O TEOREMA DE BANACH-TARSKI NA CIRCUNFERENCIA

SILVA, Glaudston[1];**OLIVEIRA JUNIOR**, José Carlos[2]

RESUMO

Neste trabalho retrataremos a cerca de um tema intrigante na matemática, o teorema de Banach-Tarski, onde estudos afirmam que por meio desse teorema de decomposição é possível decompor uma esfera em um número finito de partes e reorganizá-las por um processo matemático de tal forma que, quando reorganizadas, essas partes poderão formar duas esferas idênticas a original. Embora pareça ser inacreditável esse resultado, na matemática é possível, usando passos e mecanismos matemáticos provaremos que será possível reorganizar as partes de uma circunferência denominada S^1 de tal modo que obteremos outras duas esferas idênticas a esfera S^1.

Palavras-chave: Banach-Tarski. Decomposição. Esferas idênticas.

I. INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica (PIBIC/PIBITI). Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. glaudston.silva@ufnt.edu.br.

O artigo apresenta uma visão do projeto de iniciação cientifica na área de ciências exatas e da terra, especificamente da área da matemática, desenvolvido durante o período de 1 ano, 01/09/2023-30/08/2024. O trabalho consiste na demonstração de um teorema matemático bastante intrigante no mundo da matemática chamado Teorema de Banach-Tarski na circunferência, embora seja um assunto pouco estudado e controverso, controverso pois a parti de uma circunferência denominada S^1, poderemos a parti dela, encontrar mais outras duas circunferências idênticas a S^1, a grosso modo esse teorema é uma espécie de clonagem, onde podemos preservar as características da primeira esfera e replica-las em outras duas circunferências, por meio de um processo de decomposição da primeira esfera S^1, a parti da decomposição poderemos reagrupar os "resquícios ou partes" dessa esfera de modo a ter duas esferas idênticas por meio de rotações. A temática estudada foi atribuída com auxílios e bibliografias matemáticas apontadas nas referências, por meio delas foi possível estudar conteúdos que foram de bastante importância para o estudo da temática, além do mais, esse estudo de cunho cientifico trouxe uma visão de pesquisa na matemática pura e beneficiou muito não só no entendimento da pesquisa mas também no ganho cognitivo do conteúdo estudado e isso foi visível nas disciplinas de matemática do curso de Licenciatura em Matemática. No estudo feito, notou-se um acervo bem xucro a respeito do tema estudado, assim esse trabalho serve de contribuição para futuros estudos, pois essa demonstração mostra uma prova não complexa do teorema com noções simples de conjuntos e ajudará futuros pesquisadores ao qual tiverem interesse no tema proposto.

II. BASE TEÓRICA

Por ser um tema de bastante dificuldade de entendimento e pouco estudado, quase não foi-se possível achar muitas referências a cerca do tema, contudo, convém citar (JUNIOR & SOUSA & LOBO, 2019) como sendo uma das principais bibliografias estudadas. Além do mais, outra bibliografia de bastante importância é (IEZZI & MURAKAMI, 1977) que é um curso sobre conjuntos no qual, nos deu o entendimento necessário para a elaboração deste trabalho. Outra bibliografia analisada vem da área da analise real, onde estudamos sobre classes de equivalência de um conjunto, sendo essa parte uma área de destaque na apresentação como veremos adiante (LIMA,2004). As outras bibliografias mostradas na referencia também são de grande valia no estudo, contudo essas mencionadas nos deu o entendimento preciso e necessário para o entendimento do teorema. Além das bibliografias estudadas, vale ressaltar o dialogo e coordenação do orientador do projeto, José Carlos de Oliveira Junior, que a todo momento esteve a disposição para o estudo do tema, além dele, vale destacar outros professores do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade federal do Norte do Tocantins que mesmo não tendo domínio do tema, apresentou pontos de vistas relevantes ao tema estudado.

III. OBJETIVOS

1. Objetivos Gerais:

a. Investigar e compreender os conceitos fundamentais da teoria dos conjuntos, geometria e teoria da medida necessários para a compreensão do Teorema de Banach-Tarski.

b. Analisar e estudar os resultados anteriores relacionados ao Teorema de Banach-Tarski na circunferência, incluindo suas demonstrações e implicações.

c. Explorar e compreender as noções de conjuntos não mensuráveis, grupos de rotação e as propriedades da circunferência que estão envolvidas no Teorema de Banach-Tarski.

d. Investigar e analisar as abordagens e técnicas utilizadas em demonstrações anteriores do Teorema de Banach-Tarski na circunferência.

e. Desenvolver uma compreensão aprofundada do Teorema de Banach-Tarski na circunferência e sua relevância para a matemática pura e suas aplicações.

2. Objetivos Específicos:

a. Revisar a literatura existente sobre o Teorema de Banach-Tarski na circunferência, incluindo artigos científicos, livros e materiais relacionados.
b. Estudar os princípios básicos da teoria dos conjuntos, teoria da medida e geometria necessários para compreender o Teorema de Banach-Tarski.
c. Analisar e compreender as demonstrações anteriores do Teorema de Banach-Tarski na circunferência, identificando as principais etapas e conceitos envolvidos.
d. Investigar os conceitos de conjuntos não mensuráveis e suas propriedades relevantes para o Teorema de Banach-Tarski na circunferência.
e. Desenvolver uma demonstração detalhada do Teorema de Banach-Tarski na circunferência, seguindo as etapas e argumentos estabelecidos nas demonstrações anteriores.
f. Comparar o Teorema de Banach-Tarski na circunferência com outros paradoxos de decomposição e investigar suas semelhanças e diferenças.
g. Discutir as limitações e restrições físicas do Teorema de Banach-Tarski, enfatizando a diferença entre a matemática teórica e a realidade física.
h. Escrever um relatório de pesquisa detalhado, documentando os resultados, as etapas da demonstração e as conclusões do estudo sobre o Teorema de Banach-Tarski na circunferência.

