Estratégia de Negociação de Contratos Futuros de DI1 Através do Modelo Nelson-Siegel Dinâmico

André Barbosa Oliveira[♣]

Marcio Vagner Barbosa de Santana Sobrinho[♦]

Resumo

A estrutura da taxa de juros descreve a taxa de juros da economia para diferentes maturidades sendo fundamental em projeções econômico-financeiras e determinante dos preços dos títulos de renda fixa. A curva de juros é estimada por diferentes alternativas de modelos paramétricos, com destaque para a abordagem do modelo de Nelson e Siegel, e prevista pelo modelo de Nelson e Siegel dinâmico. Diferentes estudos comparam o desempenho dos modelos de previsão da curva de juros por métricas de desempenho preditivo. Este artigo estabelece uma regra de operação de contratos futuros de DI-1Dia e decisões de compra e venda avaliando o desempenho preditivo do modelo de Nelson e Siegel dinâmico pela rentabilidade gerada através da estratégia de negociação. Como resultado a estratégia gerou ganho e desempenho de retorno ajustado pelo risco semelhante aos verificados em portfólios de melhor performance em renda variável.
Palavras-chave: 1. Previsão da Estrutura da Taxa de Juros; 2. Contratos Futuros de Taxa de Juros; 3. Estratégias de Investimento.

Abstract

The interest rate structure describes the interest rate of an economy in different maturities, being fundamental in economic-financial projections and determining the prices of fixed income instruments. The yield curve is estimated by different parametric model alternatives, with relevance of the Nelson and Siegel model approach and prediction by the dynamic Nelson and Siegel model. Different studies compare the performance of yield curve forecasting models with predictive performance statistics. This article establishes an operating rule for DI-1Dia futures contracts and purchase, sale decisions and evaluation of the predictive performance of the dynamic Nelson and Siegel model based on the profitability generated through the trading strategy. As a result, the strategy generated gains and risk-adjusted return performance was similar to those selected for better performing portfolios of stock markets.
Keywords: 1. Yield Curve Forecasting; 2. Futures Contracts; 3. Trading Strategies.

[♣] Professor da Faculdade de Economia da UFF e do Programa de Pós-graduação em Economia (PPGE). E-mail: aboliveira@id.uff.br

[♦] Economista formado na Faculdade de Economia da UFF (Universidade Federal Fluminense). Foi bolsista de Monitoria de disciplinas de Finanças. Analista de Investimentos da Koli Capital (*kolicapital.com*). E-mail: marciovagner@id.uff.br

Introdução

Entender a dinâmica dos preços e retornos de ativos financeiros é uma das questões principais em finanças. Se o sistema financeiro é responsável pela liquidez das economias, permitindo a transmissão dela entre agentes deficitários e superavitários, os ativos financeiros são os instrumentos através dos quais essa interação realmente ocorre. Entre esses ativos, as taxas de juros de ativos de renda fixa representam um conjunto de variáveis de particular relevância as decisões financeiras.

Na macroeconomia, os juros aparecem como o custo de oportunidade para a demanda por moeda pelo motivo especulação, como um custo de oportunidade dos empresários ao analisar a eficiência marginal do capital e decidir o planejamento futuro do investimento agregado, como o preço relativo do consumo intertemporal nos modelos básicos de ciclo reais de negócios como em Kydland e Prescott (1982). Além de constituir o principal instrumento de política monetária utilizado por Bancos Centrais que, como o brasileiro, seguem o regime de metas para inflação (BOGDANSKI; TOMBINI; WERLANG; 2000).

Já no campo da Economia Financeira, em renda fixa a estrutura da taxa de juros, que descreve a taxa de juros para cada maturidade, determina os preços dos títulos de renda fixa. Em renda variável, as taxas de juros aparecem na moderna teoria de carteiras como um dos parâmetros que o investidor racional leva em consideração ao decidir alocar seus recursos entre o ativo livre de risco e o portfólio tangente. Por exemplo, na moderna teoria de carteiras, o portfólio de mercado nos modelos de equilíbrio no mercado de capitais, como o CAPM (SHARPE, 1964), equivale ao Portfólio Tangente e as decisões de alocação dos investidores, entre renda fixa e renda variável, situam-se sobre a Linha de Alocação no Mercado de Capitais (CAL – *Capital Allocation Line)*, conforme o nível de aversão ao risco do investidor.

A curva de juros é importante para agentes do mercado financeiro e da economia real no planejamento de suas decisões de investimento, bem como em modelos de gestão de risco. O modelo Nelson Siegel Dinâmico, por exemplo, é a base para a metodologia de construção das curvas de spread de crédito da ANBIMA, além de ser utilizado na metodologia de geração de cenários de risco da câmara de compensação e liquidação da B3.

As primeiras tentativas de criar um modelo para explicar o comportamento da ETTJ existem desde pelo menos a primeira metade do século XX, como em Durand (1942) e tinham o objetivo inicial de lidar com o problema de interpolação. A ETTJ não é diretamente observada, mas sim conhecida implicitamente através dos preços dos títulos de renda fixa subjacentes a curva de interesse (Curva prefixada, juros real, cupom cambial e entre outros).

Não existem títulos para todas as maturidades possíveis, o que gera uma dificuldade ao tentar precificar novos títulos com vencimento em datas diferentes daquelas já presentes nos títulos citados. Nesse sentido, os primeiros modelos da literatura tinham como principal objetivo resolver um problema de interpolação, fornecendo uma maneira de estimar a relação entre taxa de juros e maturidade com base nos dados de

títulos já negociados através de métodos de interpolação e permitindo estimar taxas para vencimentos não verificáveis empiricamente.

Entre esses modelos destacam-se: McCulloch (1975), que estima a curva de juros a partir de um *spline* polinomial cúbico sobre a curva de desconto (O valor presente dos títulos observados com relação ao seu valor de face). Apesar de produzir um ajuste interessante para as maturidades curtas e médias da curva, o modelo tem problemas em razão do spline cúbico não convergir em maturidades longas, o que vai contra o padrão dos títulos em geral observados no mercado.

Já Vasicek e Fong (1982) utilizam a especificação de um *spline* exponencial sobre a curva de desconto, a qual permite lidar com o problema de divergência do modelo anterior, mas recai em uma dificuldade adicional: as taxas de juros a termo estimadas podem ser negativas e isso vai contra as explicações econômicas tradicionais e do padrão observado historicamente nas mais diversas taxas de juros.

Em seguida, Nelson e Siegel (1987) constroem um modelo paramétrico com três fatores latentes no qual as taxas de juros a termo são entendidas como soluções de equações diferenciais, possuindo forma funcional exponencial. O modelo se mostrou capaz de ajustar diferentes formatos para as taxas de juros das *Treasurie Bills*, títulos públicos emitidos pelo Tesouro Americano, com liquidez no mercado secundário.

Svensson (1995) introduziu uma modificação no modelo de Nelson e Siegel, adicionando um quarto fator que permite que a curva estimada possua dois maxímos/ mínimos locais. Em razão da sua parcimônia, o modelo Nelson-Siegel-Svensson se tornou uma referência para praticantes do mercado financeiro ao redor do mundo, como por exemplo sendo utilizado na estimação das curvas de juros no Brasil com fatores publicados diariamente com pela ANBIMA (ANBIMA, 2024b).

O estudo do comportamento dinâmico das curvas de juros, com o foco em gerar previsões fora da amostra, tem como referência principal a abordagem estatística ou de fatores. Litterman e Scheinkman (1991), em um trabalho empírico também sobre as taxas de juros das *t-bills*, identificaram através da utilização da técnica de Análise de Componentes Principais (PCA) que três fatores latentes – chamados de *nível, inclinação* e *curvatura* – eram capazes de explicar mais de 90% das variações nas taxas correntes. Posteriormente, Diebold e Li (2006) encontram forte relação entre o comportamento dos coeficientes do modelo Nelson Siegel estimados ao longo do tempo e os fatores latentes de Litterman e Scheinkman.

Entre os avanços dos modelos Dynamic Nelson-Siegel (DNS) destaca-se Diebold et al (2006), mostrando que há relação significativa entre as variáveis macroeconômicas e os fatores latentes do modelo, além de implementar a estimação do modelo em etapa única através da representação em modelos de espaço-estado e estimação via filtro de Kalman.

No Brasil já existem aplicações de modelos de estimação da ETJ por fatores latentes, entre a quais podem ser citadas: Caldeira, Moura e Portugal (2010) testam se a utilização do filtro de Kalman é capaz de melhorar o desempenho preditivo para a curva de juros no Brasil com base nos dados de contratos futuros de DI1 Dia. Caldeira, Laurini

e Portugal (2010) utilizam técnicas de estimação bayesiana para estudar o problema de heterocedasticidade condicional em modelos de curvas de juros.

Carvalho e Moura (2013) mostram que o modelo DNS não apresentou bom desempenho preditivo para curva de juros reais (NTN-B) no Brasil e apresentam alternativa de especificação excluindo do modelo o fator de curvatura. Laurini e Mariani (2016) estudam o comportamento conjunto das curvas real e nominal no Brasil a partir de um modelo DNS com condições de não arbitragem entre o DI1 DIA e títulos do tipo Notas do Tesouro Nacional – Série B (NTN-B), gerando previsões para inflação e prêmio de risco no mercado brasileiro.

Esse trabalho, realiza uma aplicação de modelos de previsão para a curva de juros nas áreas de economia financeira e gestão de recursos. O objetivo é testar a viabilidade de uma estratégia de negociação em contratos futuros de taxas de juros no Brasil, utilizando os sinais gerados pelo modelo de Nelson-Siegel Dinâmico. A principal contribuição desse artigo é analisar o desempenho do modelo de Nelson e Siegel dinâmico para previsão da curva de juros em aplicações de estratégias de investimento em contratos futuros de DI-1Dia, avaliando o desempenho do modelo em termos de seu desempenho econômico. Diferente da literatura tradicional que se concentra em análise de desempenho preditivo baseadas em métricas de erros de previsão.

Propomos uma função objetivo que descreve os ganhos e perdas acumulados de negociação de contratos futuros de DI-1 estabelecendo sinais de compra e venda de contratos futuros de taxas de juros. Como resultado a estratégia teve performance de retorno ajustado pelo risco semelhante aos portfólios de renda variável de boa performance e rendimento acumulado que supera o investimento passivo de alocar toda a dotação de riqueza no benchmark CDI.

Após a introdução, este artigo apresenta o modelo de Nelson e Siegel estático e o modelo de Nelson e Siegel dinâmico na seção 2. Na seção 3 apresentamos a função objetivo da operação de contratos futuros de DI-1Dia para um horizonte de 1 período a frente, entre a entrada e saída de uma posição em contratos futuros. Na seção 4 apresentamos os dados e execução da estratégia. Na seção 5 descrevemos o desempenho da estratégia de negociação de contratos futuros de DI-1Dia proposta. O artigo encerra na seção 6 com as considerações finais.

2 Modelo de Nelson e Siegel Estático e Dinâmico.

O modelo de Nelson e Siegel tem duas versões. Foi incialmente aplicado para interpolação das taxas da estrutura da taxa de juros em uma data, estimando a taxa de juros para cada maturidade através da curva de juros estimada em um dia de negociação. Posteriormente foi aplicado para análise de previsões da curva de juros que vão vigorar em períodos de tempo futuro.

2.1 O modelo parcimonioso de Nelson e Siegel (1987)

O trabalho de Nelson e Siegel surgiu como um avanço na pesquisa por modelos de interpolação para a curva de juros. Segundo DIEBOLD e LI (2006), a maioria dos modelos predecessores utilizava de alguma forma a interpolação via *spline polinomial* (interpolação por polinômios em intervalos seccionados) sobre uma das curvas de renda fixa em tempo contínuo (valor presente, taxa à vista ou a termo).

Dois problemas principais tendem a aparecer quando essa abordagem é utilizada (NELSON e SIEGEL, 1987): Em primeiro lugar, há uma dificuldade inerente em representar a parte longa (maiores maturidades) da curva de juros, já que os polinômios tendem ao infinito (positivo ou negativo) quando a variável independente cresce indefinidamente. Adicionalmente, os poucos modelos que resolvem o primeiro problema recaem em taxas a termo negativas.

Em ambos os casos: taxas longas tendendo ao infinito e taxas de juros negativas, os modelos apresentavam características que divergiam dos fatos estilizados conhecidos na literatura sobre o comportamento das taxas de juros. O modelo NS se tornou um sucesso na literatura de finanças justamente por conseguir lidar com esses resultados com um arcabouço simples.

No modelo original de Nelson e Siegel, a curva de juros é dada por uma equação diferencial de segunda ordem, com duas raízes iguais, sobre a curva de juros a termo. Nesse caso, a curva a termo $f(\tau)$ é dada pela seguinte relação:

$$f(\tau) = \beta_1 + \beta_2 * exp(-\lambda\tau) + \beta_3 * [(\lambda\tau) * exp(-\lambda\tau)] \quad (1)$$

No artigo original, o que na equação anterior é a constante λ, aparece como $\frac{1}{\tau}$. Nesse trabalho usarei o símbolo λ para não gerar confusões com a letra grega designada para variável maturidade, bem como para seguir a especificação apresentada originalmente no modelo de Diebold e Li.

É possível recuperar a curva de juros à vista a partir de 1 utilizando a relação $y_t(\tau) = \int_0^\tau f_t(\tau)\, du$. E o resultado da integração será:

$$y(\tau) = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)\frac{1-exp(-\lambda\tau)}{\lambda\tau} - \beta_3 exp(-\lambda\tau) \quad (2)$$

Que é reescrito por Diebold e Li, como:

$$y(\tau) = \beta_1 1 + \beta_2\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_3\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) (3)$$

Em que $y(\tau)$ é a taxa de juros à vista (ao ano over com capitalização contínua) para o vencimento τ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ são os coeficientes a serem estimados e $\boldsymbol{\lambda}$ é um hiper parâmetro de decaimento com domínio nos números reais positivos.

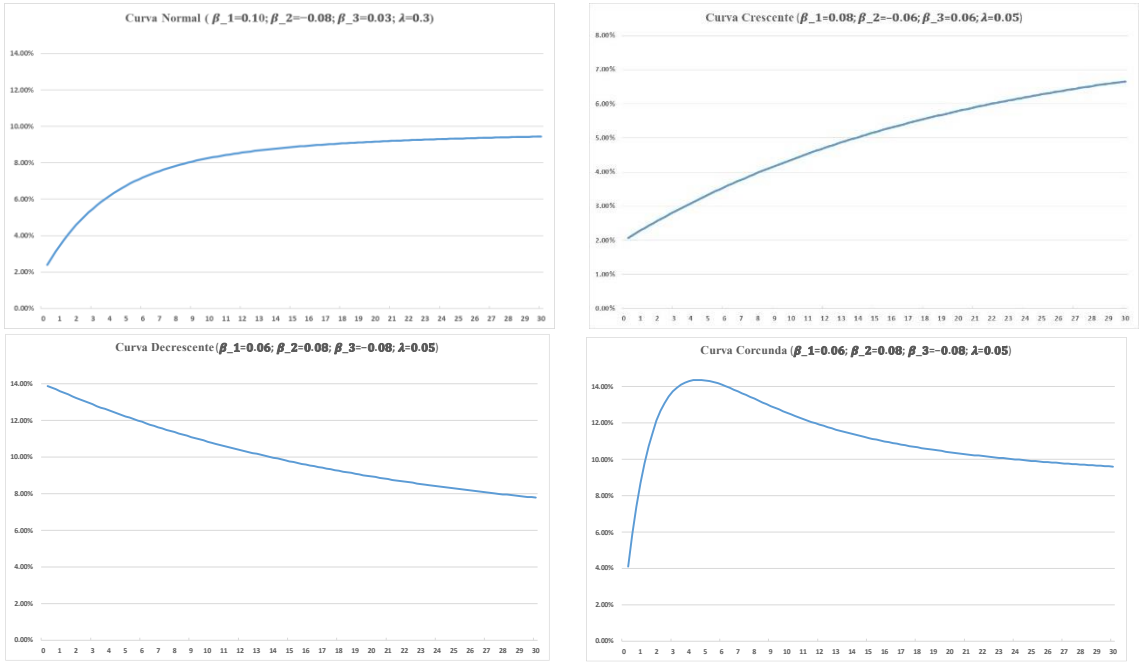
VARGA (2009) caracteriza o modelo de Nelson e Siegel como pertencente à classe de modelos de interpolação aproximada. Isso se refere ao fato de que, diferentemente do que acontece nas abordagens de *splines* polinomiais e exponenciais, aqui a curva estimada não necessariamente passa por todos os pontos presentes na amostra e os coeficientes do modelo são estimados por métodos de inferência tradicionais como mínimos quadrados ordinários ou mínimos quadrados generalizados.

