



DESENVOLVIMENTO DAS CORRELAÇÕES ENTRE AS TEORIAS DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI E A TRIGONOMETRICA DE TOURATIER: UMA ABORDAGEM TEÓRICA E COMPUTACIONAL

Development of correlations between the Euler–Bernoulli beam theory and Touratier's trigonometric theory: A theoretical and computational approach

Gustavo Burity de Lima (1); Hilton Marques Souza Santana (2); Fabio Carlos da Rocha (3)

(1) Estudante de Iniciação Científica, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão - SE, Brasil.

(2) (P) Estudante de Iniciação Científica, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão - SE, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão - SE, Brasil.

Email para Correspondência: fcrocha@ufs.br; (P) Apresentador

Resumo: A análise convencional de vigas, a qual negligencia a deformação cisalhante, é baseada na teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli. Esta teoria descreve adequadamente o comportamento de vigas finas, no entanto, não é adequada para analisar vigas espessas, em que a deformação cisalhante torna-se importante. Para capturar o efeito cisalhante foi desenvolvida a teoria clássica de primeira ordem proposta por Timoshenko. Entretanto, a teoria de Timoshenko considera variação da tensão cisalhante constante na seção, não sendo assim capaz de capturar a condição de cisalhamento nulo na face superior e inferior da viga. Diversas teorias de alta ordem foram desenvolvidas com o intuito de sanar a deficiência apresentada pela teoria de viga de Timoshenko. Resultados satisfatórios foram obtidos na descrição do comportamento da distribuição de tensão cisalhante, por outro lado, novos parâmetros foram incorporados nas formulações. Estes parâmetros não possuem interpretação física tão óbvias quanto aos parâmetros da teoria clássica de Euler-Bernoulli, o que restringe a aplicação da teoria refinada de viga. Com o objetivo de fornecer interpretação física dos parâmetros presentes na teoria refinada de vigas, o presente trabalho desenvolve uma formulação que correlaciona os parâmetros de alta ordem presentes na teoria trigonométrica de Touratier com os parâmetros da teoria de Euler-Bernoulli. A partir das correlações, soluções analíticas são apresentadas para a teoria de Touratier. Com o objetivo de tornar a aplicação geral, independentemente do tipo de vinculação, é desenvolvida a formulação dos Elementos Finitos aplicado à teoria trigonométrica em análise. Para o desenvolvimento do MEF é utilizada a abordagem variacional para obtenção das variáveis secundárias e primárias consistentes. Tanto o desenvolvimento das soluções analíticas, via correlação entre teorias, quanto a solução numéricas, via MEF, são apresentadas para alguns problemas de viga. Em todos os exemplos analisados os resultados numéricos e analíticos foram concordantes.

Palavras chaves: deformação cisalhante trigonométrica; vigas espessas; método dos elementos finitos; teoria de viga de Touratier; teoria de viga de Euler-Bernoulli.



Abstract: Conventional analysis of beams, which neglects the shear strain, is based on the classical beam theory of Euler–Bernoulli. This theory adequately describes the behavior of thin beams; however, it is not suitable for analyzing thick beams in which the shear deformation becomes important. To capture the shear effect, the classical first order theory was proposed by Timoshenko. However, Timoshenko's theory considers a constant shear stress in the section, thus being unable to capture the null shear condition in the upper and lower faces of the beam. Several high-order theories have been developed in order to overcome the deficiency presented by Timoshenko's beam theory. Satisfactory results have been obtained describing the behavior of the shear stress distribution; however, it is necessary to incorporate new parameters into the formulations. These parameters do not have an obvious physical interpretation as do the parameters of the Euler–Bernoulli classical theory, which restricts the application of the refined beam theory. In order to determine the physical interpretation for the parameters of the refined beam theory, the present work develops a formulation that correlates the higher order parameters of Touratier's trigonometric theory to the parameters of the Euler–Bernoulli theory. From the correlations, analytical solutions are presented for Touratier's theory. To allow implementation in general applications regardless of the type of constraint, a finite element method (FEM) formulation applied to the trigonometric theory under analysis was developed. For the development of the FEM, a variational approach was used to obtain consistent secondary and primary variables. Both the development of the analytical solutions, obtained by the correlation between the theories, and the numerical solutions, obtained by the FEM are presented for some beam problems. In all the examples analyzed, the numerical and analytical results were concordant with each other.

