



## MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGAS CURVAS FINAS

### Generalized finite element method for free vibration of thin curved beams

Ramon Macedo Corrêa (1)(P); Marcos Arndt (2); Roberto Dalledone Machado (3)

(1) Engenheiro Civil, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil.

Email para Correspondência: ramoncorrea1992@gmail.com; (P) Apresentador.

**Resumo:** O estudo do comportamento estático e dinâmico de vigas curvas tem se tornado cada vez mais relevante. Isso ocorre, pois, tais vigas possuem grande apelo arquitetônico e sua utilização em estruturas de edifícios tem sido frequente. O Método dos Elementos Finitos (MEF), na análise dinâmica, em geral apresenta bons resultados apenas para as primeiras frequências, além disso o uso de polinômios de ordem baixa pode causar problemas de travamentos numéricos, dado a sensibilidade que elementos de vigas curvas tem para estes fenômenos. Para contornar estes problemas pode se utilizar outros métodos enriquecidos baseados no MEF, como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). O MEFG tem como origem o Método da Partição da Unidade, que é utilizado para obtenção do espaço de aproximação empregado no método generalizado. Neste trabalho, são utilizadas funções enriquecedoras trigonométricas e uma partição da unidade linear para construção de um elemento de viga curva fina para análise dinâmica pelo MEFG. Trabalhos recentes mostraram a aplicação, com muito sucesso, do MEFG para análise dinâmica de outros elementos estruturais, como barras e vigas de Euler-Bernoulli. Sendo assim, neste trabalho é investigada a eficiência do MEFG com enriquecimento trigonométrico para análise de vibração livre de vigas curvas finas. Para avaliar a eficiência do método são modelados alguns arcos variando o ângulo de abertura, e para cada um deles é feita uma comparação com os resultados de um modelo referência de MEF com malha composta por 200 elementos (804 graus de liberdade).

**Palavras chaves:** *Método dos Elementos Finitos; Método dos Elementos Finitos Generalizados; Vigas Curvas Finas.*

**Abstract:** The study of the static and dynamic behavior of curved beams has become increasingly important. This occurs due to the great architectural appeal of these type of beams whose use in building structures has been frequent. The Finite Element Method (FEM), in dynamic analysis, generally presents good results only for the first frequencies, in addition the use of low-order polynomials can cause numeric locking issues, given the sensitivity that curved beams elements have for these phenomena. In order to avoid these issues, enriched methods based on FEM, such as the Generalized Finite Element Method (GFEM), can be used. The GFEM originated from the Partition of Unity Method, which is used as the basis for obtaining the GFEM approximation space.



In this paper, trigonometric enriched functions and a linear partition of unit are used in order to construct a thin curve beam element for dynamic analysis by GFEM. Recent works have shown the successful application of GFEM in dynamic analysis of other structural elements, such as bars and Euler-Bernoulli beams, where the GFEM frequency spectra were better than those obtained by FEM. Therefore, in this paper the efficiency of GFEM with trigonometric enrichment for free vibration analysis of thin curved beams is investigated. In order to evaluate the method's efficiency some arcs are modeled by varying the opening angle, and for each of them a comparison with the results of a reference FEM model with mesh composed by 200 elements (804 degrees of freedom) is made.

**Keywords:** *Finite Element Method; Generalized Finite Element Method; Thin Curved Beams.*



## 1 INTRODUÇÃO

A análise dinâmica de estruturas pode ser dividida em dois ramos. O primeiro é a análise de vibração livre onde não há uma força externa atuando ao longo do tempo. Nela se buscam as características dinâmicas da estrutura (modos e frequências naturais de vibração). O segundo ramo é a vibração forçada onde há uma força externa aplicada variando ao longo do tempo. O foco deste trabalho é a análise de vibração livre.

De acordo com Chopra (1995) a diferença entre as frequências considerando o amortecimento e não considerando o mesmo é muito pequena para os coeficientes de amortecimento comumente observado nas estruturas da engenharia civil, por isso, na análise de vibração livre dessas estruturas, o amortecimento pode ser desprezado.