O procedimento de estimação mais comum é testar um *grid* de valores para o parâmetro λ, estimando os coeficientes do modelo através de MQO e escolhendo como modelo final aquele que minimiza a soma do quadrado dos resíduos (Mínimos Quadrados Ordinários Condicionais). Uma alternativa é fixar $\boldsymbol{\lambda}$ exogenamente, pois o parâmetro determina o ponto de máximo (ou mínimo) local da curvatura da curva estimada.

Ao renunciar à necessidade de ajustar perfeitamente os dados da amostra, o modelo permite gerar curvas que se aproximam de maneira suave das taxas disponíveis, além de conseguir reproduzir os formatos clássicos de curvas de juros. A modelagem a partir de curvas exponenciais garante que a curva final não apresente o mesmo problema dos *splines* no que se refere a taxas longas (de)crescendo indefinidamente, e como a curva de taxas a termo subjacentes também é definida com forma exponencial, não há o risco das estimativas implicarem em taxas a termo negativas, superando também o problema encontrado no modelo de VASICEK e FONG (1982).

O modelo de Nelson e Siegel tem capacidade de representar diferentes formatos da curva de juros. Para exemplificar, as figuras a seguir foram geradas utilizando a equação (3), produzindo curvas com os formatos tradicionais: curva normal ($\beta_1 = 0.10$; $\beta_2 = -0.08$; $\beta_3 = 0.03$; $\lambda = 0.3$), curva monotonicamente crescente ($\beta_1 = 0.08$; $\beta_2 = -0.06$; $\beta_3 = 0.06$; $\lambda = 0.05$), curva monotonicamente decrescente ($\beta_1 = 0.06$; $\beta_2 = 0.08$; $\beta_3 = -0.08$; $\lambda = 0.05$), curva *humped* ou arqueada ($\beta_1 = 0.06$; $\beta_2 = 0.08$; $\beta_3 = -0.08$; $\lambda = 0.05$).

Figura 1 – Curvas do modelo NS



Uma interpretação possível para o modelo NS, que é utilizada para a versão dinâmica como em DIEBOLD e LI (2006) e que será utilizada nesse trabalho também, é de que na verdade o modelo apresenta uma estrutura de fatores para a curva de juros. Nesse caso, as partes pelas quais os coeficientes são multiplicados em (3) (1; $\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}$;

$\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}$) são os fatores de nível, inclinação e curvatura da curva, enquanto os coeficientes β_1, β_2, β_3 são as cargas fatoriais associadas a esses fatores. A Figura 2 apresenta a evolução dos fatores em função da maturidade, para o caso $\lambda = 0.5$.

Como o primeiro fator é uma constante, a influência do mesmo sobre as taxas não varia com as maturidades e por essa razão ele é interpretado na literatura como um fator de nível: aumentos em β_1 implicam em deslocamentos horizontal da curva, o que equivale a uma mudança no nível dela. Além disso, o primeiro fator também deve ser entendido como um fator de longo prazo, já que as influências dos outros dois fatores decrescem exponencialmente com τ, implicando que o limite de $y(\tau)$ no infinito é igual a β_1:

$$\lim_{\tau\to\infty} y(\tau) = \beta_1 \lim_{\tau\to\infty} 1 + \beta_2 \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_3 \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right)$$

Como $e^{-\lambda\tau}$ tende a zero quando a maturidade cresce indefinidamente, na fração $\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}$ o numerador tende a 1, enquanto o denominador cresce indefinidamente. Isso significa que os dois últimos limites da equação anterior são iguais a zero:

$$\lim_{\tau\to\infty} y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 * 0 + \beta_3 * 0 = \beta_1$$

Quanto ao segundo fator, podemos observar na Figura 2 que ele tem máxima influência nas curtíssimas maturidades e essa influência decresce exponencialmente com o aumento de τ. Dessa maneira, diz-se que ele determina o curto prazo da curva de juros. Mais característica ainda é a sua influência sobre a inclinação da ETJ, que podemos destacar através da seguinte relação:

$$\lim_{\tau\to0} y(\tau) = \beta_1 \lim_{\tau\to0} 1 + \beta_2 \lim_{\tau\to0}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_3 \lim_{\tau\to0}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right)$$

$$\lim_{\tau\to0} y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \lim_{\tau\to0}\left(\frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{\lambda}\right) + \beta_3\left[\lim_{\tau\to0}\left(\frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{\lambda}\right) - \lim_{\tau\to0} e^{-\lambda\tau}\right]$$

$$\lim_{\tau\to0} y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 * 1 + \beta_{3*} * [1-1]$$

$$\lim_{\tau\to0} y(\tau) = \beta_1 + \beta_2$$

Como o limite no infinito do segundo (e da primeira parte do terceiro) fator leva a uma indeterminação do tipo $^0/_0$, podemos resolver o limite acima aplicando a regra de L'Hopital nas duas últimas parcelas da primeira equação. Dessa forma, o segundo fator é responsável pela inclinação da curva pois a diferença entre as taxas paras as maturidades curtas e longas é dada justamente por $-\beta_2$:

$$y(\infty) - y(0) = \beta_1 - (\beta_1 + \beta_2) = -\beta_2$$

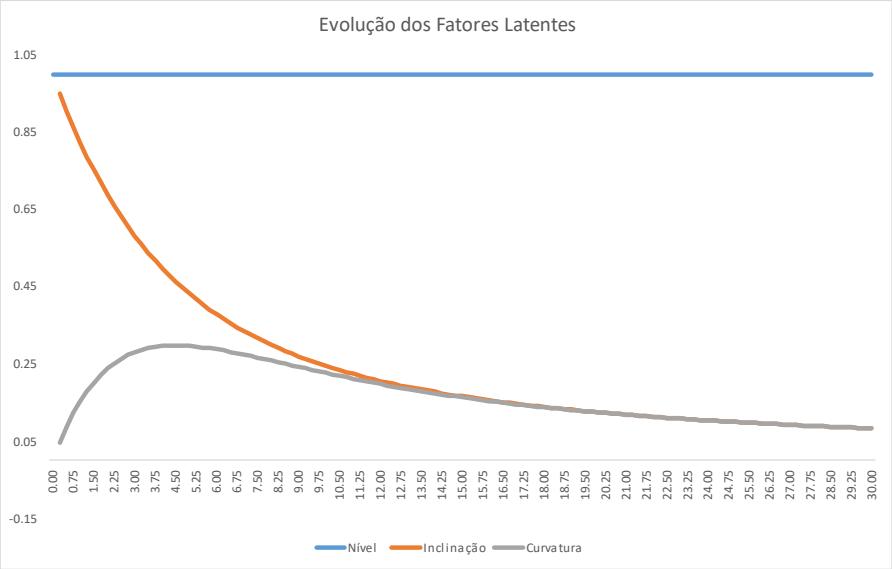
Assim, se β_2 for positivo, $y(0) > y(\infty)$ e a curva terá inclinação negativa e se β_2 for negativo, $y(0) < y(\infty)$ e a curva terá inclinação positiva.

Também pela Figura 2, destaca-se que o terceiro fator tem influência máxima numa porção intermediária da curva, mas que tende a zero tanto para valores pequenos quanto grandes e é por essa razão que ele é entendido como um fator de médio prazo. VARGA (2009) afirma que esse fator determina a curvatura da ETJ, que possui concavidade voltada para cima se β_3 for menor do que zero e concavidade para baixo se β_3 for maior do que zero. Uma forma de intuitiva de entender essa influência é notar que,

dados β_1 e β_2, a inclinação e o nível da curva estão definidos e assim β_3 define o impacto do fator de médio prazo sobre essa estrutura, "empurrando" o meio da curva para cima ou para baixo e gerando uma "barriga" – que é a concavidade - a depender do sinal de β_3.

Já o hiperparâmetro λ determina a velocidade decaimento dos fatores de inclinação e curvatura, já que quanto maior o seu valor, mais rápido é o decaimento de $e^{-\lambda\tau}$ em função do crescimento das maturidades. Como já provado que as curvas no modelo Nelson Siegel tendem a β_1 no final da curva, isso implica que o fator lambda determina o quão rápido as $y(\tau)$ se aproxima de B1. Varga (2009) também aponta para o fato de que lambda determina o ponto de máxima influência do fator curvatura, que pode inclusive ser um ponto de extremo local no caso de curvas com formato arqueada.

Figura 2 – Evolução dos Fatores Latentes do Modelo de Nelson e Siegel.



2.2 Modelo Nelson-Siegel Dinâmico

Apesar do modelo proposto por Nelson e Siegel apresentar uma evolução significativa dos modelos para a estrutura temporal das taxas de juros em uma abordagem de corte transversal – representação da relação entre taxas de juros e horizonte de investimento para um dado no momento tempo - a literatura ainda não havia apresentado os mesmos avanços do ponto de vista análise dinâmica – evolução temporal – da ETJ.

Os primeiros modelos dinâmicos para taxas de juro enfrentavam alguns dos seguintes problemas: Elevada complexidade analítica, pouca ênfase na capacidade preditiva, em detrimento da necessidade de ajuste perfeito de condições de não-arbitragem e dificuldade de representação dos fatos estilizados conhecidos na literatura sobre o comportamento histórico das taxas juros. A versão dinâmica do modelo de Nelson e Siegel consegue resolver ou mitigar esses desafios.

DIEBOLD e LI (2006) e DIEBOLD e RUDEBSUCH (2013, capítulo 1), apresentam alguns exemplos importantes de fatos estilizados:

i. Existe uma "Curva Média" que se aproxima do formato de uma curva de juros normal - crescente e côncava. As razões para isso em geral se

relacionam ao conceito de *term premia* que é o prêmio de risco pelo tempo de vencimento e pode ser explicado de múltiplas formas a depender da hipótese adotada;

ii. Apesar de existir uma forma mais comum, a ETJ pode se apresentar de múltiplas formas diferentes a depender do contexto macroeconômico;

iii. A volatilidade das taxas decai com a maturidade – taxas para vencimentos longos variam menos do que as para vencimentos mais curtos.

iv. Taxas de juros são altamente persistentes. Em geral, a taxa para uma mesma maturidade possui autocorrelação significativa mesmo para 12 meses de defasagem.

v. *Spreads* ou diferença entre taxas de diferentes maturidades não apresentam persistência elevada e são menos voláteis. Verifica-se em muitos casos o comportamento de reversão à média. Algumas estratégias de investimento inclusive se baseiam em buscar ganhos apostando nessa reversão quando os *spreads* entre taxas curtas e longa divergem de maneira significativa do comportamento histórico.

Além disso, outros trabalhos anteriores à versão dinâmica do modelo Nelson-Siegel já haviam apontado para o fato de que as curvas de juros parecem, de fato, responder a fatores latentes. Scheinkman e Litterman (1991) encontraram evidências de que existem três fatores latentes capazes de explicar 96% da variabilidade das taxas de juros. Esses fatores estariam associados justamente ao nível, inclinação e curvatura da curva de juros. Naquele contexto essa evidência era relevante tanto por apontar para a validade da descrição da ETJ utilizando alguma estrutura de modelos fatoriais, mas também por apresentar uma possiblidade maior de controle de exposição de risco que muitas vezes métricas tradicionais como *duration* do portfólio não são capazes de contemplar.

Nesse contexto, DIEBOLD e LI (2006) apresentaram uma interpretação do trabalho original de Nelson e Siegel em que os coeficientes do modelo são interpretados como esses fatores de nível, inclinação e curvatura (inclusive demonstrando que historicamente há correlação entre estimativas de β_1 e o retorno da *treasurie* de 10 anos, entre o β_2 e a diferença entre as taxas de três meses e 10 anos e entre β_3 e uma medida mais elaborada de concavidade da curva observada $(2y(24) - y(3) - y(120)$, com tau em meses).

Assim, o raciocínio é simples e impactante: Podemos tratar os fatores da curva de juros estimada pelo modelo Nelson-Siegel como fatores que evoluem ao longo do tempo e, ao modelar o comportamento dinâmico de β_1, β_2, β_3, podemos gerar projeções para os meses e a partir disso gerar projeções para toda a estrutura da curva no horizonte de projeção. Para contemplar essa dimensão temporal, alteramos a equação original adicionando o subscrito "t":

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t}1 + \beta_{2,t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}\right) + \beta_{3,t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}\right). \quad (4)$$

Existem duas formas mais comuns na literatura de estimar o modelo acima, a primeira é chamada de Nelson-Siegel Dinâmico em Dois Estágios (2S DNS), que consiste em duas etapas de estimação separando as dimensões temporal e de corte transversal:

Primeiro estimam-se os valores de β_1, β_2, β_3 para todos os dias da amostra de referência tal qual no modelo padrão e em seguida utiliza-se alguma especificação para modelar o comportamento dinâmico dos fatores através de modelos tradicionais de econometria de séries temporais.

No trabalho original, os autores utilizam modelos AR(1) individuais por fator, conforme:

$$\beta_{i,t+h} = a_i + b_i\beta_{i,t} + e_{i,t}\ ,\ e_{i,t} \sim N(0, \sigma_i^2)\ \ ,\ \ i = 1,2,3$$

Em que $\hat{a}_i$ *e* $\hat{b}_i$ são obtidos através de uma regressão de mínimos quadrados ordinários. Nesse caso o modelo pode ser considerado um AR(1) mesmo para um passo de tamanho *h*, caso a frequência dos dados na amostra de estimação seja *h*.

Uma alternativa possível, que aparece também em CARVALHO e MOURA (2013), é utilizar um modelo VAR(1) na forma reduzida para a representação do comportamento dinâmico dos fatores:

$$\boldsymbol{\beta_{t+h}} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A\beta_t} + \boldsymbol{e_t}\ ,\ \boldsymbol{e_t} \sim (\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Em que $\boldsymbol{\beta_t} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$, $\mathbf{0} = (0,0,0)^T$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ é matriz de variância e covariância dos choques das equações individuais do VAR na forma reduzida. Como o objetivo dessa modelagem é previsão de variáveis, não há necessidade de recorrer à forma estrutural e identificação. Apesar disso, DIEBOLD e LI (2006) destacam que a especificação em modelos VAR pode não ser a ideal para os modelos de fatores latentes, uma vez que não se espera que exista alta correlação entre os fatores, além da dificuldade adicional de trabalhar com muitos parâmetros – que é um problema comum em modelos VAR.

A outra opção para estimação, apresentada pela primeira vez em DIEBOLD et al (2006) é utilizar a representação de modelos de espaço-estado com estimação via filtro de Kalman. Nesse caso a estimação de todos os parâmetros é feita de maneira conjunta e elimina-se um problema comum no caso da primeira estratégia, que é a tendência de carregar erros de estimação da primeira para a segunda etapa.

Nesse trabalho será usada a versão 2SDNS por simplicidade.