Keywords: *trigonometric shear deformation; thick beams; finite element method; Touratier's beam theory; Euler-Bernoulli beam theory.*



1 INTRODUÇÃO

No século XVIII, Leonhard Euler e Daniel Bernoulli, orientados por Jakob Bernoulli, galgaram importantes descobertas na área da engenharia estrutural, principalmente no desenvolvimento da teoria de vigas clássica. Teoria essa bastante difundida nas universidades e presente em praticamente todos os *softwares* de programação, os quais objetivam determinar a deflexão de vigas.

No entanto, existem algumas limitações ao uso dessa teoria, principalmente no que se refere à hipótese de que as seções transversais permanecem ortogonais à linha neutra após a deformação, o que pode ser tomado como verdade apenas se o efeito cortante da carga for ignorado.

A formulação de outras teorias, mais complexas, porém mais precisas, surge como forma de contornar essas limitações, ao considerar o efeito cortante e abandonar a hipótese das seções ortogonais à linha neutra após deformada, implicando na existência de uma rotação adicional proporcionada pela consideração da deformação cisalhante. Dentre as primeiras tentativas de consideração dessa rotação adicional, tem-se Stephen Timoshenko (1921), que desenvolveu estudos e formulações por volta da década de 20 e chegou à famosa teoria de viga de Timoshenko (TVT) ou teoria de deformação cisalhante de primeira ordem. Entretanto, essa teoria ainda se mostrou falha por necessitar de fatores de correção para obedecer às condições de contorno - tensão cisalhante igual a zero - nas bordas da viga.

Com o objetivo de contornar as dificuldades impostas pela TVT, novas teorias refinadas para vigas surgiram. Entre essas teorias, se destacam as teorias de alta ordem trigonométricas, tendo os trabalhos de Touratier (TOURATIER, 1991) como o principal colaborador para difusão dessa nova ideia. Em Touratier (TOURATIER, 1991), são consideradas funções trigonométricas para descrever o campo de deslocamento, o que proporciona a existência dos campos de deformações longitudinais e transversais, além do efeito de empenamento da seção transversal. Neste trabalho, é utilizada e analisada a teoria de viga de Touratier, quando comparada tanto à teoria de Euler-Bernoulli quanto à teoria da elasticidade.

As teorias de viga de alta ordem, assim como a de Touratier, apresentam, em sua formulação, parâmetros de alta ordem, os quais não são de interpretação física imediatas. Para contornar esse problema, o presente trabalho realiza o desenvolvimento da correlação entre os parâmetros de alta ordem de Touratier aos parâmetros físicos de Euler-Bernoulli.

O presente trabalho está dividido da seguinte forma: no item 2, são apresentadas as fundamentações teóricas para teoria de viga de Euler-Bernoulli e de Touratier; no item 3, são desenvolvidas as correlações entre os parâmetros físicos de Euler-Bernoulli e de Touratier; no item 4 é desenvolvida a formulação variacional consistente para a teoria trigonométrica em análise e, na sequência, no item 5, a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) é aplicada para a teoria em estudo. Por último, nos itens 6 e 7 são apresentados resultados de aplicação e as conclusões, respectivamente.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nessa seção, seguem-se as fundamentações das teorias de Euler-Bernoulli e de Touratier para o campo de deslocamento generalizado, a partir da cinemática proposta por cada uma das teorias.