Para se resolver o problema matemático encontrado na vibração livre, pode-se optar por um método aproximado, tal qual o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

De acordo com Arndt (2009), na dinâmica de estruturas, o MEF tradicional apresenta bons resultados apenas quando se buscam as frequências mais baixas de vibração, sendo que para frequências mais elevadas é necessário uma malha muito refinada, o que implica em um grande esforço computacional.

Para tentar diminuir o esforço computacional envolvido surgiram métodos enriquecidos de elementos finitos, como o MEFG, onde é possível expandir o espaço de aproximação tradicional do MEF. O MEFG foi proposto paralelamente por diversos autores (Melenk e Babuska, 1996; Duarte e Oden, 1996; Oden, Duarte e Zienkiewicz, 1998; Duarte, Babuska e Oden, 2000; Babuska, Banerjee e Osborn, 2004), e utiliza o Método da Partição da Unidade como base para a expansão do espaço de aproximação do MEF, de tal modo a herdar propriedades de interesse do mesmo.

O MEFG tem sido aplicado com sucesso na análise dinâmica de estruturas de barra, viga de Euler-Bernoulli, entre outros, conforme mostrado em trabalhos recentes (Arndt, Machado e Scremin, 2010; Torii e Machado, 2012; Weinhardt, Arndt e Machado, 2016). Neste trabalho o método será aplicado para elemento de viga curva fina.

De acordo com Leung e Zhu (2004), o elemento de viga curva fina tem despertado o interesse de vários pesquisadores nos últimos tempos e não somente por estar presente em várias estruturas como também por fornecer aspectos do comportamento de cascas.

Uma diferença do elemento de viga curva para o elemento de viga reta é que este apresenta problemas de travamentos numéricos (*membrane* e *shear locking*), que ocorrem, de acordo com Raveendranath, Singh e Pradhan (2000) pela incapacidade do elemento finito empregado em representar o comportamento inestensional à flexão. Para tentar contornar os problemas de travamentos numéricos será utilizado neste trabalho o MEFG com enriquecimento trigonométrico.

## 2 VIBRAÇÃO LIVRE DE ESTRUTURAS

Quando se estuda o comportamento dinâmico de uma estrutura, acaba-se recaindo na clássica equação do movimento representada, para vibração livre não amortecida, por:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = 0 \quad (1)$$

onde  $[\mathbf{M}]$  é a matriz de rigidez,  $[\mathbf{K}]$  é a matriz de massa,  $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$  é o vetor de acelerações e  $\{\mathbf{u}\}$  é o vetor de deslocamentos.

Ao se assumir que a resposta de deslocamentos é periódica, como acontece em problemas de dinâmica, acaba-se recaindo no problema de autovalores e autovetores generalizado, descrito por:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\boldsymbol{\varphi}\} = 0 \quad (2)$$

onde  $\omega$  são as frequências naturais de vibração e  $\{\boldsymbol{\varphi}\}$  são os modos de vibração.

A obtenção das matrizes de massa e rigidez depende do método empregado.

## 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

No MEF e no MEFG pode se escrever a resposta aproximada de deslocamentos como uma combinação linear de funções, da seguinte forma:

$$u_h = \sum_{i=1}^n F_i \cdot a_i \quad (3)$$

onde  $F_i$  são as funções de forma,  $a_i$  são os graus de liberdade relacionados às funções de forma e  $n$  é o número de funções de forma.

No MEF, tradicionalmente, as funções de forma são ligadas à graus de liberdade nodais, enquanto que no MEFG as mesmas podem ser ligadas a graus de liberdade relacionados ao domínio do elemento, aqui chamados de graus de liberdade de campo.

O MEFG é aqui construído de forma a manter as funções de forma clássicas do MEF ligadas aos graus de liberdade nodais e acrescentar funções de enriquecimento que sejam nulas nos nós para as variáveis de interesse, para assim manter a facilidade de acoplamento de elementos e imposição das condições de contorno do MEF.