3 O Contrato Futuro de DI1

Da mesma forma que existem derivativos sobre outras classes de ativos, como contratos futuros de commodities e opções sobre preços de ações, também existem derivativos associados ao mercado de renda fixa. Existem contratos futuros sobre taxas de juros, *swaps* associados à probabilidade de default (risco de crédito) de determinados emissores como os CDS (*Credit Default Swaps*) negociados no mercado americano e no Brasil existem até opções sobre às decisões do Comitê de Política Monetária (COPOM) do Banco Central do Brasil.

O principal derivativo relacionado às taxas de juros no Brasil é o DI1, que é um contrato futuro sobre a taxa média dos depósitos interfinanceiros de um dia. Trata-se na verdade de um conjunto de futuros de taxas de juros à vista para diferentes maturidades (que coincidem com as datas de vencimento dos contratos). Esses contratos são negociados na Bolsa de Mercadorias e Futuros da Bolsa de Valores de São Paulo (BM&FBOVESPA). A B3 divulga em seu site os dados diários das negociações do DI1

juntamente com outros contratos disponíveis para outras mercadorias (B3, 2024). Por exemplo, no pregão de 13/12/2024 foram negociados, entre outros, os contratos futuros DI1F28 – futuro de DI1 com vencimento em 01/01/2028 – e DI1F35 – futuro de DI1 com vencimento em 2035.

Contratos futuros são um tipo de derivativos. Derivativos são ativos financeiros cujos preços variam em função dos preços de outros ativos financeiros, ditos ativos objetos. Os contratos futuros são derivativos padronizados, negociados em pregão em bolsas de valores, que tem como função primordial travar o preço de outros ativos. São uma evolução dos contratos a termo, com o objetivo de eliminar o problema de risco de crédito de contraparte.

Contratos a termo são ativos financeiros que consistem num contrato de compra e venda de algum ativo (financeiro ou não), em que a compra e a venda ocorrem numa data futura – por isso *a termo* – a um preço determinado no ato do acordo. Os contratos a termo permitem que compradores e vendedores possam travar os preços de operações que ocorrerão no futuro, eliminando o risco de variação do preço do objeto de interesse ao longo do caminho.

Os contratos futuros são negociados baseados nos ganhos e perda dos ajustes diários. Diferentemente das operações em contratos a termo, que possuem liquidação apenas no vencimento no caso das operações em futuros, as operações são liquidadas diariamente, transferindo recursos entre compradores e vendedores nos contratos com base nas flutuações diárias dos preços. Assim, os ajustes pagos, por contrato, por investidores comprados são dados pelas seguintes fórmulas (considerando por simplificação que o multiplicador do contrato é igual a R$1,00):

(i) Ajuste de posição iniciada ao longo do dia:

$A_t = P_t - P_{entrada}$

(ii) Ajuste de posição aberta em *t-1*:

$A_t = P_t - P_{t-1}$

(iii) Ajuste de posição aberta e encerrada no mesmo dia (*day trade)*:

$A_t = P_{saída} - P_{entrada}$

(iv) Ajuste de posição aberta em *t-1* e encerrada em *t*:

$A_t = P_{saída} - P_{t-1}$

(v) Ajuste de posição na data de vencimento do contrato:

$A_t = X - P_{t-1}$

Em que, A_t é o ajuste diário referente ao pregão em *t*, P_t é o preço do ajuste do contrato futuro determinado pela média dos preços nas últimas horas de negociação e X é o preço do ativo objeto no vencimento do contrato. O ajuste para posições vendidas é o simétrico do ajuste do comprador ($A_{vendido} = -A_{comprado}$).

O mecanismo do ajuste equivale a liquidar diariamente todas as posições em aberto e estabelecer novos contratos, aos preços do ajuste da data anterior. Ao fazer isso, a bolsa diminui o risco de crédito, evitando que os investidores sejam obrigados a liquidar toda a diferença entre o preço de compra e o preço a vista somente no vencimento.

Adicionalmente, as bolsas de futuros exigem depósitos de margens e garantias para aqueles que assumem posições em futuros. Como não é necessário dispêndio de

volume financeiro algum para assumir posição nesses ativos, o investidor pode operar alavancado. Para controlar o risco de alavancagem das contrapartes, as bolsas exigem que os investidores deixem ativos líquidos (moeda corrente, títulos públicos e entre outros) como uma garantia para cobrir essa exposição dos investidores.

O ativo objeto do contrato futuro de DI1 são as taxas médias dos Depósitos Interfinanceiros (DI). Os Depósitos Interfinanceiros são títulos isentos dos impostos IOF e IR na fonte, emitidos por instituições financeiras e utilizados como lastros para operações interbancárias no mercado monetário, liquidados através da CETIP (Central de Custódia e Liquidação Financeira de Títulos). A taxa média dos Depósitos Interfinanceiros é apurada diariamente pela CETIP, tendo como referência apenas as taxas de operações prefixadas pactuadas por um dia útil (over) e essa é a taxa do DI (ou taxa CDI, ou simplesmente CDI). O CDI acompanha a taxa SELIC, apesar de comumente ser menor em alguns pontos bases do que a SELIC.

Apesar da verdadeira taxa livre de risco para a economia brasileira ser a taxa SELIC, é possível afirmar que a taxa do DI possui características de taxa livre de risco, já que ambas têm comportamento muito próximo. O mercado financeiro utiliza o CDI como *benchmark*, pois essa taxa é determinada pelo próprio mercado. Assim, é possível afirmar que o CDI é entendido como o custo de oportunidade para os investidores no mercado financeiro brasileiro.

No caso dos contratos de DI1, os investidores negociam qual será o retorno acumulado do CDI entre o presente e a data de vencimento do contrato, o que implica negociar uma taxa à vista. Para isso, os preços dos contratos são calculados com base no valor presente (preço unitário ou PU) de um título virtual prefixado com valor de face igual a 100.000. Temos então:

$$PU = \frac{100.000}{(1+i)^{du_{t,T}/_{252}}} \quad (5)$$

Em que $du_{t,T}$ é o número de dias úteis entre a data de negociação (inclusive) e a data de vencimento do contrato (exclusive) e i é a taxa ao ano over de negociação do DI1, base 100. A B3 divulga as cotações de fechamento (em PU) do DI1, utilizados para o cálculo dos ajustes diários.

Cabe destacar os jargões utilizados no mercado financeiro nacional. As negociações de DI1 no pregão eletrônico da B3 ocorrem em forma de taxas, mas os ajustes diários são calculados em termos de preço unitário e, como é típico de renda fixa, existe uma relação inversa entre preço e taxa de desconto. Nesse sentido, ao comprar um contrato de DI1, o investidor está assumindo posição **comprada** em taxas de juros e **vendida** em PU, a que se denomina posição **TOMADA**. De modo oposto, ao vender um contrato de DI1, o investidor está assumindo posição **vendida** em taxas de juros e **comprada** em PU, a que se denomina posição **APLICADA.**

Os cálculos dos ajustes diários são diferentes dos cálculos para futuros tradicionais. A diferença se dá pela necessidade de corrigir os preços de pregões diferentes pela taxa CDI de um dia – já que se trata de um contrato sobre taxas de juros, é preciso corrigir pelo valor do dinheiro no tempo.

Dessa forma, os ajustes por contrato para posições aplicadas (vendido em taxa e comprado em PU) são dados pelas seguintes relações:

(i') Ajuste de posição iniciada ao longo do dia:

$$A_t = P_{aj} - P_{entrada} = \frac{100.000}{\left(1 + i_{aj}\right)^{du_{t,T}/252}} - \frac{100.000}{\left(1 + i_{entrada}\right)^{du_{t,T}/252}}$$

(ii') Ajuste de posição aberta em *t-1*:

$$A_t = P_{aj,t} - P_{aj,t-1}(1 + CDI_{t-1})^{\frac{1}{252}}$$

(iii') Ajuste de posição aberta e encerrada no mesmo dia (*day trade)*:

$$A_t = P_{saída} - P_{entrada} = \frac{100.000}{\left(1 + i_{saída}\right)^{du_{t,T}/252}} - \frac{100.000}{\left(1 + i_{entrada}\right)^{du_{t,T}/252}}$$

(iv') Ajuste de posição aberta em *t-1* e encerrada em *t:*

$$A_t = P_{saída} - P_{aj,t-1}(1 + CDI_{t-1})^{\frac{1}{252}}$$

(v') Ajuste de posição na data de vencimento do contrato:

$$A_T = 100.000 - P_{aj,T-1}(1 + CDI_{T-1})^{\frac{1}{252}}$$

Em que A_t é o ajuste diário referente ao pregão da data *t;* P_{aj} e i_{aj} são o preço e a taxa de referência para o ajuste diário (calculados e divulgados pela B3); $P_{entrada}$, $P_{saída}$, $i_{entrada}$ e $i_{saída}$ são preços e taxas de negociados pelo investidor ao longo do pregão para assumir ou encerrar posições; CDI_{t-1} é a taxa CDI ao ano over na data $t-1$. O subscrito T foi usado para indicar o último dia de negociação. O ajuste para posições tomadas é o simétrico do ajuste do aplicador ($A_{tomado} = -A_{aplicado}$).

A cotação de um contrato de DI1 é de valores de reais para cada contrato. Por essa razão, não é necessário utilizar nenhum multiplicador sobre o preço dos contratos para auferir o valor financeiro dos ajustes diários.

3.1 Ganho e Perda em DI1

Outra diferença entre o DI1 e os futuros de outras mercadorias é sobre como se auferem ganhos e perdas em operações, principalmente quando se trata de carregar posições até o vencimento. Mais uma vez, a diferença recai sobre a necessidade de levar em consideração o custo do dinheiro no tempo e ajustar os valores em períodos diferentes pela taxa CDI, para tornar os valores comparáveis.

Na tabela a seguir é apresentada uma sequência de ajustes hipotéticos para uma posição comprada em PU (aplicada) com vencimento em N+1 dias úteis. Diferentemente do que foi apresentado nas fórmulas para os ajustes diários, aqui o CDI (c_i) é apresentado em formato ao dia útil. A coluna *Ajuste Corrigido* apresenta os ajustes carregados pelo CDI até data de vencimento. Como o número de dias úteis para cálculo do preço unitário negociado não leva em conta o dia do vencimento, essa será uma operação com N dias úteis de referência para precificação do contrato.

Somando todas as linhas da última coluna, temos o saldo corrigido dos ajustes diários de uma posição carregada até o vencimento, que nada mais é do que ganho ou

perda do investidor que assumiu a posição. Observa-se que para todas as linhas da tabela, exceto a primeira e a última, há termos iguais que aparecem somando num dia e subtraindo no dia seguinte: O preço de ajuste numa data aparecerá no dia seguinte e a diferença entre os termos (o fator CDI de um dia) não existe ao carregamos todos as parcelas pelo CDI de cada período.

Tabela 1 – Ajustes Diários do Contrato Futuro de DI-1Dia para Posição Mantida até o Vencimento.

Dia	CDI	Ajuste Diário	Ajuste Corrigido até o Vencimento
1	$\boldsymbol{c_1}$	$\boldsymbol{P_1 - PU}$	$\boldsymbol{P_1(1+c_1)(1+c_2)\dots(1+c_N) - PU(1+c_1)(1+c_2)\dots(1+c_N)}$
2	$\boldsymbol{c_2}$	$\boldsymbol{P_2 - P_1(1+c_1)}$	$\boldsymbol{P_2(1+c_2)(1+c_3)\dots(1+c_N) - P_1(1+c_1)(1+c_2)\dots(1+c_N)}$
3	$\boldsymbol{c_3}$	$\boldsymbol{P_3 - P_2(1+c_2)}$	$\boldsymbol{P_3(1+c_3)(1+c_4)\dots(1+c_N) - P_2(1+c_2)(1+c_3)\dots(1+c_N)}$
…	**…**	**…**	**…**
N	$\boldsymbol{c_N}$	$\boldsymbol{P_N - P_{N-1}(1+c_{N-1})}$	$\boldsymbol{P_N(1+c_N) - P_{N-1}(1+c_{N-1})(1+c_N)}$
N+1	$\boldsymbol{c_{N+1}}$	$\boldsymbol{100.000 - P_{N-1}(1+c_{N-1})}$	$\boldsymbol{100.000 - P_N(1+c_N)}$

Assim, todos os termos intermediários irão se eliminar, de modo que a soma dos ajustes corrigidos será igual a:

$$G/P_{vencimento} = 100.000 - PU(1+c_1)(1+c_2)\dots(1+c_N)$$

Seja CDI_N a taxa ao ano over equivalente à rentabilidade do CDI ao longo do período tal que $(1+c_1)(1+c_2)\dots(1+c_N) = (1+CDI_N)^{N/252}$ e retomando (5) temos que:

$$G/P_{vencimento} = PU(1+i_{pré})^{\frac{N}{252}} - PU(1+CDI_N)^{\frac{N}{252}}$$

$$G/P_{vencimento} = PU\left[(1+i_{pré})^{\frac{N}{252}} - (1+CDI_N)^{\frac{N}{252}}\right] (6)$$

Para posições tomadas em DI, o ganho ou perda será o simétrico, assim como para os ajustes diários.

Assim, evidenciamos a principal característica do contrato: Assumir posição em futuro de DI1 é apostar entre uma taxa prefixada – aquela negociada no início da posição, e a taxa média do CDI no período. Conforme (6) se o retorno do CDI for menor do que a taxa contratada o investidor tem ganho (perda) na posição aplicada (tomada). Isso equivale a um *swap* entre uma taxa prefixada e outra pós-fixada. Por essa razão, os contratos de DI1 são uma referência para precificação de ativos prefixados no mercado financeiro brasileiro.

Uma interpretação válida sobre o ganho com DI1 é que se trata de um contrato futuro em que as informações disponíveis no ato de negociação são o oposto do que ocorre com um futuro comum. O valor 100.000, que é o preço a vista do contrato no vencimento é conhecido desde o início, enquanto o preço a termo do contrato, que é o PU da operação, levado até o vencimento não é conhecido em t, uma vez que a não se sabe qual será o CDI

médio do período. Assim, temos o contrário do que acontece com os futuros tradicionais: O investidor começa a operação desconhecendo o preço a termo e sabendo o preço a vista do contrato (em termos de valor futuro).

Outra característica relevante que pode ser destacada com a relação acima é o fato de que o investidor que opera em DI1 só possui ganho financeiro pelo diferencial de rentabilidade entre as taxas. Apesar de características análogas às de ativos de renda fixa prefixados tradicionais, se a taxa do CDI no período coincidir com aquela contratada inicialmente, o ganho do investidor é zero, diferentemente do que ocorreria caso estivesse carregando um ativo de renda fixa prefixado.

De forma análoga ao que fizemos para o caso até o vencimento, também podemos estender os resultados para o carregamento de posições até qualquer momento antes do vencimento.

Proposição: *O Ganho/Perda de uma posição vendida em contrato futuro de DI-1Dia encerrada antes do vencimento, expresso em função das taxas de juros de entrada e saída é dado por:*

$$G/P_{intermediário} = PU\left[\frac{(1+i_{entrada})^{\frac{N}{252}}}{(1+i_{saída})^{\frac{N-h}{252}}} - (1+CDI_h)^{\frac{h}{252}}\right] \quad (7)$$

Demonstração: Considere um investidor que entra no contrato futuro de DI-1Dia na data 1 e encerrou a posição após *h* dias uteis, com h< N. Se no dia 1 o cálculo do PU de entrada contempla N dias úteis, o preço de saída P_h é calculado com base em N – h dias úteis. Sejam $i_{entrada}$ e $i_{saída}$ as taxas negociadas para iniciar e encerrar a posição, teremos os ajustes diários de acordo com a tabela 2.