IV. METODOLOGIA

Os matérias utilizados foram bibliografias que abordavam a nossa demonstração, entre essas bibliografias estavam artigos, enciclopédias, dissertações, livros de análise, etc. Os materiais que foram utilizados principalmente para o entendimento de algumas partes da demonstração, como o entendimento do axioma da escolha, conjuntos finitos e infinitos, que a priori não pode parecer que a demonstração utilize essas noções, contudo, há uma grande noção desse tipo de conjunto que é preciso para poder entender a profundidade do teorema, das biografias utilizadas, vale destacar a (Murakami&Iezzi,1977) que apresentou princípios básicos de conjuntos que utilizaríamos na demonstração. Outra bibliografia importantíssima para a realização do trabalho foi a de (Junior& Sousa& Lobo, 2019) que é a bibliografia utilizada como base para esse projeto de pibic, ela foi utilizada como norteadora para o projeto de Pibic, pois mostra a demonstração e como ela foi construída, mas, apesar de ser utilizada com bastante frequência, ainda não foi de fácil compreensão, com isso, foi-se necessário orientações com o professor orientador para que ele pudesse orientar a melhor maneira o proceder com a demonstração e o projeto. Além dos materiais utilizados para o estudo, foi-se necessário a reserva de sala de aula em diversos períodos do dia para que pudesse utiliza-la para estudo do teorema, sendo assim, além dos matérias teóricos utilizados, o espaço também foi um fator importante para a execução do projeto, além das salas, o contato com outros professores do curso de Licenciatura em Matemática a respeito do tema de estudo foi de extrema importância para a realização do projeto tendo em vista o ganho cognitivo a respeito do teorema de estudo, pois ambos possuíam uma visão diferente do objeto estudado.

V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nos resultados apresentaremos nossa demonstração:

Seja a circunferência S^1 nossa circunferência de estudo, ela esta escrita de forma única à forma na maneira $(sen(x), \cos(x))$. Ainda, valos dizer que nossa circunferência não faz distinção a outros modulo 2π, ou seja, o intervalo em que a circunferência irá estar será $[0,2\pi)$, isso significa dizer que não iremos fazer distinção entre ângulos diferentes. Para cada coordenada $(sen(x), \cos(x))$. irá existir um ângulo α $\in [0,2\pi)$.

Dada a seguinte relação de equivalência: $[x] = \{y \in S^1; y \sim x\}$,

$$y \sim x \Rightarrow y - x \in \mathbb{Q}$$

Agora considere:

$$\mathrm{V} = \{\text{um unico elemto das classes de equivalencia } [\mathrm{x}]$$

$\{\mathrm{ri}\}\mathrm{i} \in \mathbb{N}$ uma enumeração do conjunto $\mathbb{Q}$

$$\text{e } \mathrm{V_i} \text{ uma rotação,}$$

Considere:

$Vi = ri + V$, assim temos que:

$$S^1 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} Vi$$

Logo : $\bigcup_{i=1}^{+\infty} Vi \subseteq S^1$.

Agora, considere que $\mathrm{n} \in S^1$ e considere a $[n]$.

Com a classe de equivalência de $[n]$ vamos formar V a parti de um único elemento das classes de equivalência a parti de $[n]$. Seja k um ponto $\in V$ e k $\in [n] \Rightarrow k - n \in \mathbb{Q}$, seja ele r_{i0}. Com isso, temos que $n = r_{i0} + w \in V_{i0} = r_{i0} + V$.

Assim,

$S^1 = \bigcup_{i0=1}^{+\infty} V_{i0}$, logo temos que $S^1 \subseteq \bigcup_{i0=1}^{+\infty} V_{i0}$

VI. CONCLUSÃO/CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, com a conclusão da demonstração do teorema feito anteriormente concluo meu projeto de iniciação. Com esse estudo ao teorema, foi visto a dificuldade de acervos, principalmente brasileiros, a respeito do tema, com isso, o teorema provado consiste em uma contribuição à área da pesquisa em matemática. Vale ressaltar que foram achadas alguns exemplares de demonstração, e a primeiro contato viu-se a dificuldade de compreensão dos mesmos, mas o nosso abrange conceitos mais simples que comprovam o que queiramos, considerando o axioma da escolha. Apesar

de o trabalho ser provado matematicamente, não é possível replicar o experimento devido a falta de tecnologia necessária para um possível experimento.

VII. REFERÊNCIAS

IEZZI,G; MURAKAMI, C; **Fundamentos de Matemática Elementar**: Conjuntos e Funções, 3 ed., Atual, 1977.

LIMA, Elon. **Analise Real**. Volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Matemática Universitária), 2004.

OLIVEIRA JUNIOR, J. C.; et all; **O TEOREMA DE BANACH-TARSKI NA CIRCUNFERENCIA**. ReviSeM,2019, Nº.2, 146–155.

SANTOS, J.V.S. **O AXIOMA DA ESCOLHA E SUAS APLICAÇÕES.** Universidade Federal Fluminense: Instituto de Matemática e Estatística, Niterói, 2019.

HALMOS, Paul R. **TEORIA INGENUA DOS CONJUNTOS.** PUC: Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2001.

VIII. AGRADECIMENTOS

Agradeço a Fundação de Amparo a Pesquisa do Tocantins – FAPT – Brasil. Pelo apoio de financiamento do projeto, além do mais agradeço ao professor José Carlos de Oliveira Junior pelo auxilio e apoio durante a realização do projeto, sem ele, não seria possível a conclusão do projeto.