Conforme já dito, o MEFG tem como base o Método da Partição da Unidade, então as funções de enriquecimento escolhidas não são utilizadas diretamente como funções de forma, primeiramente as mesmas são multiplicadas por funções partição da unidade. Neste trabalho é utilizada um partição da unidade linear, descrita pelas equações a seguir, no domínio  $[0, 1]$ :

$$\eta_1 = 1 - \xi \quad (4)$$

$$\eta_2 = \xi \quad (5)$$

sendo  $\xi = \frac{x}{L_e}$  e  $L_e$  o comprimento do elemento.

## 4 FUNÇÕES DE FORMA

Para a interpolação dos deslocamentos que são descritos posteriormente são definidas as funções de forma dos elementos classe  $C^0$  e  $C^1$  que são utilizadas neste trabalho, todas as funções são definidas no intervalo  $[0, 1]$ .

As funções de forma são divididas em duas parcelas, uma primeira ligada aos graus de liberdade nodais e uma segunda ligada aos graus de liberdade de campo.

### 4.1 Funções de Forma $C^0$

A primeira parcela das funções de forma  $C^0$  utiliza as funções de forma clássicas do MEF, os polinômios lineares de Lagrange, que definidos no domínio em questão, são descritos pelas expressões a seguir:

$$F_1 = 1 - \xi \quad (6)$$

$$F_2 = \xi \quad (7)$$

As funções de enriquecimento empregadas nesse trabalho foram propostas em Arndt (2009), Torii (2012) e Weinhardt (2016) para análise dinâmica de barras retas e são descritas pelas expressões:

$$\Gamma_{1j} = \text{sen}(\beta_j \xi) \quad (8)$$

$$\Gamma_{2j} = \text{sen}[\beta_j(\xi - 1)] \quad (9)$$

$$\Psi_{1j} = \text{cos}(\beta_j \xi) - 1 \quad (10)$$

$$\Psi_{2j} = \text{cos}[\beta_j(\xi - 1)] - 1 \quad (11)$$

sendo  $\beta_j = \left[ 2j - \frac{1}{2} \right] \pi$ ,  $j = 1, 2, \dots, nl$  e  $nl$  é o número de níveis de enriquecimento.

No MEFG, conforme dito anteriormente, as funções enriquecedoras são multiplicadas por funções partição da unidade, então as funções que são de fato utilizadas como funções de forma são descritas por:

$$F_{4j-1} = \eta_1 \cdot \Gamma_{1j} \quad (12)$$

$$F_{4j} = \eta_2 \cdot \Gamma_{2j} \quad (13)$$

$$F_{4j+1} = \eta_1 \cdot \Psi_{1j} \quad (14)$$

$$F_{4j+2} = \eta_2 \cdot \Psi_{2j}, j = 1, 2, \dots, nl \quad (15)$$

## 4.2 Funções de Forma $C^1$

A primeira parcela das funções de forma  $C^1$  são os polinômios cúbicos de Hermite, que são classicamente utilizados no MEF. Tais polinômios estão relacionados aos graus de liberdade nodais e são descritos pelas nas expressões:

$$F_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (16)$$

$$F_2 = L_e \xi (1 - 2\xi + \xi^2) \quad (17)$$

$$F_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (18)$$

$$F_4 = L_e \xi (\xi^2 - \xi) \quad (19)$$

onde  $L_e$  é o comprimento do elemento.

As funções enriquecedoras empregadas nesse trabalho foram propostas por Arndt (2009) para análise dinâmica de viga de Euler-Bernoulli, sendo expressas por:

$$\Phi_j = \cos[(j-1)\pi\xi] - \cos[(j+1)\pi\xi], \quad j = 1, 2, \dots, nl \quad (20)$$

Utilizando a técnica do MEFG, as funções que são de fato utilizadas como funções de forma são as mostradas nas expressões a seguir:

$$F_{2j+3} = \eta_1 \cdot \Phi_j \quad (21)$$

$$F_{2j+4} = \eta_2 \cdot \Phi_j, \quad j = 1, 2, \dots, nl \quad (22)$$

## 5 ELEMENTO DE VIGA CURVA FINA

O elemento de viga curva fina é desenvolvido em Dawe (1974), Raveendranath, Singh e Pradhan (2000) e Leung e Zhu (2004), e o campo de deslocamentos é descrito em função do deslocamento axial ( $u$ ) e do deslocamento transversal ( $w$ ), conforme a Figura 1.