Tabela 2 – Ajustes Diários do Contrato Futuro de DI-1Dia para posições Encerradas Antes do Vencimento.

Dia	CDI	Ajuste Diário	Ajuste Corrigido até o Vencimento
1	c_1	$P_1 - PU$	$P_1(1+c_1)(1+c_2)\dots(1+c_h) - PU(1+c_1)(1+c_2)\dots(1+c_h)$
2	c_2	$P_2 - P_1(1+c_1)$	$P_2(1+c_2)(1+c_3)\dots(1+c_h) - P_1(1+c_1)(1+c_2)\dots(1+c_h)$
3	c_3	$P_3 - P_2(1+c_2)$	$P_3(1+c_3)(1+c_4)\dots(1+c_h) - P_2(1+c_2)(1+c_3)\dots(1+c_h)$
…	**…**	…	…
h-1	c_{h-1}	$P_{h-1} - P_{h-2}(1+c_{h-1})$	$P_{h-1}(1+c_h) - P_{h-2}(1+c_{h-1})(1+c_h)$
h	c_h	$P_h - P_h(1+c_h)$	$P_h - P_{h-1}(1+c_h)$

Assim para chegar ao G/P que forma o saldo acumulado da posição vendida em futuro de DI um dia somamos os ajustes diários corrigidos pela taxa DI até a data h de encerramento da posição. No saldo acumulado dos ajustes diários corrigidos os termos intermediários de ajustes corrigidos pelo CDI se cancelam e teremos um saldo igual a:

$$G/P_{intermediário} = P_h - PU(1 + c_1)(1 + c_2) \dots (1 + c_h)$$

Seja CDI_h a taxa efetiva do DI no período com posição no contrato, tal que $(1 + c_1)(1 + c_2) \dots (1 + c_h) = (1 + CDI_h)^{h/252}$ e dado o cálculo do ajuste pela taxa de saída, temos que:

$$G/P_{intermediário} = \frac{100.000}{(1 + i_{saída})^{N-h}} - PU(1 + CDI_h)^{h/252}$$

Usando (5) no primeiro termo, para descrever o valor de resgate de 100 mil como o PU de entrada levado até o vencimento pela taxa de entrada contratada,

$$G/P_{intermediário} = \frac{PU(1+i_{entrada})^{\frac{N}{252}}}{(1+i_{saída})^{\frac{N-h}{252}}} - PU(1 + CDI_h)^{h/252}.$$

Portanto:

$$G/P_{intermediário} = PU\left[\frac{(1+i_{entrada})^{\frac{N}{252}}}{(1+i_{saída})^{\frac{N-h}{252}}} - (1 + CDI_h)^{h/252}\right].$$

■

Essa relação é importante por dois motivos. Em primeiro lugar, ela revela que, da mesma forma que ocorre com posições tradicionais em renda fixa, apesar das condições de retorno até o vencimento serem conhecidas no momento da compra, caso o investidor saia da posição antes do vencimento seu retorno será impactado pelas condições do mercado. Que nesse caso estão representadas em $i_{saída}$, que é a nova expectativa do mercado para o CDI no período entre h e N+1.

A outra consequência é que os investidores podem se utilizar de estratégias para especular em DI1 se esperam reprecificação relevante nas taxas negociadas. Com base em (7), se o investidor espera uma queda nas taxas futuras que mais do que compense o carrego do CDI no período, poderá ter ganho financeiro assumindo posição aplicada em taxa. Caso sua expectativa seja oposta, o investidor pode assumir posições tomadas.

De todo modo, o retorno financeiro continua dependendo do ganho relativo ao CDI no período. Se $i_{entrada} = i_{saída} = CDI_h$, o investidor não terá ganhos no período. E mesmo que a taxa de saída seja menor do que a taxa de entrada, um investidor aplicado ainda pode estar perdendo, se ambas forem suficientemente inferiores ao retorno do CDI no período.

Corolário: *O Ganho/Perda de uma posição vendida em contrato futuro de DI-1Dia é igual ao diferencial da taxa de juros a vista implícita entre as taxas de entrada e saída do contrato e a taxa CDI, multiplicado pelo PU.*

$$G/P_{intermediário} = PU\left[(1 + i_{implícita})^{h/252} - (1 + CDI_h)^{h/252}\right]. \qquad (7')$$

Demonstração: A partir do resultado da equação 7,

$G/P_{intermediário} = PU\left[\frac{(1+i_{entrada})^{\frac{N}{252}}}{(1+i_{saída})^{\frac{N-h}{252}}} - (1 + CDI_h)^{\frac{h}{252}}\right]$. Implica em:

$G/P_{intermediário} = PU\left[(1 + i_{implícita})^{h/252} - (1 + CDI_h)^{h/252}\right]$.

Seja o conceito de taxa de juros a termo, a taxa de juros implícita em taxas de juros a vista negociadas hoje para diferentes vencimentos. A taxa de juros a termo é uma taxa negociada hoje, mas que remunera fluxos de caixa que começam e terminam em períodos de tempo futuros. A taxa a termo é expressa descontando a taxa de juros a vista de maior maturidade pela taxa de juros a vista de menor maturidade, tendo como resultado a taxa de juros a termo entre o final do primeiro período e o início do segundo período.

Assim a taxa a termo entre dois períodos t1 e t2 no futuro é calculada pela relação:

$$\left(1 + r_{1,2}\right)^{t2-t1} = \frac{(1 + i_2)^{t2}}{(1 + i_1)^{t1}}$$

Descontando duas taxas de juros a vista chegamos a taxa de juros a termo, uma taxa de juros que remunera entre um período que começa e termina no futuro. A partir desta expressão, considerando a taxa de juros a vista negociada hoje para uma maturidade longa descontada pela taxa de juros a vista que será negociada para mesma maturidade num período futuro – a taxa de juros a termo, chegamos a uma taxa de juros a vista implícita.

Substituindo $r_{1,2}$ por $i_{saída}$, i_2 por $i_{entrada}$, $t2$ por N/252 e $t1$ por h/252, podemos encontrar uma relação para a taxa à vista entre as datas de início e encerramento da operação (chamaremos de $i_{implícita}$):

$$(1 + i_{saída})^{\frac{N-h}{252}} = \frac{(1 + i_{entrada})^{\frac{N}{252}}}{(1 + i_h)^{\frac{h}{252}}}$$

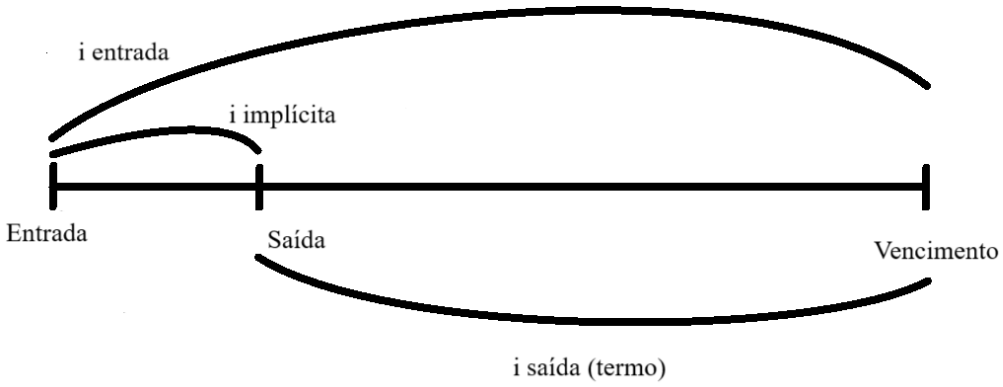
$$\left(1 + i_{implícita}\right)^{\frac{h}{252}} = \frac{(1 + i_{entrada})^{\frac{N}{252}}}{(1 + i_{saída})^{\frac{N-h}{252}}}$$

Substituindo a relação acima em (7), temos outra forma de expressar o G/P de posição em futuro de DI encerrada antes do vencimento:

$$G/P_{intermediário} = PU\left[\left(1 + i_{implícita}\right)^{\frac{h}{252}} - (1 + CDI_h)^{h/252}\right]. \quad \blacksquare$$

Uma interpretação possível para essa relação é observar que do ponto de vista da data inicial da operação $i_{saída}$ é uma taxa a termo (Figura 3), já que é a taxa que remunera o PU de ajuste entre a data de saída e o vencimento do contrato (entre dois momentos no futuro). Assim, o retorno da posição em DI1 encerrada antes do vencimento depende da comparação entre a taxa de juros à vista entre a data inicial e final da operação (implícita entre $i_{entrada}$ e $i_{saída}$) e a taxa CDI vigente no meio do caminho. A figura 3 abaixo ajuda na visualização.

Figura 3 – Taxa a vista implícita e a termo na negociação de Futuro de DI-1Dia.



Assim, podemos dizer que uma posição encerrada antes do vencimento aplicada em DI1 está comprada em PU, vendida na taxa à vista entre hoje e o vencimento, mas também vendida na taxa à vista entre e hoje e um ponto futuro intermediário. Essa taxa é gerada justamente pelo "desconto" entre a taxa a vista (conhecida no momento da operação) e a taxa a termo esperada.

Assumimos posição vendida em taxa (comprada em PU) por um período *h* sempre que a taxa negociada no mercado futuro até o vencimento descontada pela taxa prevista no próximo período até o vencimento, que descreve a taxa à vista entre o período inicial (t) e seguinte (h) prevista ao manter posição no contrato, for maior que a taxa de juros que representa o custo de oportunidade do dinheiro no tempo, que é o CDI.

Assumimos posição comprada em taxa (vendido em PU) por um período *h* sempre que a taxa negociada no mercado futuro descontado pela taxa prevista para *h* até o vencimento do contrato, que descreve a taxa à vista prevista ao manter a posição no contrato por um período de tamanho h, for inferior ao custo de oportunidade do dinheiro no tempo.

Assim entramos vendidos em Futuro de DI-1Dia quando a o prêmio esperado da taxa a vista contratada até o encerramento da posição for maior que a taxa CDI, que representa o custo de carregamento para o horizonte de negociação, realizando ganho quando as taxas caem. E entramos comprados em Futuro de DI-1Dia quando o prêmio esperado da taxa de juros a vista for menor que a taxa CDI, realizando ganho quando as taxas de juros sobem.

Esse trabalho apresenta simulação de uma estratégia de negociação que combina (7) e as projeções do modelo de Nelson-Siegel Dinâmico, de modo que $i_{saída}$ é a taxa projetada pelo modelo. Assim, obtemos um $\widehat{G/P}_{intermediário}$ estimado para os contratos e a partir dessa estimativa temos a seguinte regra de negociação:

venda - são emitidos sinais de venda de taxa (compra de PU) se $\widehat{G/P}_{intermediário} > 0$;

compra - são emitidos sinais de compra de taxa (venda de PU) se $\widehat{G/P}_{intermediário} < 0$;

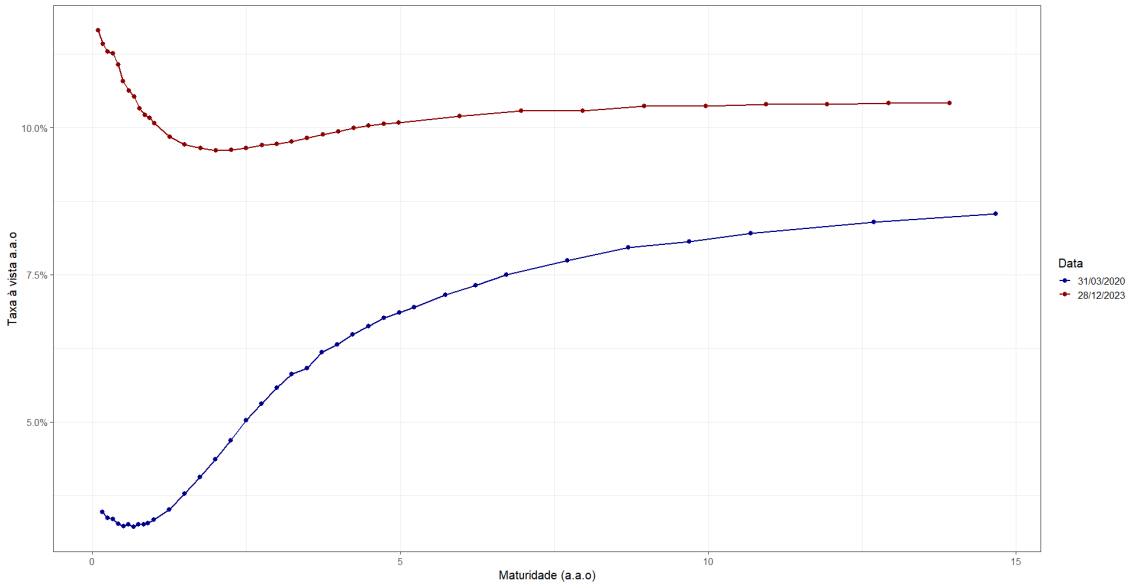
cdi - mantem-se posição aplicada em cdi, sem operar futuros, se $\widehat{G/P}_{intermediário} = 0$.

3.2 Curva de Juros DI1

Retomando o conceito de Estrutura Temporal das Taxas de Juros, podemos dizer que existe uma curva de juros dos futuros de DI1, dado que os requisitos são atendidos, mesmo que o ativo negociado envolva um PU virtual:

- É possível identificar um conjunto $(\tau, y_t(\tau))$ entre maturidades e taxas de juros para diferentes maturidades. O gráfico 1 apresenta uma representação visual para contratos de DI1 disponíveis no pregão de duas datas diferentes. A relação entre as taxas de fechamento e das maturidades (ao ano over – com base 252) exemplificam a curva de juros para DI1.
- Título do tipo cupom zero: Como mostrado por (5), o título virtual a que o contrato faz referência é um título cupom-zero, com valor de face igual a 100.000.

Gráfico 1 – Curvas de Juros do Contrato Futuro de DI-1Dia negociadas em 31/03/2020 e 28/12/2023.



A possibilidade de interpretar o conjunto das taxas negociadas no DI1 como uma curva de juros permite a aplicação do arcabouço de Nelson-Siegel Dinâmico para projeção das taxas dos contratos individualmente.

4 Descrição dos Dados e Execução da Estratégia

Esse trabalho avalia o desempenho de uma estratégia de negociação de ativos que combina os conceitos das condições de ganho e perda em contratos futuros de DI1 e as projeções geradas pelo modelo Nelson-Siegel Dinâmico.

Nesse sentido, a metodologia pode ser separada em duas etapas principais: a primeira se refere ao processo de estimação do modelo em dois estágios (2SDNS); a

segunda se refere à simulação de uma estratégia de investimentos (*backtesting)* a partir desses resultados obtidos na primeira etapa.

4.1 Bases de Dados

O trabalho aplica a versão do modelo que leva em consideração a estimação dos fatores latentes na estrutura da taxa de juros. Os dados necessários foram aqueles referentes ao histórico de negociação dos próprios contrato futuros, disponíveis no Resumo Estatístico do Sistema Pregão do site da B3.

A amostra escolhida vai de 28/12/2006 (último dia de negociação de 2006) até 31/10/2024 (último dia negociação do mês imediatamente anterior à elaboração do presente trabalho). A escolha pelo ano de 2006 é porque foi ao longo desse ano que passaram a ser negociados contratos de 15 anos para o DI1 e a escolha pelo último dia do ano reside na busca por facilitar comparações de fechamento de ano contra ano, que é o padrão para divulgação de rentabilidade de estratégias no mercado financeiro brasileiro.

O quadro 1 mostra um exemplo da base de dados para uma das datas disponíveis (31/10/2024), em que as colunas contém: contrato = código de negociação do respectivo contrato, ajuste = PU de ajus te naquela respectiva data, volume = volume de negociação do contrato, vencimento = data de vencimento, du_vencimento = número de dias úteis entre a data de negociação (inclusive) e a data de vencimento (exclusive), maturidade_aa = tempo até o vencimento calculado em base ao ano over (du_vencimento/252), taxa_aao = taxa de juros ao ano over calculada através da relação (5), taxa_aacc = taxa de juros ao ano com capitalização contínua.