2.1 Teoria de viga de Euler-Bernoulli

De acordo com Wang, Reddy e Lee (2000), a cinemática proposta a partir das hipóteses de Euler-Bernoulli, é descrita por:

$$u = -z \frac{dw}{dx} \text{ e } w = w(x)$$

em que u, w, z representam, respectivamente, os deslocamentos longitudinal, transversal e a coordenada de espessura da viga.

A partir das relações deslocamento-deformação da teoria da Elasticidade (TIMOSHENKO, GOODIER, 1986), tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ e } \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0$$

Fazendo uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), é possível escrever:

$$\begin{aligned} \delta w = \delta U + \delta V = 0 &\Rightarrow \int_0^L \int_A \sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} dA dx - \int_0^L q \delta w dx = 0 \Rightarrow \\ \int_0^L \int_A -Ez \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot -z \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dA dx - \int_0^L q \delta w dx = 0 &\Rightarrow E \int_0^L \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \left(\int_A z^2 dA \right) dx - \int_0^L q \delta w dx = 0 \Rightarrow \\ EI \int_0^L \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dx - \int_0^L q \delta w dx = 0 \end{aligned}$$

Realizando a integração por partes ao primeiro termo da última equação, tem-se:

$$\int_0^L \delta w \left(EI \frac{d^4 w}{dx^4} - q \right) dx - \left[-EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d \delta w}{dx} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[-EI \frac{d^3 w}{dx^3} \delta w \right]_{x=0}^{x=L} = 0$$

Aplicando o princípio variacional da mínima energia na equação anterior, tem-se a equação diferencial que descreve o problema e suas condições de contorno:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \tag{1}$$

em que $\left\{ \begin{matrix} w \\ \frac{dw}{dx} \end{matrix} \right\}$ ou $\left\{ \begin{matrix} Q^E \\ M^E \end{matrix} \right\}$ são prescritos. É importante ressaltar que Q^E e M^E são, respectivamente, o cortante e o momento de Euler-Bernoulli, os quais são dados por:

$$Q^E = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (2)$$

$$M^E = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3)$$

Aplicando a técnica de separação de variáveis à Eq. (1), tem-se:

$$EI \frac{dw}{dx} = \int \int \int q(x) dx + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI w(x) = \int \int \int \int q(x) dx + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

2.2 Teoria refinada de viga de Touratier

A partir das cinemáticas de Touratier (1991), é possível reescrevê-la em uma única expressão:

$$u = -z \frac{dw}{dx} + f(z) \phi,$$

em que $f(z) = A_1 z + A_2 g(z)$, com A_1 e A_2 constantes, ϕ é a parcela, devido à deformação cisalhante, da rotação da seção transversal da viga em relação ao eixo centroidal. Além disso, u e $w = w(x)$ são, respectivamente, o deslocamento longitudinal e transversal da viga.

A rotação total φ da viga é encontrada da seguinte forma:

$$\varphi = \theta - \phi,$$

onde θ é a rotação devido à flexão.

Utilizando as relações da teoria da Elasticidade, tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{d^2 w}{dx^2} + (A_1 z + A_2 g(z)) \frac{d\phi}{dx}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{dw}{dx} + (A_1 + A_2 g'(z)) \phi + \frac{dw}{dx} = (A_1 + A_2 g'(z)) \phi$$

Aplicando o PTV, tem-se:

$$E \int_0^L \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \left(\int_A z^2 dA \right) dx - E \int_0^L \frac{d\delta\phi}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} \left[\int_A z (A_1 z + A_2 g(z)) dA \right] dx$$

$$\begin{aligned}
 & -E \int_0^L \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \frac{d\phi}{dx} \left[\int_A z (A_1 z + A_2 g(z)) dA \right] dx + E \int_0^L \frac{d\phi}{dx} \frac{d\delta\phi}{dx} \left[\int_A (A_1 z + A_2 g(z))^2 dA \right] dx \\
 & + G \int_0^L \phi \delta\phi \left[\int_A (A_1 + A_2 g'(z))^2 dA \right] dx - \int_0^L q \delta w dx = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