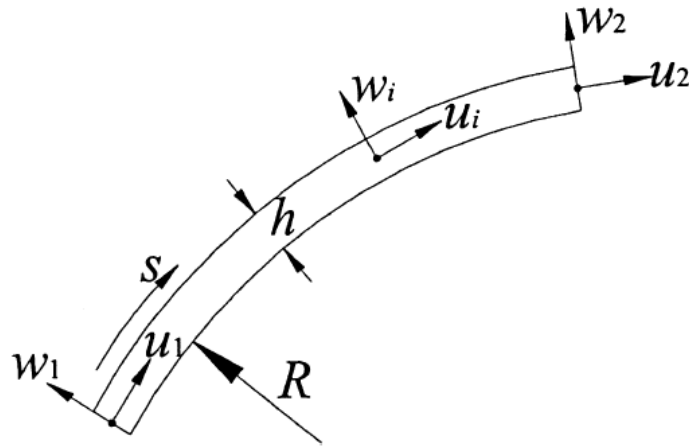
Dawe (1974), Raveendranath, Singh e Pradhan (2000) e Leung e Zhu (2004) descrevem que através da teoria clássica de casca, a deformação axial ( $\epsilon$ ), a rotação ( $\phi$ ) e a mudança de curvatura ( $\chi$ ) são descritos em função dos deslocamentos e de suas derivadas da seguinte forma:

$$\epsilon = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R} \quad (23)$$

$$\phi = \frac{u}{R} - \frac{dw}{ds} \quad (24)$$

$$\chi = \frac{1}{R} \frac{du}{ds} - \frac{d^2w}{ds^2} \quad (25)$$

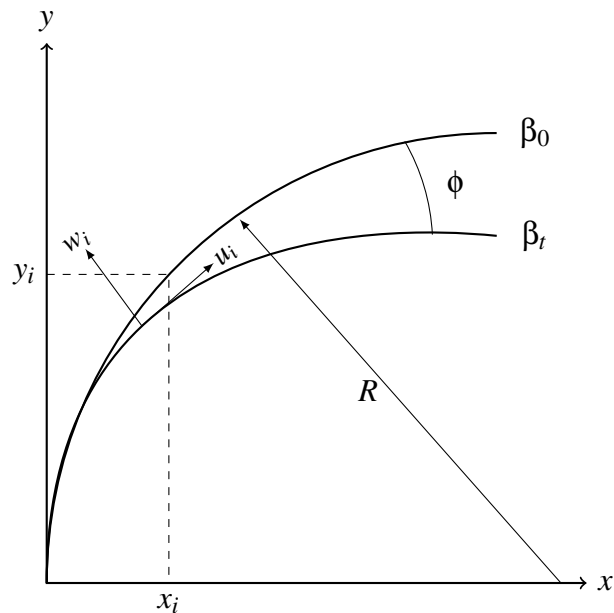
onde  $s$  é um sistema de coordenadas polar e  $R$  é o raio do arco.



**Figura 1. Elemento de viga curva fina.**

Fonte: Leung e Zhu (2004).

A rotação ( $\phi$ ) e a mudança de curvatura ( $\chi$ ) do elemento de viga curva fina são mostradas nas Figuras 2 e 3, onde  $\beta_0$  e  $\beta_t$  são as configurações deformada e indeformada, respectivamente.