Os modelos foram estimados utilizando os pares (maturidade_aa, taxa_aacc) e ao calcular as projeções foram recuperadas as taxas ao ano over. Foram retirados da base de dados os contratos para os quais ajuste = 100.000 (na data de vencimento, em que o título não pode ser mais negociado) ou que estivessem a menos de 21 dias úteis (aproximadamente um mês útil) do vencimento.

Também foi necessário coletar o histórico diário da taxa média dos depósitos financeiros para calcular os ajustes diários da estratégia simulada. Os dados do CDI foram coletados na plataforma IPEADATA.

Quadro 1 – Taxas de Juros Negociadas nos Contratos Futuros de DI-1Dia em 31/10/2024.

data	contrato	ajuste	volume	vencimento	du_vencimento	maturidade_aa	taxa_aao	taxa_aacc
31/10/2024	X24	99,959.85	1,780,384,504.00	01/11/2024	1	0.00	10.65	10.12
31/10/2024	Z24	99,172.19	10,430,646,650.00	01/12/2024	19	0.08	11.66	11.03
31/10/2024	F25	98,275.98	15,646,374,585.00	01/01/2025	40	0.16	11.58	10.96
31/10/2024	G25	97,321.88	1,048,827,636.00	01/02/2025	62	0.25	11.67	11.03
31/10/2024	H25	96,425.85	516,740,590.00	01/03/2025	82	0.33	11.83	11.19
31/10/2024	J25	95,567.99	9,660,748,050.00	01/04/2025	102	0.40	11.85	11.20
31/10/2024	K25	94,655.11	489,112,047.00	01/05/2025	121	0.48	12.12	11.44
31/10/2024	M25	93,699.33	75,714,805.00	01/06/2025	142	0.56	12.24	11.55
31/10/2024	N25	92,779.20	15,338,337,414.00	01/07/2025	163	0.65	12.28	11.59
31/10/2024	Q25	91,728.43	23,667,146.00	01/08/2025	186	0.74	12.41	11.70
31/10/2024	U25	90,775.61	19,701,065.00	01/09/2025	207	0.82	12.50	11.78
31/10/2024	V25	89,773.46	4,537,684,214.00	01/10/2025	229	0.91	12.61	11.87
31/10/2024	X25	88,742.96	0.00	01/11/2025	251	1.00	12.74	11.99
31/10/2024	F26	86,935.71	32,500,611,597.00	01/01/2026	292	1.16	12.84	12.08
31/10/2024	J26	84,319.68	2,310,477,804.00	01/04/2026	354	1.40	12.91	12.14
31/10/2024	N26	81,820.34	5,593,562,618.00	01/07/2026	415	1.65	12.96	12.18
31/10/2024	V26	79,263.62	1,458,787,443.00	01/10/2026	480	1.90	12.98	12.20
31/10/2024	F27	76,943.14	32,018,560,995.00	01/01/2027	541	2.15	12.99	12.21
31/10/2024	J27	74,714.26	333,625,863.00	01/04/2027	602	2.39	12.98	12.20
31/10/2024	N27	72,454.23	1,878,830,900.00	01/07/2027	665	2.64	12.99	12.21
31/10/2024	V27	70,191.67	91,247,737.00	01/10/2027	730	2.90	13.00	12.22
31/10/2024	F28	68,102.79	6,862,011,067.00	01/01/2028	792	3.14	13.00	12.22
31/10/2024	J28	66,055.76	18,763,424.00	01/04/2028	855	3.39	13.00	12.22
31/10/2024	N28	64,105.52	1,658,712,125.00	01/07/2028	916	3.63	13.01	12.23
31/10/2024	V28	62,148.84	18,835,598.00	01/10/2028	980	3.89	13.01	12.23
31/10/2024	F29	60,417.70	13,261,698,767.00	01/01/2029	1040	4.13	12.99	12.21
31/10/2024	J29	58,678.02	61,490,262.00	01/04/2029	1101	4.37	12.98	12.20
31/10/2024	N29	56,925.99	84,281,595.00	01/07/2029	1164	4.62	12.97	12.20
31/10/2024	V29	55,207.70	99,521,337.00	01/10/2029	1229	4.88	12.95	12.18
31/10/2024	F30	53,584.19	7,817,568,950.00	01/01/2030	1289	5.12	12.97	12.20
31/10/2024	F31	47,564.27	3,034,555,782.00	01/01/2031	1541	6.12	12.92	12.15
31/10/2024	F32	42,263.45	48,356,541.00	01/01/2032	1793	7.12	12.87	12.10
31/10/2024	F33	37,571.83	1,215,194,527.00	01/01/2033	2045	8.12	12.82	12.06
31/10/2024	F34	33,547.16	43,318,832.00	01/01/2034	2296	9.11	12.74	11.99
31/10/2024	F35	29,868.99	844,069,040.00	01/01/2035	2544	10.10	12.72	11.97
31/10/2024	F36	26,590.78	0.00	01/01/2036	2793	11.08	12.69	11.95
31/10/2024	F37	23,585.22	0.00	01/01/2037	3046	12.09	12.69	11.95
31/10/2024	F38	20,959.08	0.00	01/01/2038	3295	13.08	12.69	11.95
31/10/2024	F39	18,607.70	0.00	01/01/2039	3546	14.07	12.69	11.95

4.2 O Modelo Nelson-Siegel Dinâmico em Dois estágios

A versão em dois estágios do modelo de fatores latentes para taxas de juros consiste, primeiramente, em estimar a curva que melhor se ajusta a cada uma das datas disponíveis na base de dados e, em seguida, projetar a trajetória desses fatores latentes. Na etapa de estimação dos fatores por data, são geradas séries históricas para os fatores de nível, inclinação e curvatura. Essas séries, por sua vez, são modeladas utilizando técnicas de econometria de séries temporais, permitindo projetar suas respectivas trajetórias. Assim, ao prever a dinâmica dos fatores latentes, projeta-se indiretamente a estrutura temporal das taxas de juros como um todo.

A principal justificativa para adotar a abordagem de dois estágios em vez de utilizar a modelagem em espaço-estado com estimação via filtro de Kalman é a maior simplicidade computacional. A implementação das rotinas de otimização associadas à máxima verossimilhança nos modelos em espaço-estado tende a ser significativamente mais complexa.

Ambas as etapas foram realizadas com dados em frequência semanal, buscando equilibrar custos operacionais e impacto de eventos pontuais. Operar diariamente elevaria substancialmente os custos de transação na etapa de execução da estratégia, um aspecto que não foi considerado neste estudo. Por outro lado, a frequência semanal reduz o efeito das decisões do COPOM sobre a taxa SELIC e, consequentemente, sobre o CDI, mitigando as oscilações entre o ganho esperado e o ganho realizado em uma posição.

Mudanças no CDI durante o período podem impactar os resultados de ganho ou perda em contratos futuros de DI. Por exemplo, um aumento na SELIC decidido pelo COPOM eleva a taxa média do CDI, reduzindo o ganho de uma posição aplicada. A utilização de frequência semanal minimiza esse impacto, pois as posições são ajustadas em maior frequência, reduzindo a exposição a taxas alteradas durante o período. Além disso, essa divergência ocorre apenas nas semanas em que há reuniões do Comitê de Política Monetária do Banco Central.

Para compor a amostra, foram selecionados os últimos dias úteis de cada semana disponível, totalizando 931 datas.

4.2.1 Estimação do modelo em corte transversal

Tradicionalmente, a estimação do modelo Nelson-Siegel é feita através de mínimos quadrados ordinários e um dos elementos que diferencia os trabalhos na literatura é a abordagem para a escolha do hiperparâmetro de decaimento exponencial λ.

Nesse trabalho, os modelos em corte transversal foram estimados de forma independente para cada uma das semanas da amostra e a escolha do hiperparâmetro segue uma das alternativas citadas por VARGA (2009), que consiste em realizar busca exaustiva do melhor valor de λ_t em um intervalo razoável. No caso, o intervalo de escolha foi]0,3] com precisão de duas casas decimais. Isto é (0,01; 0,02; 0,03; ...; 2,98; 2,99; 3,00).

Assim, para cada uma das semanas na amostra, foi estimado um modelo com a forma funcional de Nelson-Siegel, em que os fatores latentes variam para cada valor de λ no intervalo acima. Os modelos são estimados por mínimos quadrados ordinários segundo as formas funcionais:

$$y(\tau) = \beta_1 1 + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) + u; u \sim IID(0, \sigma^2)$$

Variando λ, os fatores latentes $\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right)$ e $\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right)$ assumem valores distintos e comportamentos diferentes, os coeficientes estimados variam e os resíduos também.

O valor escolhido para o hiperparâmetro λ é aquele cujo respectivo modelo apresenta o menor valor para a soma dos quadrados dos resíduos (SQR) $\left(\min_{\lambda_t}\{y_t(\tau_i) - \widehat{y_t}(\tau_i, \lambda_t)\}\right)$, adotando mínimos quadrados condicionais.

Como exemplo, o gráfico 2 apresenta os pares de λ_t x SQR em 31/10/2024. Nesse dia o melhor valor para λ_t é igual a 1.12.

O procedimento descrito foi realizado através de rotina em linguagem de programação *The R Project for Statistical Computing*. Ao final obtivemos quatro séries temporais: Uma com a sequência dos valores ótimos encontrados para λ_t (Gráfico 4) e outras três séries referentes às sequências de fatores latentes (nível, inclinação e curvatura) estimados semanalmente com base nos valores ótimos de λ_t (Gráfico 3).

Gráfico 2 – Busca exaustiva do parâmetro de decaimento (31/10/2024)

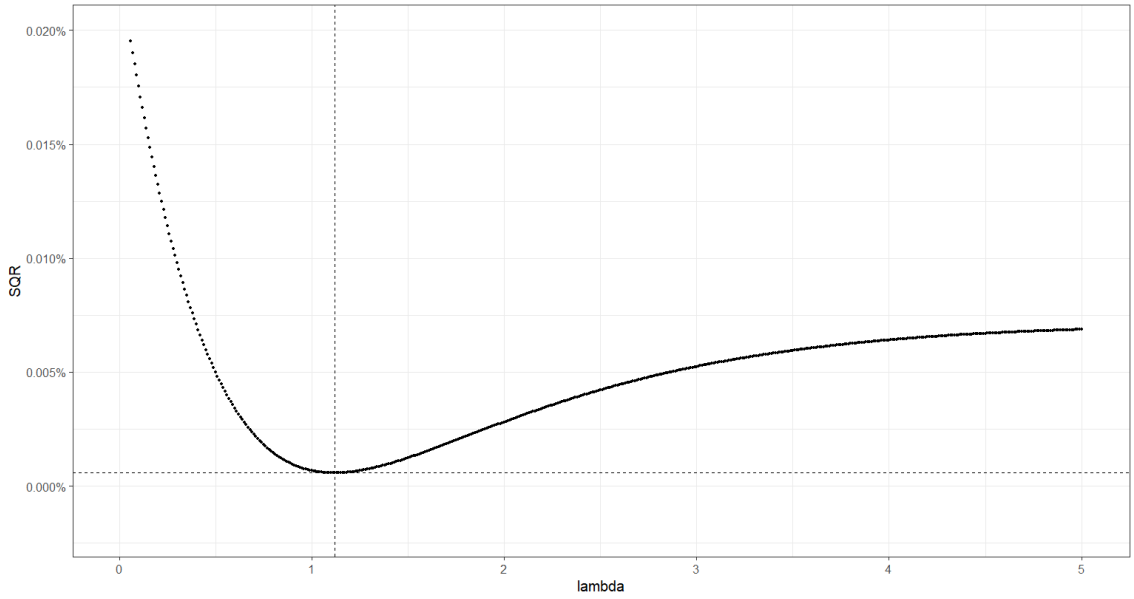


Gráfico 3 – Séries dos fatores estimados em *cross section.*

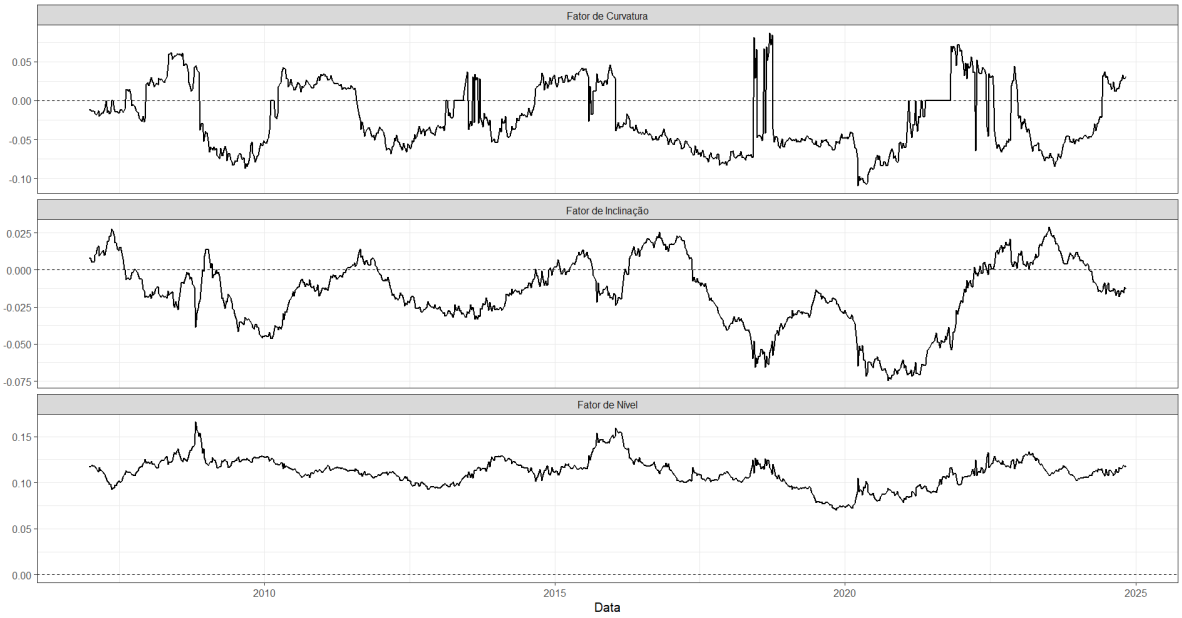
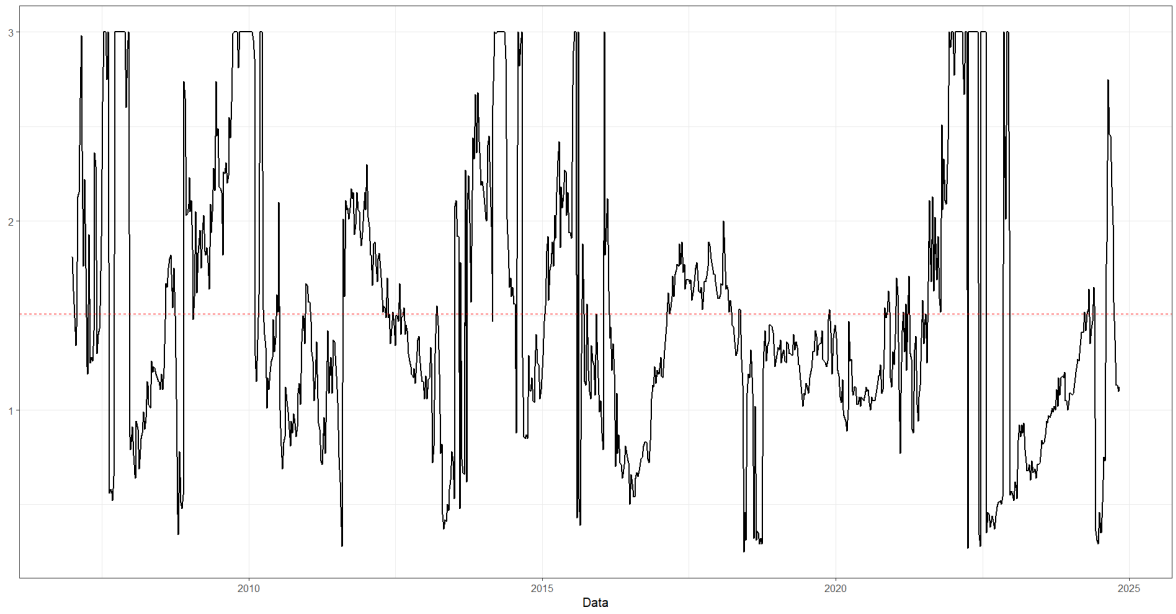


Gráfico 4 – Séries do hiperparâmetro de decaimento exponencial.