A partir das seguintes relações:

$$F = \int_A z (A_1 z + A_2 g(z)) dA \tag{5}$$

$$D = \int_A (A_1 z + A_2 g(z))^2 dA \tag{6}$$

$$K = \int_A (A_1 + A_2 g'(z))^2 dA \tag{7}$$

a Eq. (4) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 & EI \int_0^L \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dx - EF \int_0^L \frac{d\delta\phi}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} dx - EF \int_0^L \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \frac{d\phi}{dx} dx + ED \int_0^L \frac{d\phi}{dx} \frac{d\delta\phi}{dx} dx \\
 & + GK \int_0^L \phi \delta\phi dx - \int_0^L q \delta w dx = 0
 \end{aligned}$$

Aplicando a integração por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \delta w \left(EI \frac{d^4 w}{dx^4} - EF \frac{d^3 \phi}{dx^3} - q \right) + \delta\phi \left(EF \frac{d^3 w}{dx^3} - ED \frac{d^2 \phi}{dx^2} + GK \phi \right) dx \\
 & - \frac{d\delta w}{dx} \left[-EI \frac{d^2 w}{dx^2} + EF \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=0}^{x=L} + \delta w \left[-EI \frac{d^3 w}{dx^3} + EF \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right]_{x=0}^{x=L} + \delta\phi \left[-EF \frac{d^2 w}{dx^2} + ED \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=0}^{x=L} = 0
 \end{aligned}$$

A partir do princípio variacional da mínima energia, é possível determinar os momentos e os cortantes para a teoria em estudo:

$$M^T = \int_A \sigma_x z dA = E \int_A -z z \frac{d^2 w}{dx^2} + z \frac{d\phi}{dx} (A_1 z + A_2 g(z)) dA =$$

$$-E \frac{d^2 w}{dx^2} \int_A z^2 dA + E \frac{d\phi}{dx} \int_A z (A_1 z + A_2 g(z)) dA \Rightarrow M^T = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} + EF \frac{d\phi}{dx}$$

$$Q^T = \frac{\partial M^T}{\partial x} = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} + EF \frac{d^2 \phi}{dx^2}$$

Portanto, pelo princípio variacional da mínima energia, tem-se a equação que descreve o problema e suas condições de contorno:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - EF \frac{d^3 \phi}{dx^3} = q \tag{8}$$

$$EF \frac{d^3 w}{dx^3} - ED \frac{d^2 \phi}{dx^2} + GK \phi = 0 \quad (9)$$

$\begin{Bmatrix} w \\ \frac{dw}{dx} \\ \phi \end{Bmatrix}$ ou $\begin{Bmatrix} Q^T \\ M^T \\ M^a \end{Bmatrix}$ são prescritos. É importante ressaltar que Q^T , M^T e M^a são o cortante e os

momentos de alta ordem, respectivamente. Os parâmetros podem ser descritos por:

$$Q^T = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} + EF \frac{d^2 \phi}{dx^2} \quad (10)$$

$$M^T = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} + EF \frac{d\phi}{dx} \quad (11)$$

$$M^a = -EF \frac{d^2 w}{dx^2} + ED \frac{d\phi}{dx} \quad (12)$$

Integrando a Eq. (8) e derivando a Eq. (8.2), obtém-se:

$$\int EI \frac{d^4 w}{dx^4} - EF \frac{d^3 \phi}{dx^3} dx = \int q dx \Rightarrow EI \frac{d^3 w}{dx^3} - EF \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \int q dx + C_1 \quad (13a)$$

$$Q^E = -\int q dx + C_1 \quad (13b)$$

Manipulando algebricamente a Eq. (9), é possível reescrevê-la:

$$E \frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{ED}{F} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{GK}{F} \phi = 0 \quad (14)$$

Substituindo a Eq. (13a) e a Eq. (13b) na Eq. (14):

$$\frac{ED}{F} \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{GK}{F} \phi - \frac{EF}{I} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{-Q^E}{I}$$