**Figura 2. Rotação ( $\phi$ ) do elemento de viga curva fina.**

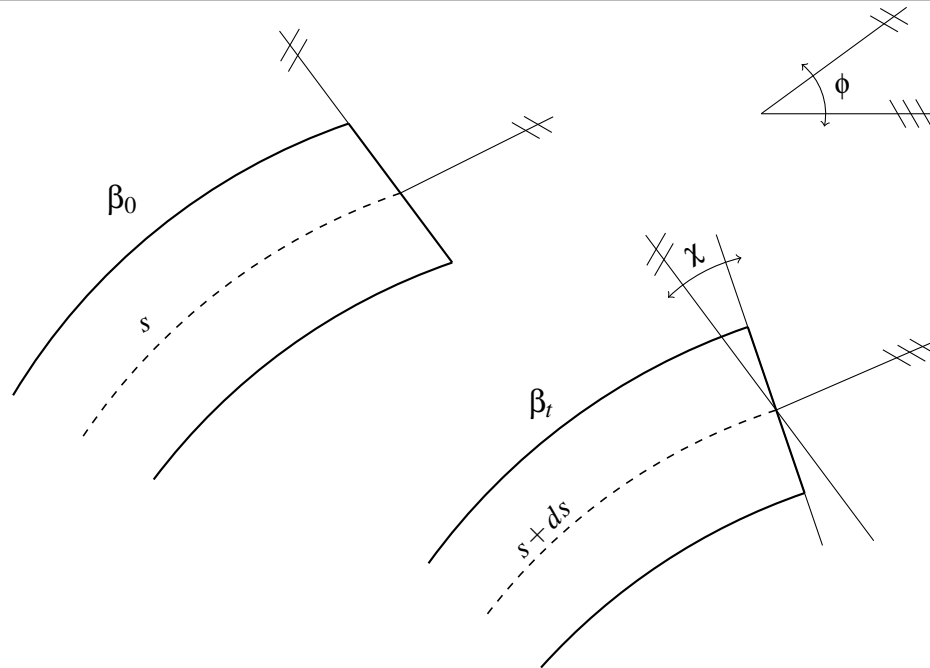


Figura 3. Rotação ( $\phi$ ) e a mudança de curvatura ( $\chi$ ).

As expressões de energia de deformação ( $U$ ) e energia cinética ( $T$ ) para uma viga curva fina são dadas por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EA\varepsilon^2 + EI\chi^2) ds \quad (26)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) ds \quad (27)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $A$  é a área da seção transversal e  $\rho$  é a massa específica.

O campo de deslocamentos pode então ser escrito como:

$$u = \sum P_i \cdot u_i \quad (28)$$

$$w = \sum Q_i \cdot w_i \quad (29)$$

onde  $P_i$  são as funções de forma relacionados a  $u$ ,  $Q_i$  são as funções de forma relacionados a  $w$ ,  $u_i$  são os graus de liberdade relacionados aos deslocamentos axiais e  $w_i$  são os graus de liberdade relacionados aos deslocamentos transversais.



Sendo,  $\{\mathbf{q}\}$  um vetor contendo os graus de liberdade relacionados a  $u$  e  $w$  na forma:

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (30)$$

e sendo  $\{N_P\}$  um vetor formado pelas funções de forma  $P_i$  e  $\{N_Q\}$  um vetor formado pelas funções de forma  $Q_i$ :

$$\{\mathbf{N}_P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \text{ e } \{\mathbf{N}_Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (31)$$

e escrevendo ainda:

$$\{\overline{\mathbf{N}}_P\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_P \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ e } \{\overline{\mathbf{N}}_Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{N}_Q \end{Bmatrix} \quad (32)$$

de tal modo que  $\{\overline{\mathbf{N}}_P\}$  e  $\{\overline{\mathbf{N}}_Q\}$  tenham a mesma dimensão e que ela seja igual a dimensão de  $\{\mathbf{q}\}$ . Pode-se então descrever os campos de deslocamentos como:

$$u = \{\overline{\mathbf{N}}_P\}^T \{\mathbf{q}\} \text{ e } w = \{\overline{\mathbf{N}}_Q\}^T \{\mathbf{q}\} \quad (33)$$

O Langrangiano em termos dos graus de liberdade para vibração livre, é então escrito como:

$$L = T - U = \frac{1}{2} \left( \{\dot{\mathbf{q}}\}^T [\mathbf{M}] \{\dot{\mathbf{q}}\} - \{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{q}\} \right) \quad (34)$$