4.2.2 Modelagem da dinâmica dos fatores

Cada série dos fatores latentes foi projetada de forma independente pois, segundo DIEBOLD e LI (2006) não há razão para esperar correlação relevante entre o comportamento dos fatores ao longo do tempo, por isso a opção por modelos do tipo ARIMA ao invés de modelos VAR.

Além disso, como os fatores latentes tendem a apresentar persistência, foram estimados modelos do tipo AR(1) sobre a diferença do nível das séries para a mediana de 50 semanas, que é uma aproximação para um ano útil - uma semana útil possui em média 5 dias úteis (252/5 = 50,4). Assim:

$$d_{1,t} = \theta . d_{1,t-1} + e_{1,t}$$
$$d_{2,t} = \theta . d_{2,t-1} + e_{2,t}$$
$$d_{3,t} = \theta . d_{3,t-1} + e_{3,t},$$
$$d_{i,t} = \beta_{i,t} - Med_{50}(\beta_{i,t}), \text{ i = 1, 2 ,3}$$

Em que $Med_{50}(\beta_{i,t})$ é mediana dos últimos 50 valores de $\beta_{i,t}$ na data t.

A escolha por estimar os modelos em termos de diferenças para as medianas em detrimento da diferença para a média se justifica pela evidência de outliers nos dados gerados por possíveis erros de estimação na série de λ_t. Além disso, ao estimar os modelos sem constantes, podemos recuperar as projeções para o nível dos fatores latentes de maneira simples:

$$\hat{\beta}_{i,t+1} = Med_{50}(\beta_{i,t}) + \hat{\theta} . d_{i,t}$$

Para gerar as projeções que serviram de insumo para geração de sinais de compra e venda na estratégia de negociação, os modelos do tipo AR(1) foram estimados em janelas móveis de 50 semanas, gerando projeções um passo à frente.

Já o valor do hiperparâmetro foi modelado como um passeio aleatório:

$$E_t[\lambda_{t+1}] = \hat{\lambda}_{t+1} = \lambda_t$$

4.3 Estratégia de Negociação

A estratégia de negociação consiste em gerar as projeções para as taxas do DI1 para um conjunto de vértices uma semana a frente, avaliar qual o ganho (perda) de uma posição aplicada e gerar sinais para posições tomadas ou aplicadas nos contratos a partir disso.

Algumas simplificações foram necessárias para permitir a generalidade e interpretabilidade dos resultados:

- Custos de transação das operações são desprezíveis (desconsiderados);
- O analista ou *trader* foi capaz de comprar e vender contratos ao preço do ajuste (não há ganho ou perda gerado por *day trade* ao assumir e encerrar posições nos futuros);
- As operações não são realizadas em todos os contratos possíveis, mas sim num grupo de seis vértices: três meses (3m), seis meses (6m), um ano (1y), dois anos (2y), cinco anos (5y) e dez anos (10y). Para cada data, estabelecemos quais contratos tem vencimento mais próximo (em dias úteis) para cada um desses vértices. Essa manipulação permitiu que ao final da simulação fosse possível analisar o desempenho da estratégia por segmento da curva de juros.
- Como não é necessário dispêndio financeiro para assumir posições em futuros de DI1, mas é necessário ter um volume em valor financeiro ou em ativos líquidos depositados como margem das operações, assumimos que há um montante financeiro, equivalente ao valor nocional dos contratos operados, depositado em margem e esse financeiro rentabiliza diariamente o equivalente ao CDI. Essa hipótese pode ser considerada uma analogia a um fundo de investimentos que opera apenas contratos futuros de DI1 e deposita o patrimônio líquido do fundo em LFTs para cobrir a margem das operações. Para fins de cálculo o patrimônio líquido na data inicial da simulação é igual a R$ 1.000.000,00

Para gerar os sinais de compra e venda em cada semana seguimos o seguinte procedimento:

1. Classificam-se quais contratos estão mais próximos dos vértices de referência $\tau = (3m, 6m, 1y, 2y, 5y\ e\ 10y)$;
2. Com os valores projetados para $(\hat{\beta}_{1,t+1};\ \hat{\beta}_{2,t+1};\ \hat{\beta}_{3,t+1};\ \hat{\lambda}_{t+1})$, projetamos a taxa ao ano over para cada contrato de referência com base em:

$$\hat{y}_{t+1}(\tau) = \hat{\beta}_{1,t+1} + \hat{\beta}_{2,t+1}\left(\frac{1-e^{-\hat{\lambda}_{t+1}\tau}}{\hat{\lambda}_{t+1}\tau}\right) + \hat{\beta}_{3,t+1}\left(\frac{1-e^{-\hat{\lambda}_{t+1}\tau}}{\hat{\lambda}_{t+1}\tau} - e^{-\hat{\lambda}_{t+1}\tau}\right),$$

$$\hat{Y}_{t+1}(\tau) = \exp\{\hat{y}_{t+1}(\tau)\} - 1$$

Em que $\hat{y}_{t+1}(\tau)$ é o valor projetado para as taxas de juros ao ano com capitalização contínua do DI1 com vértice τ e $\hat{Y}_{t+1}$ é o valor projetado para a taxa ao ano over (taxa de juros over equivalente à taxa com capitalização continua), que é de fato utilizada nas negociações.

3. Estimamos o ganho da posição aplicada em cada contrato com base na relação deduzida anteriormente:

$$G/P_{intermediário} = PU\left[\frac{(1+i_{entrada})^{\frac{N}{252}}}{(1+\hat{\imath}_{saída})^{\frac{N-h}{252}}} - (1+CDI_h)^{h/252}\right]$$

   Em que $i_{entrada}$ é a taxa do ajuste de pregão na referida semana, $i_{saída}$ é a taxa projetada para aquele contrato conforme o ponto (2) e CDI é taxa do CDI naquela semana;
4. Caso o valor acima seja positivo, é gerado um sinal de compra em PU (aplicado ou doado) naquele contrato. Se for negativo o sinal é de venda em PU (tomado) no contrato. Se for zero, nada é feito.
5. Gerados os sinais, seguimos para a simulação (backtesting) da estratégia consolidada. Para isso foi necessário decidir entre uma regra para alocação de risco entre cada vértice semana a semana.

Escolhemos distribuir o risco entre os contratos de maneira inversamente proporcional ao vencimento (*duration*) dos contratos. Caso atribuíssemos, por exemplo, o mesmo valor nocional para um contrato de 3m e 10y a rentabilidade final dependeria muito mais da capacidade preditiva do modelo para taxas de 10 anos, já que o PU é muito mais sensível a variações nas taxas para contratos longos. Evitamos especificações mais sofisticadas para a atribuição de risco por contrato a fim de evitar desviar o escopo do trabalho.

Seja $k_n = \frac{1}{\tau_n}$ o inverso da *duration* do n-ésimo vértice, a alocação de capital em cada vencimento ρ_n em n é igual a:

$$\rho_n = \frac{k_n}{\sum_{j=1}^{6} k_j}$$

Considerando os 6 vértices de referência, a alocação nos contratos por vértice é dada pela tabela a seguir.

Tabela 3 – Alocação de risco por vértice do DI1.

Vértice	tau (meses)	1/tau	Alocação
3m	3	0.33	51.3%
6m	6	0.17	25.6%
1y	12	0.08	12.8%
2y	24	0.04	6.4%
5y	60	0.02	2.6%
10y	120	0.01	1.3%

A simulação da estratégia parte de um patrimônio líquido de referência de R$ 1.000.000,00. Para cada dia são avaliados os sinais de compra ou venda dos contratos de DI1 e a quantidade de contratos por vértice é tal que os valores nocionais, em módulo, seguem a alocação da tabela anterior, com base no patrimônio líquido de fechamento daquela data. A cada dia, auferem-se os ajustes diários com base nas posições em aberto no dia anterior e esse montante é somado ao patrimônio líquido do dia anterior, corrigido pelo CDI de um dia. Essa soma é o patrimônio líquido de fechamento do dia, a partir do qual serão calculadas as novas posições.

O texto acima pode ser resumido pelo conjunto de equações a seguir:

1. $PL_0 = R\$\ 1.000.000{,}00$
2. $q_{n,t} = sinal_{n,t}\left(\frac{PL_t}{PU_{n,t}} * \rho_n\right)$
3. $ajuste_{n,t} = q_{n,t-1}\left[PU_{n,t} - PU_{n,t-1}(1 + c_{t-1})\right]$
4. $PL_t = PL_{t-1}(1 + c_{t-1}) + \sum_{n=1}^{n=6} ajustes_{n,t}$

Em que PL_0 é o patrimônio líquido (na analogia anterior, o valor depositado em margem pelo fundo de investimentos) na primeira data, $q_{n,t}$ é a quantidade de contratos (visão PU) comprados ou vendidos para o contrato do vértice *n* na data t, $sinal_{n,t}$ é o sinal (+1, -1, 0) gerado pelo ganho esperado pelas projeções do modelo, $PU_{n,t}$ é o PU de ajuste em *t*, ρ_n é a proporção de alocação de risco ponderada pela duration, $ajuste_{n,t}$ é o ajuste diário recebido na data *t* pela posição em *n* no dia anterior e c_t é a taxa média dos depósitos interfinanceiros de um dia em *t.*

Cabe ressaltar que, apesar das projeções e geração de novos sinais ocorrerem em frequência semanal, o *backtesting* levou em consideração os ajustes diários das posições já que é esse o mecanismo de apuração de resultado dos futuros de DI1.

5 Avaliação e Desempenho da Estratégia

Para avaliar a aplicabilidade da estratégia, comparamos os resultados acumulados sobre o patrimônio líquido inicial com o valor desse patrimônio corrigido pelo CDI, que é uma *proxy* para taxa de retorno livre de retorno livre de risco no mercado financeiro Brasileiro.

5 Resultados Empíricos

Usando os dados históricos do ajuste de pregão de contratos futuros de DI1 fizemos uma sequência de projeções uma semana a frente utilizando o modelo Nelson Siegel Dinâmico em dois estágios. Em frequência semanal, as projeções foram utilizadas para avaliar a relação de ganho e perda esperada para posições encerradas uma semana a frente conforme a relação deduzida nesse trabalho. A partir disso avaliamos o desempenho do modelo a partir de sua viabilidade enquanto implementação em negociações de contratos futuros.

A amostra inicial vai de 28/12/2006 até 31/10/2024 em frequência semanal.

Na primeira etapa estimamos os modelos em corte transversal para o fechamento de cada semana e armazenamos os valores estimados para o vetor $(\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}, \lambda_t)$.

Em seguida construímos projeções uma semana a frente para os valores de $\beta_{i,t}$ a partir de modelos AR(1), em janelas rolantes de 50 semanas, sobre a diferença do nível das séries para suas medianas de 50 semanas. Nessa etapa, foram perdidas 100 semanas da amostra inicial: 50 semanas foram perdidas para o cálculo da diferença das séries e mais 50 semanas são necessárias para a estimação da janela rolante de 50 semanas (para evitar que algum dos AR(1) fossem estimados com amostra inferior).

Assim, a simulação da estratégia de investimentos começa na 100ª semana (24/11/2008). Nessa data é avaliada a primeira projeção um passo a frente e são iniciadas as primeiras posições.

Em seguida avaliamos o desempenho da estratégia em termos de ganho excedente sobre o CDI.

5.1 Fatores Latentes em Corte Transversal.

A tabela a seguir apresenta resumo estatístico das séries de fatores e do hiperparâmetro ótimo (que minimiza o SQR). Estimados pelas rotinas de busca exaustiva e MQO em corte transversal.

Tabela 4 – Resumo Estatístico dos Fatores

Estatísticas	Beta 1	Beta 2	Beta 3	Lambda
mean	11.10%	-1.61%	-2.35%	1.63
dp	1.51%	2.30%	4.19%	91.59%
cor_b1	1	0.32	0.28	0.11
cor_b2	0.32	1	0.13	0.05
cor_b3	0.28	0.13	1	0.05
acf_4w	0.93	0.96	0.81	0.46
acf_24w	0.65	0.69	0.39	0.21
acf_50w	0.34	0.25	-0.09	-0.11

As duas primeiras linhas (*mean* e *dp*) apresentam os momentos de primeira e segunda ordem de cada série. As linhas *cor_b1, cor_b2 e cor_b3* apresentam a correlação de cada série com os fatores de nível, inclinação e curvatura, respectivamente. Já as linhas *acf_4w*, *acf_24w* e *acf_50* contém as autocorrelações para os dados em frequência semanal contra as defasagens de 4, 24 e 50 semanas, respectivamente.

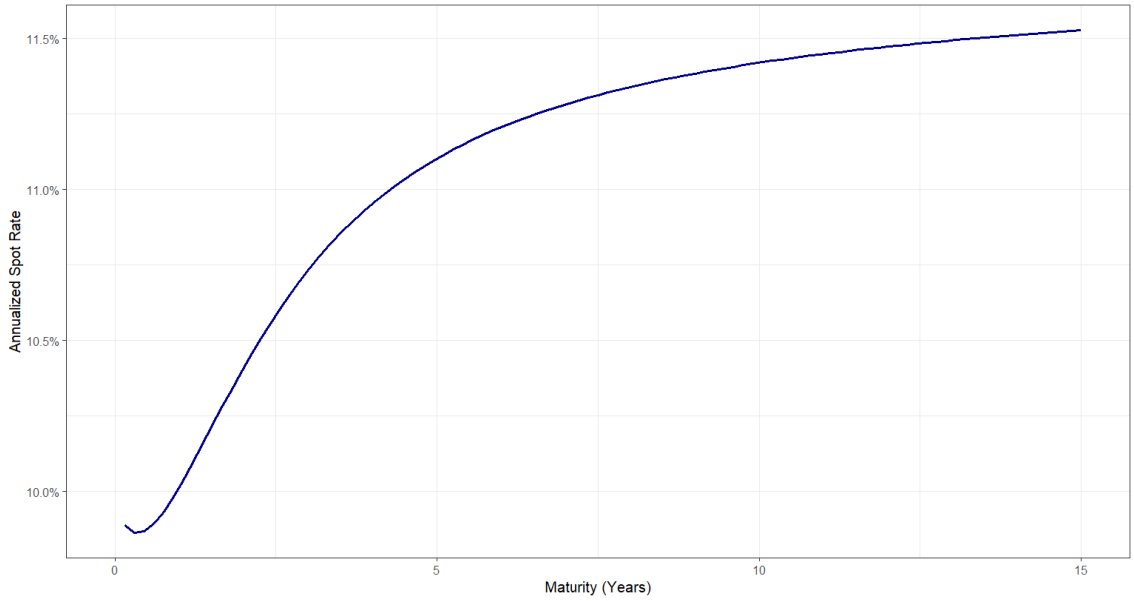
Utilizando os valores médios dos fatores latentes e a mediana do hiperparâmetro, podemos analisar a curva DI1 média no Brasil, apresentada no gráfico 5. Ressaltamos que os fatores são estimados sobre as taxas em capitalização contínua e, por essa razão o

gráfico da curva média foi gerado com a devida manipulação algébrica para recuperar os valores em taxas ao ano over.

