquisas e pela permissão da PETROBRAS para publicarmos este artigo.

REFERÊNCIAS

- Bardenhagen, S.G., 2002. *Energy conservation error in the material point method for solid mechanics*, Journal of Computational Physics, vol. 180, n. 1, pp. 383-403, <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7103>.
- Kafaji, I. K. J. al-, 2013. *Formulation of a dynamic material point method (MPM) for geomechanical problems*. PhD thesis, Universität Stuttgart, <http://dx.doi.org/10.18419/opus-496>.
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M., 1986. *Course of Theoretical Physics, Theory of Elasticity*. 3.ed. Pergamon Press Oxford, vol. 7.
- Sulsky, D., Chen, Z., & Schreyer, H. L., 1994. *A particle method for history-dependent materials*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 118, n. 1-2, pp. 179-196, [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(94\)90112-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90112-0).



Tielen, R. P. W. M., 2016. *High-order Material Point Method*. MSc thesis, Delft University of Technology, <http://resolver.tudelft.nl/uuid:24d84ce3-d325-4dad-a1f1-ab35f942def7>.

Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L.; ZHU, J. Z., 2013. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Seventh edition. Oxford: Butterworth-Heinemann. 47-92 pp.