Aplicando as técnicas do cálculo variacional em (34) a equação do movimento para vibração livre não amortecida de elementos de vigas curvas finas se torna:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{q}\} = 0 \quad (35)$$

onde, as matrizes de rigidez e massa elementares são escritos da seguinte forma:

$$[\mathbf{K}]^e = \int_0^L \begin{Bmatrix} \frac{d\overline{N}_P}{ds} + \frac{\overline{N}_Q}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{d\overline{N}_P}{ds} - \frac{d^2\overline{N}_Q}{ds^2} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\overline{N}_P}{ds} + \frac{\overline{N}_Q}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{d\overline{N}_P}{ds} - \frac{d^2\overline{N}_Q}{ds^2} \end{Bmatrix} ds \quad (36)$$

$$[\mathbf{M}]^e = \int_0^L \rho A \begin{Bmatrix} \overline{N}_P \\ \overline{N}_Q \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \overline{N}_P \\ \overline{N}_Q \end{Bmatrix} ds \quad (37)$$

## 6 ELEMENTO DE MEF E MEFG

O elemento de MEF que será usado como referência utiliza apenas as funções de forma relacionadas aos graus de liberdade nodais, a interpolação de  $u$  e  $w$  é feita através das funções de forma  $C^1$ , o que resulta em 4 graus de liberdade nodais sendo eles  $u_i$ ,  $\frac{du_i}{ds}$ ,  $w_i$  e  $\frac{dw_i}{ds}$ .

Por sua vez o elemento de MEFG utiliza as funções de forma  $C^0$  e  $C^1$  para interpolar  $u$  e  $w$  respectivamente, o que resulta nos graus de liberdade nodais  $u_i$ ,  $w_i$  e  $\frac{dw_i}{ds}$  mais os graus de liberdade de campo relacionados ao enriquecimento.

## 7 RESULTADOS NUMÉRICOS

Foram modelados 4 arcos conforme a Figura 4 variando o ângulo de abertura ( $\alpha$ ) do arco. Foram feitos modelos com  $\alpha = 30^\circ, 50^\circ, 80^\circ$  e  $130^\circ$ . Os arcos possuem as seguintes propriedades físicas e geométricas: seção transversal de 20 cm x 20 cm, módulo de elasticidade igual a 28000 MPa, massa específica igual a 2800 kg/m<sup>3</sup> e raio de curvatura igual a 30 cm.

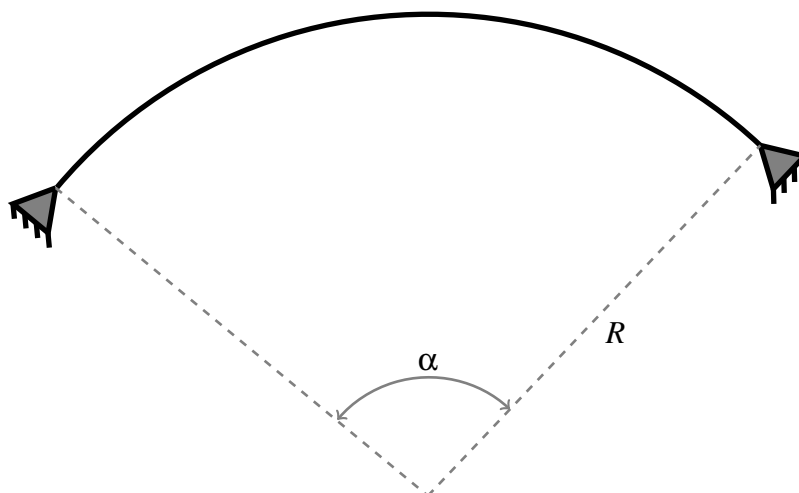


Figura 4. Esquema dos arcos modelados.

Os resultados utilizando o modelo de MEF como referência estão dispostos nas Tabelas 1, 2, 3 e 4 para as 10 primeiras frequências obtidas. Todos os modelos de MEFG possuem

apenas um elemento sendo variado o número de níveis de enriquecimento ( $nl$ ).