Seguindo os fatos estilizados discutidos por DIEBOLD e RUDEBUSCH (2013), a curva média no Brasil é positivamente inclinada, o que serve de evidência a hipótese de existência do *term premia* na curva brasileira. Outro resultado semelhante é o de que os fatores de nível e inclinação são mais persistentes do que o fator de curvatura. Uma diferença encontrada no presente trabalho é que o fator de inclinação possui maior desvio padrão que o fator de nível.

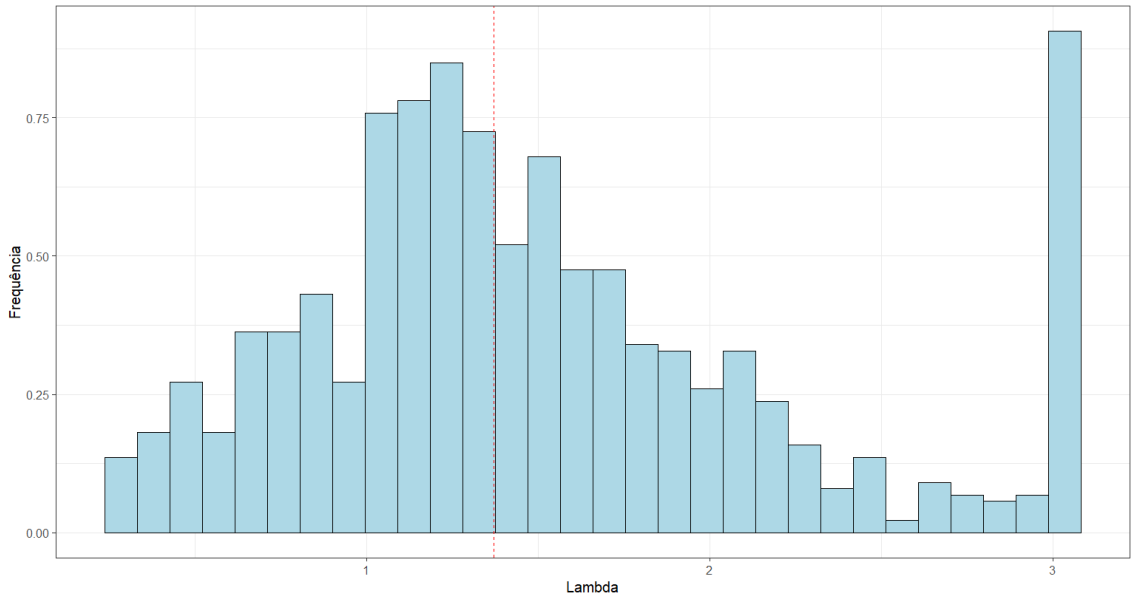
Também observamos que os fatores apresentam persistência. Para o fator de nível isso tem uma interpretação relevante, já que na literatura de finanças e macroeconomia é comum que séries de taxas de juros apresentem memória relevante. Destacamos também que o fator de curvatura é o que tem menos persistência e mais volatilidade entre os três.

Gráfico 5 – Curva DI1 média extraída do modelo Nelson-Siegel Dinâmico



Já a sequência dos valores ótimos de decaimento (λ_t) apresentou volatilidade mais expressiva. Observando o histograma, temos evidência de que a variável possui distribuição assimétrica, á direita. Isso pode estar relacionado a um problema *overfitting* em da curva dias específicos, para os quais os valores de λ_t poderiam crescer e o SQR continuaria caindo mesmo que marginalmente. A linha em vermelho apresenta a mediana de λ_t, que foi usada para a construção da curva média.

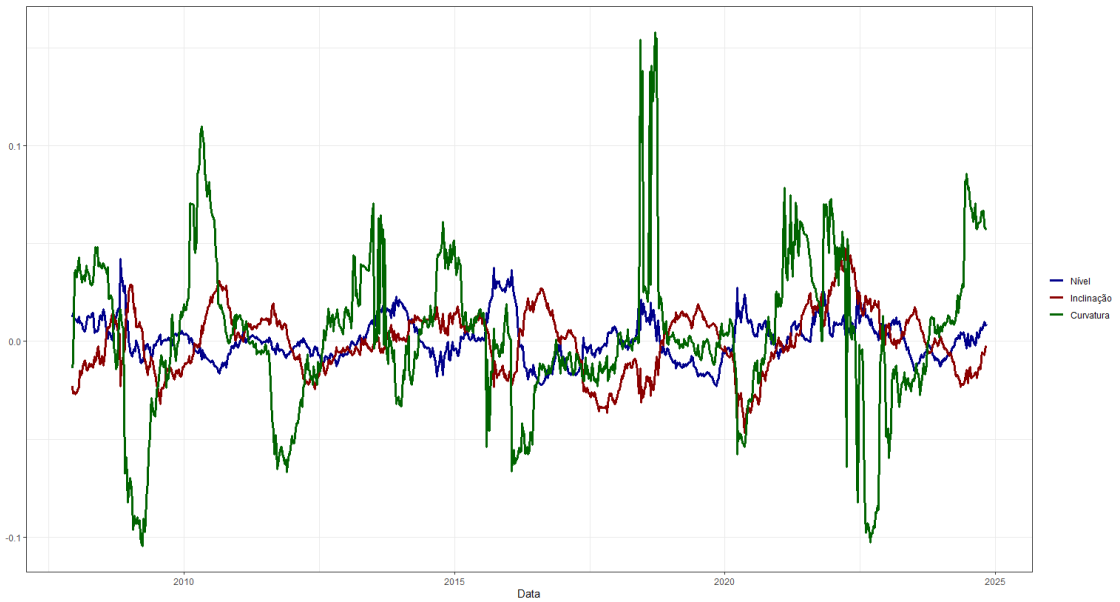
Gráfico 6 – Distribuição de λ_t



5.2 Dinâmica dos Fatores Latentes

O gráfico a seguir apresenta as séries de diferença dos fatores para as medianas de 50 semanas, sobre as quais foram estimados os modelos AR(1).

Gráfico 7 – Diferença das medianas de 50 semanas



Foram realizados testes do tipo ADF para avaliar a possibilidade de existência raíz unitária sobre as transformações das séries, o que poderia inviabilizar a utilização dos modelos AR(1). Visualmente, as séries não parecem possuir tendências determinísticas e suas médias estão próximas de zero e por essas razões escolhemos a versão da equação de teste sem constante e sem tendência. A tabela a seguir mostra que a estatística de teste rejeita a hipótese nula (está abaixo do valor crítico) de não-estacionariedade para todas as séries ao nível de significância de 1%. Os testes foram realizados no R.

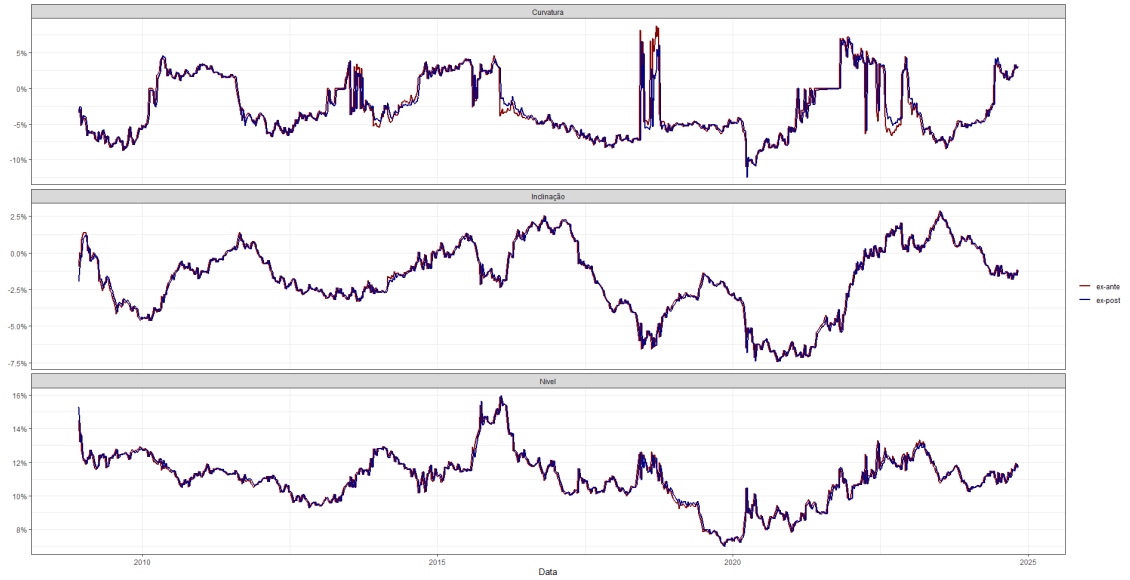
Tabela 5 – Teste ADF das diferenças das medianas

Fator	Estatística	Valor crítico (1%)
Beta 1	-4.05	-2.58
Beta 2	-3.24	-2.58
Beta 3	-2.58	-2.58

Apesar de ambas as séries serem estacionárias, o fator de curvatura (beta 3) é muito mais volátil que os outros e assim também é série de diferenças. Isso pode estar associado ao fato das cargas fatoriais do fator de curvatura sem mais sensíveis ao valor de λ_t, que apresenta variabilidade relevante nos termos estimados nesse trabalho. Essa característica tornou mais difícil a projeção do terceiro fator e foi responsável pelos momentos de pior performance da estratégia.

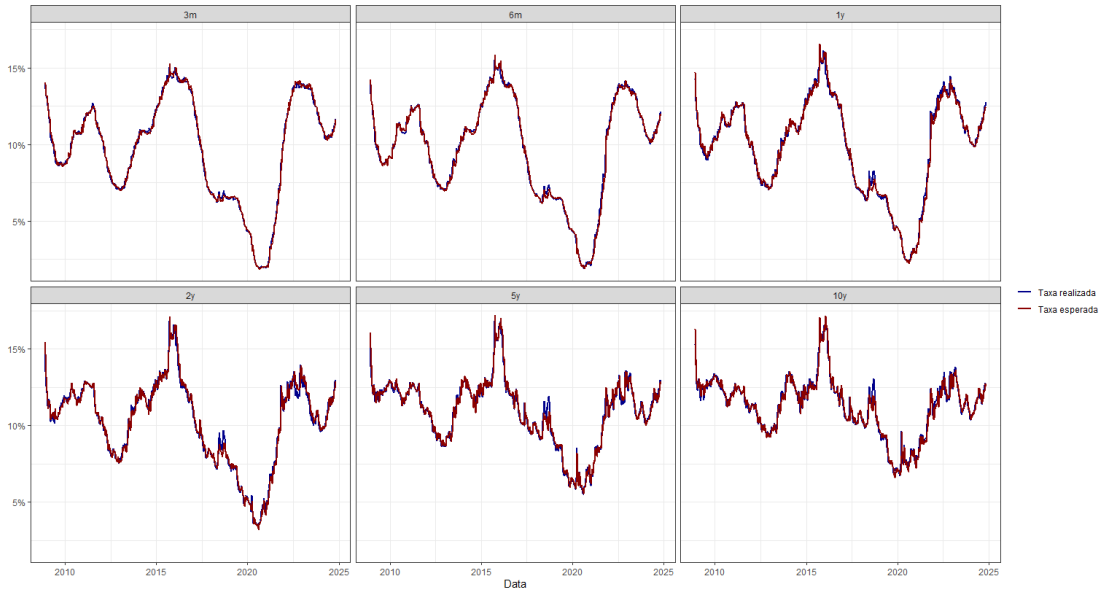
Os gráficos a seguir mostram as comparações entre os valores projetados pelos AR(1) (fatores ex-ante) uma semana (um passo) a frente (previsão fora da amostra) e os valores estimados em corte transversal, após observação das taxas de juros correntes (ex-post). Em seguida mostramos a diferença entre as taxas observadas e projetadas para os vértices de interesse na estratégia.

Gráfico 8 – Fatores ex-ante e ex-post



Os gráficos mostram que há um maior desvio - das previsões das taxas uma semana a frente em comparação aos valores realizados - entre o final de 2015 e meados de 2018. Isso está associado a um aumento no erro de previsão para o fator de curvatura que ocorre no mesmo período.

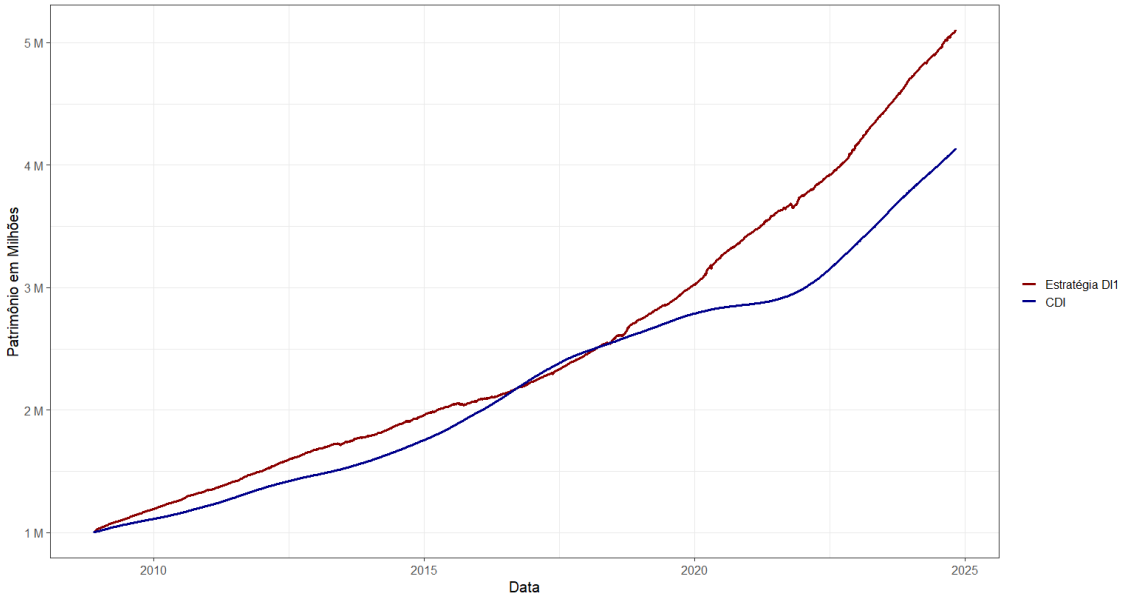
Gráfico 9 – Projeções das taxas por vértices



5.3 Performance da Estratégia de Negociação

O gráfico 10 mostra a evolução de R$ 1.000.000,00 investidos na estratégia em DI1 com o modelo Nelson-Siegel dinâmico, em comparação com o resultado obtido aplicar o valor inicial apenas em CDI numa estratégia passiva, ou seja, corrigir R$ 1.000.000,00 pelo CDI.

Gráfico 10 – Evolução do patrimônio investido na Estratégia Ativa x passiva.



Os resultados podem ser resumidos pelas duas próximas tabelas, que apresentam as rentabilidades no período e por ano-calendário no intervalo da simulação.

Alpha é o prêmio de retorno composto sobre o CDI. Isto é $\alpha_t = (1 + R_t)/(1 + CDI_t) - 1$. Com R_t e CDI_t calculados em taxas com períodos equivalentes.

Tabela 6 – Rendimento Acumulado da Estratégia no Período.