**Tabela 1. 10 primeiras frequências ( $f$ ) do arco para  $\alpha = 30^\circ$ .**

$f$	MEF (804 gl)	MEFG (1 nível 12 gl)	MEFG (2 níveis 18 gl)	MEFG (3 níveis 24 gl)	MEFG (4 níveis 30 gl)	MEFG (5 níveis 36 gl)
1	9998,5728	9999,4320	9998,6191	9998,6089	9998,6085	9998,6085
2	11561,1524	11616,5242	11566,2941	11561,3818	11561,1407	11561,1261
3	20249,2689	20255,8040	20249,7844	20249,3045	20249,2828	20249,2815
4	29953,4364	30907,5213	29953,4730	29953,4585	29953,4582	29953,4582
5	40153,7854	44619,6715	40181,7061	40153,7077	40153,7075	40153,7075
6	46650,3663	46910,1496	46652,3584	46650,4777	46650,3913	46650,3901
7	50380,6031	126083,0564	50697,0096	50382,4430	50380,5387	50380,5387
8	60314,2307	263743,3396	62049,8573	60588,2786	60316,6010	60314,2472
9	70406,6395		85570,9152	71027,1292	70446,1111	70406,4782
10	80461,3069		104881,4351	81858,8423	81167,1841	80508,9372

**Tabela 2. 10 primeiras frequências ( $f$ ) do arco para  $\alpha = 50^\circ$ .**

$f$	MEF (804 gl)	MEFG (1 nível 12 gl)	MEFG (2 níveis 18 gl)	MEFG (3 níveis 24 gl)	MEFG (4 níveis 30 gl)	MEFG (5 níveis 36 gl)
1	4357,0248	4376,4393	4358,8093	4357,1122	4357,0298	4357,0248
2	5901,3392	5902,5805	5901,3592	5901,3382	5901,3374	5901,3374
3	12076,4879	12086,5811	12077,1790	12076,5207	12076,4936	12076,4921
4	16023,0715	16146,7900	16023,3317	16023,0808	16023,0715	16023,0712
5	18891,0268	19428,4154	18891,1130	18891,0378	18891,0342	18891,0341
6	23901,0381	26766,7420	23919,3563	23901,0449	23901,0370	23901,0365
7	30059,0953	45471,8741	30274,8296	30060,5511	30059,0935	30059,0935
8	35937,8552	95001,3282	37052,1105	36090,2953	35939,3719	35937,8607
9	38146,9092		38250,7345	38189,8916	38147,1382	38146,9116
10	42163,9905		51247,3821	42570,6174	42190,2291	42164,0817

**Tabela 3. 10 primeiras frequências ( $f$ ) do arco para  $\alpha = 80^\circ$ .**

$f$	MEF (804 gl)	MEFG (1 nível 12 gl)	MEFG (2 níveis 18 gl)	MEFG (3 níveis 24 gl)	MEFG (4 níveis 30 gl)	MEFG (5 níveis 36 gl)
1	2156,8457	2161,7930	2157,2536	2156,8640	2156,8464	2156,8454
2	3435,8303	3438,9842	3435,8895	3435,8324	3435,8303	3435,8303
3	6686,5127	6698,2732	6686,6169	6686,5167	6686,5131	6686,5130
4	7420,1516	7456,2923	7422,1245	7420,2271	7420,1561	7420,1523
5	11386,5569	11820,4467	11386,5761	11386,5569	11386,5569	11386,5569
6	13716,3832	16623,0379	13716,7098	13716,6398	13716,3984	13716,3843
7	16172,5277	18023,5155	16260,3069	16172,6766	16172,5431	16172,5286
8	18518,4110	37196,0567	18707,4843	18519,7412	18518,4115	18518,4115
9	22449,6559		23287,6567	22610,1375	22451,1247	22449,6554
10	25866,0106		26543,5352	26044,1694	25876,7437	25866,0383

**Tabela 4. 10 primeiras frequências ( $f$ ) do arco para  $\alpha = 130^\circ$ .**

$f$	MEF (804 gl)	MEFG (1 nível 12 gl)	MEFG (2 níveis 18 gl)	MEFG (3 níveis 24 gl)	MEFG (4 níveis 30 gl)	MEFG (5 níveis 36 gl)
1	1495,5223	1500,5580	1495,6067	1495,5253	1495,5224	1495,5223
2	1559,2644	1559,4152	1559,3030	1559,2675	1559,2646	1559,2644
3	3246,0664	3250,1361	3246,0670	3246,0665	3246,0665	3246,0665
4	4064,2836	4286,6608	4070,6578	4064,4996	4064,2948	4064,2840
5	6008,8885	7169,1468	6009,2661	6008,9334	6008,8909	6008,8886
6	6706,2188	7176,5198	6708,1970	6706,2253	6706,2188	6706,2188
7	9282,7822	10351,4912	9413,9610	9283,0587	9282,7823	9282,7821
8	9666,1767	14283,3194	9796,6238	9666,2659	9666,1766	9666,1766
9	12051,4735		12160,0722	12059,4569	12051,4828	12051,4736
10	13212,2048		14332,3129	13407,2845	13213,4517	13212,2047

## 8 CONCLUSÕES

Como a base matemática do MEF e do MEFG mostra que os resultados numéricos encontrados para as frequências são sempre maiores ou iguais a solução analítica, prespõe-se que se o valor encontrado é inferior ao outro modelo o mesmo está mais próximo da solução analítica. Com isto em vista, os modelos com MEFG com 5 níveis de enriquecimento (36 graus de liberdade) conseguiram resultados menores ou muito próximos ao modelo referência de MEF com 804 graus de liberdade, o que indica que a convergência do MEFG proposto é mais rápida que o modelo de MEF por ter resultados melhores ou muito próximos com muito menos graus de liberdade.



A variação do ângulo de abertura dos arcos não fez tanta diferença na taxa de convergência das frequências analisadas. As análises pelo MEEG dos quatro arcos modelados chegam a valores extremamente para as frequências próximos, por vezes um pouco inferiores, aos resultados obtidos com o MEF tradicional com 200 elementos (804 graus de liberdade).



## REFERÊNCIAS

- Arndt, M., 2009. *O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.
- Arndt, M., Machado, R. D. & Scremin, A., 2010. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n. 6, pp. 659–672.
- Babuska, I., Banerjee, U. & Osborn, J. E., 2004. Generalized finite element methods: main ideas, results, and perspective. *International Journal of Computational Methods*, vol. 1, n. 67, pp. 67–103.
- Chopra, A. K., 1995. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, 3<sup>a</sup> eds. Prentice Hall-New Jersey.
- Dawe, D. J., 1974. Numerical studies using circular arch finite elements. *Computers and Structures*, vol. 4, pp. 729–740.
- Duarte, C. A. M., Babuska, I. & Oden, J. T., 2000. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, vol. 77, pp. 215–232.
- Duarte, C. A. M. & Oden, J. T., 1996. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 237–262.
- Leung, A. Y. T. & Zhu, B., 2004. Fourier p-elements for curved beam vibrations. *Thin-Walled Structures*, vol. 42, pp. 39–57.
- Melenk, J. M. & Babuska, I., 1996. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 289–314.
- Oden, J. T., Duarte, C. A. M. & Zienkiewicz, O. C., 1998. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 153, pp. 117–126.
- Raveendranath, R., Singh, G. & Pradhan, B., 2000. Free vibration of arches using a curved beam element based on a coupled polynomial displacement. *Computers and Structures*, vol. 78, pp. 583–590.
- Torii, A. J., 2012. *Análise dinâmica de estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.
- Torii, A. J. & Machado, R. D., 2012. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 9, n. 3, pp. 1–31.
- Weinhardt, P. O., 2016. *Estudo da Estabilidade do Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise Dinâmica*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná.



---

Weinhardt, P. O., Arndt, M. & Machado, R. D., 2016. GFEM stabilization techniques applied to transient dynamic analysis. *Proceedings of the XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília, DF, Brazil.