Métrica	No período	No período a.a.
Retorno CDI	313.42%	9.48%
Retorno Estratégia	409.98%	10.96%
Alpha	23.36%	1.35%

Tabela 7 – Retorno por ano-calendário.

Ano	Estratégia	CDI	Alpha
2008*	3.36%	1.21%	2.13%
2009	15.11%	9.73%	4.90%
2010	12.93%	9.58%	3.05%
2011	11.63%	11.50%	0.11%
2012	11.70%	8.23%	3.20%
2013	6.71%	7.89%	-1.09%
2014	9.41%	10.58%	-1.06%
2015	6.10%	13.00%	-6.11%
2016	7.31%	13.88%	-5.77%
2017	10.02%	9.81%	0.18%
2018	11.79%	6.29%	5.17%
2019	10.34%	5.85%	4.24%
2020	13.55%	2.74%	10.52%
2021	9.34%	4.33%	4.81%
2022	10.88%	12.33%	-1.30%
2023	13.17%	13.04%	0.11%
2024*	8.34%	9.02%	-0.63%

*intervalo não coincide com o um ano inteiro

Para 2008, as taxas se referem à performance entre a primeira data da simulação e 30/12/2008 (última data de pregão BM&F de 2008), enquanto o período para o ano de 2024 vai de 28/12/2023 até a última data da amostra (31/10/2024).

A avaliação do *alpha* é particularmente relevante para a análise dessa estratégia. Como as posições em DI futuro não exigem dispêndio financeiro e utilizamos como hipótese a correção das disponibilidades em margem pelo próprio CDI, a performance das negociações em DI1 equivale ao próprio excedente (positivo ou negativo) contra as taxas livres de risco.

Uma forma de fazer essa análise é estudar o comportamento desse retorno excedente em janelas. Dessa forma, podemos verificar o quão consistentes são os retornos das operações. Para isso, foram calculados os retornos da estratégia e do CDI em janelas móveis de 252 dias (um ano útil) e calculados os *alphas* em cada janela de maneira composta: $\alpha_{t,252} = \left(1 + R_{t,252}\right)/\left(1 + CDI_{t,252}\right) - 1$. Em seguida calculamos os momentos de primeira e segunda ordem para os valores $R_{t,252}$ e $\alpha_{t,252}$.

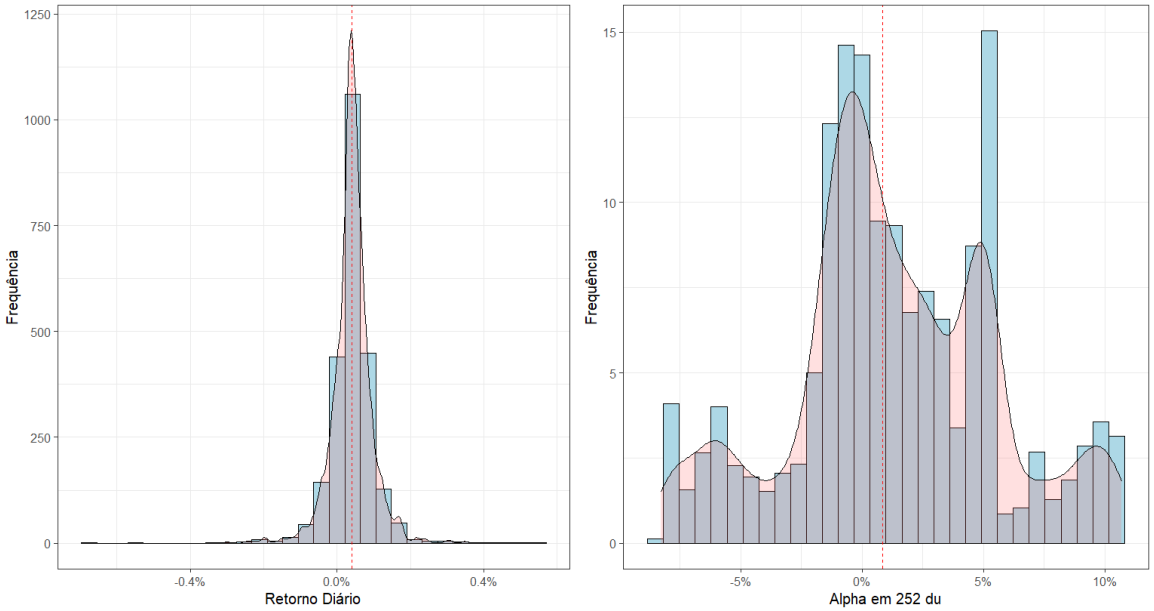
Tabela 8 – Estatísticas descritivas da Estratégia.

Métrica	Média	Desvio Padrão
R_252	10.70%	2.39%
Alpha_252	1.27%	4.22%

Fazendo $IS = \frac{\overline{\alpha_{252}}}{\sigma(R_{252})} = 0.53$, encontramos um Índice de Sharpe "médio" nas janelas de um ano útil.

O gráfico 11 apresenta os histogramas dos retornos diários e dos valores de $\alpha_{t,252}$. A média dos retornos diários da estratégia possui um desvio claro de zero, já que o CDI serve como um "piso" sobre o qual se acrescentam os saldos dos ajustes dos DI1s negociados.

Gráfico 11 – Distribuição dos Retornos e dos *Alphas*



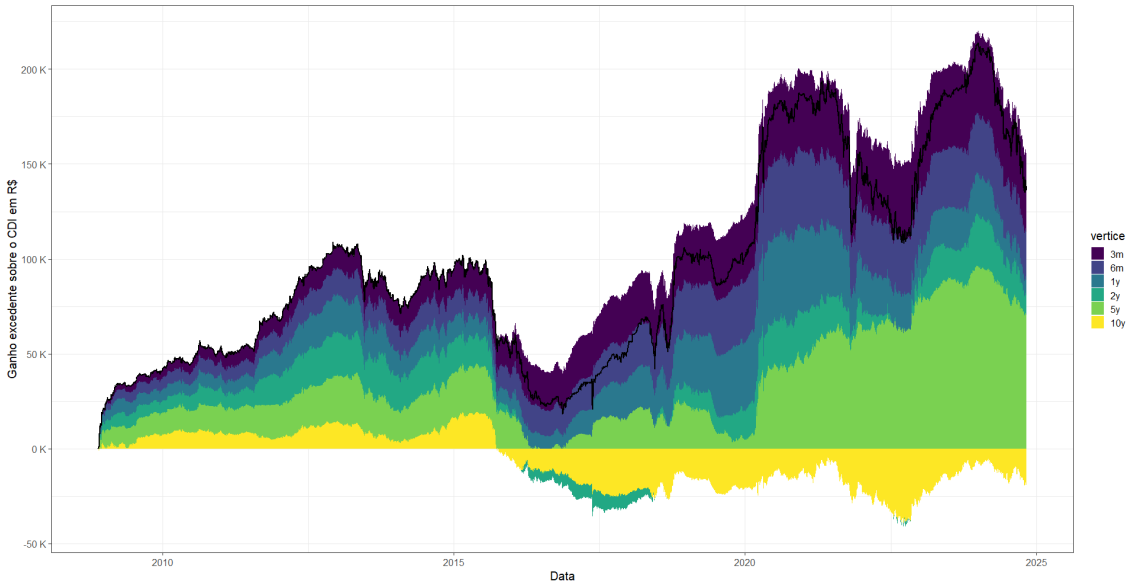
Uma outra forma de analisar os resultados é verificar a contribuição dos resultados operados em cada vértice para o ganho excedente – atribuição de performance por vértice.

O gráfico 12 mostra a atribuição de performance (em reais) do ganho excedente, por contrato operado. O gráfico abaixo apresenta os valores sobrepostos para o saldo acumulado dos ajustes diários para cada vértice operado, sem levar em consideração o retorno extra ao corrigir os saldos dos ajustes pelo CDI. A linha preta apresenta o saldo total acumulado total da estratégia.

Os resultados sugerem que há uma performance muito inferior do modelo ao buscar projetar a direção das taxas longas (10y). Apesar disso, o saldo final é não apenas positivo em todos os outros vértices, como também compensa as perdas com as operações nas taxas mais longas.

Também fica evidente que há um período de desempenho inferior ao final de 2015 em um movimento comum para todos os vértices. Esse período coincide com a dificuldade do modelo em capturar a trajetória do fator de curvatura citada anteriormente.

Gráfico 12 – Ganhos/Perdas pela Maturidade do Contrato Negociado



6 Considerações Finais

Os modelos de fatores latentes para as taxas de juros são bastante promissores, apesar de já bastante explorado na literatura de economia financeira no Brasil e no exterior, ainda pode se mostrar uma ferramenta útil para estudar possibilidades em múltiplas classes de ativos.

A principal contribuição desse trabalho foi utilizar uma regra mais apropriada para avaliar as condições de ganho e perda em operações no DI1 encerradas antes do vencimento expressa em termos de taxa de entrada e saída de posição, uma relação que não é apresentada nos materiais de renda fixa e derivativos. Ao definir de maneira apropriada a mecânica de retorno esperado nas operações de DI1 foi possível encontrar estratégias com ganho positivo frente ao CDI, mesmo para versões simplificadas de modelos de projeção com o Nelson-Siegel em dois estágios. Ademais esse trabalho contribui ao avaliar o desempenho preditivo do modelo de Diebold e Li a partir do retorno em estratégias de investimento, não por métricas tradicionais de erro de previsão, como a maior parte dos estudos.

O modelo apresenta ganhos levemente acima da taxa livre de risco, mas que podem ser comprimidos por custos de transação a depender do cenário. Assim, é interessante avaliar maneiras de melhorar a abordagem aqui apresentada.

Identificamos possibilidade de novos estudos relacionados a esse trabalho em duas frentes principais. A primeira delas é avaliar a implementação de modelos de projeção para taxas de juros mais robustos, como por exemplo o modelo de Nelson-Siegel em formato de espaço-estado ou modelos afim para taxas de juros como em ANG e PIAZZESI (2003). Como observamos ao longo do trabalho, o principal desafio parece estar relacionado a medidas robustas do hiperparâmetro de decaimento e nesse sentido o uso de modelos em espaço-estado ou de uma estratégia que não dependa tanto da estimação de fatores não observáveis deve ser testado.

Outra possibilidade é combinar a estratégia de negociação aqui apresentada com formas mais realistas de negociação. Por exemplo, levando em consideração custos de transação e microestruturas de mercado, utilizando mecanismos mais robustos para definição de alocação de risco e alavancagem como limites *stop loss* (limite de perda).

Referências Bibliográficas

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIRO E DE CAPITAIS. *Curvas de Crédito – ANBIMA*, 2024. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/precos-e-indices/curvas/curvas-de-credito.htm. Acesso em: 24 nov. 2024a.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIRO E DE CAPITAIS. *Curvas de Juros – Fechamento*, 2024. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/curvas-de-juros-fechamento.htm. Acesso em: 24 nov. 2024b.

B3 S.A. – BRASIL, BOLSA, BALCÃO. *Resumo da Metodologia de Geração de Cenários de Risco da Câmara B3 V10*. 2023. Disponível em: https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/compensação-e-liquidacao/Clearing/administração-de-riscos/modelo-de-risco/parâmetros-de-risco. Acesso em: 24 nov. 2024.

BANCO CENTRAL EUROPEU – SUPERVISÃO BANCÁRIA. *What are Non-Performing Loans?* 2021. Disponível em: https://www.bankingsupervision.europa.eu/about/banking-supervision-explained/html/npl.en.html. Acesso em 24 nov. 2024.

BOGDANSKI, J.; TOMBINI, A. A.; WERLANG, S. R. Implementing inflation targeting in Brazil. Brasília, DF: Banco Central do Brasil, jul. 2000. p. 1-29, 2000. (*Working Papers Series*).

CALDEIRA, Joao; MOURA, Guilherme V.; SAVINO PORTUGAL, Marcelo. Efficient yield curve estimation and forecasting in Brazil. *Revista Economia*, January/April, 2010.

CALDEIRA, Joao F.; LAURINI, Márcio P.; PORTUGAL, Marcelo S. Bayesian inference applied to dynamic Nelson-Siegel model with stochastic volatility. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 30, n. 1, p. 123-161, 2010.

MARIANI, Lucas Argentieri; LAURINI, Marcio Poletti. Modelo Nelson-Siegel Com Condições De Não Arbitragem Para Previsão De Inflação A Partir Do Mercado De Títulos Brasileiro. In: *Anais do XLII Encontro Nacional de Economia.* ANPEC-Associação Nacional dos Centros de Pós-Graduação em Economia, 2016.

COCHRANE, John H. Macro-finance. *Review of Finance*, v. 21, n. 3, p. 945-985, 2017.

COCHRANE, J. *Time series for macroeconomics and finance*. 1997.

COCHRANE, J. *Asset Pricing*. Revised Edition. New Jersey: Princeton University Press, 2005. ISBN 0-691-12137-0

COX, John C.; INGERSOLL JR, Jonathan E.; ROSS, Stephen A. An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, p. 363-384, 1985.

DIEBOLD, Francis X.; MARIANO, Roberto S. Comparing predictive accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 13, n. 3, p. 253-263, 1995.

DIEBOLD, Francis X.; Li C. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics,* 130, Issue 2, 337-364. fev. / 2006.

DIEBOLD, Francis X.; RUDEBUSCH, Glenn D.; ARUOBA, S. Boragan. The macroeconomy and the yieldcurve: a dynamic latent factor approach. *Journal of econometrics*, v. 131, n. 1-2, p. 309-338, 2006.

DIEBOLD, Francis X.; RUDEBUSCH, Glenn D. *Yield curve modeling and forecasting: the dynamic Nelson-Siegel approach.* Princeton University Press, 2013.

DUFFEE, Gregory R. Term premia and interest rate forecasts in affine models. *The Journal of Finance*, v. 57, n. 1, p. 405-443, 2002.

DURAND, David. Basic yields of corporate bonds, 1900-1942. In: *Basic Yields of Corporate Bonds, 1900-1942*. NBER, 1942. p. 1-40.

Elton, Edwin J. et al. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. 9ª Revisada ed. Estados Unidos da América: John Wiley & Sons, Inc., 2013.

HEATH, David; JARROW, Robert; MORTON, Andrew. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, p. 77-105,1992.

HULL, John C. *Opções, futuros e outros derivativos.* Bookman Editora, 2016.

HULL, John; C. WHITE, Alan. Pricing interest-rate-derivative securities. *The review of financial studies*, v. 3, n. 4, p.573-592, 1990.

KYDLAND, Finn E.; PRESCOTT, Edward C. Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, p. 1345-1370, 1982.

LITTERMAN, Robert B.; SCHEINKMAN, Jose. Common factors affecting bond returns. *The Journal of Fixed Income*, v. 1, n. 1, p. 54-61, 1991.

NELSON, Charles R.; SIEGEL, Andrew F. Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, p. 473-489, 1987.

MCCULLOCH, J. Huston. The tax-adjusted yield curve. *The Journal of Finance*, v. 30, n. 3, p. 811-830, 1975.

PINHEIRO, Juliano Lima. *Mercado de capitais.* 9. ed. São Paulo: Atlas, 2019. 783. ISBN 978-85-97-02174-5.

SANTOS, José Carlos de Souza; SILVA, Marcos Eugênio da. *Derivativos e renda fixa:* teoria e aplicações ao mercado brasileiro. 2015.

SHARPE, William F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance,* v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

VARGA, Gyorgy. Teste de modelos estatísticos para a estrutura a termo no Brasil. *Revista Brasileira de Economia,* v. 63, p. 361-394, 2009.

VASICEK, Oldrich. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics,* v. 5, n.2, p. 177-188, 1977.

VASICEK, Oldrich A.; FONG, H. Gifford. Term structure modeling using exponential splines. *The Journal of Finance,* v. 37, n. 2, p. 339-348, 1982.