Realizando o tratamento algébrico da equação anterior, tem-se:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{-Q^E}{\alpha EI} + \lambda^2 \phi$$

em que:

$$\lambda^2 = \frac{GKI}{E(ID - F^2)} \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{ID - F^2}{IF}; \beta = \frac{GK}{EF}$$

Aplicando o método de variação de parâmetros (BOYCE e DIPRIMA, 2012) para solucionar a EDO anterior, é escrita a solução geral:

$$\phi = -\frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda \alpha EI} \int \cosh(\lambda x) Q^E dx + \frac{\cosh(\lambda x)}{\lambda \alpha EI} \int \sinh(\lambda x) Q^E dx + C_6 \sinh(\lambda x) + C_5 \cosh(\lambda x) \quad (16)$$

Substituindo a Eq. (15) e a Eq. (16) na Eq. (14), obtém-se:

$$EI \frac{d^3 w}{dx^3} = \left(\frac{EDI\lambda^2}{F} - \frac{GKI}{F} \right) \left[C_5 \cosh(\lambda x) + C_6 \sinh(\lambda x) + \frac{\cosh(\lambda x)}{\lambda \alpha EI} \int \sinh(\lambda x) Q^E dx - \frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda \alpha EI} \int \cosh(\lambda x) Q^E dx \right] + Q^E \frac{D}{F\alpha} (\sinh^2(\lambda x) - \cosh^2(\lambda x)) \quad (17)$$

Explicitando-se o carregamento e integrando três vezes, encontra-se o deslocamento.

3 CORRELAÇÃO ENTRE TEORIAS DE EULER-BERNOULLI E TOURATIER

A partir das equações desenvolvidas nas seções anteriores, e usando a nomenclatura “T” para teoria de alta ordem e “E” para teoria de Euler-Bernoulli, pode-se escrever:

$$Q^E = -EI \frac{d^3 w^E}{dx^3}, \quad M^E = -EI \frac{d^2 w^E}{dx^2}, \quad \frac{d^2 M^E}{dx^2} = -q$$

$$Q^T = -EI \frac{d^3 w^T}{dx^3} + EF \frac{d^2 \phi^T}{dx^2}, \quad M^T = -EI \frac{d^2 w^T}{dx^2} + EF \frac{d\phi^T}{dx}, \quad \frac{dQ^T}{dx} = -q$$

$$\frac{d^2 M^T}{dx^2} = -q \quad (18)$$

Relacionando a Eq. (1) com a Eq. (18):

$$\frac{d^2 M^E}{dx^2} = \frac{d^2 M^T}{dx^2} \Rightarrow \frac{dM^E}{dx} = \frac{dM^T}{dx} + C_1 \Rightarrow Q^T = Q^E + C_1 \quad (19)$$

$$\frac{dM^T}{dx} = \frac{dM^E}{dx} + C_1 \Rightarrow M^T = M^E + C_1 x + C_2 \quad (20)$$

Substituindo a Eq. (3) e a Eq. (11) na Eq. (20), tem-se:

$$-EI \frac{d^2 w^T}{dx^2} + EF \frac{d\phi^T}{dx} = -EI \frac{d^2 w^E}{dx^2} + C_1 x + C_2$$

Realizando a integração da equação anterior, pode ser escrita a expressão:

$$EF \phi^T = EI \frac{dw^T}{dx} - EI \frac{dw^E}{dx} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (21)$$

$$EIw^T = EIw^E + EF \int \phi^T dx - C_1 \frac{x^3}{6} - C_2 \frac{x^2}{2} - C_3 x - C_4 \quad (22)$$

4 FORMULAÇÃO VARIACIONAL CONSISTENTE PARA TEORIA DE TOURATIER

Nessa seção é desenvolvida a formulação variacional (formulação fraca) a partir da integração das equações diferenciais que regem o problema para a teoria de alta ordem em estudo. Em sequência, é desenvolvida a formulação do MEF para a teoria de Touratier.

Utilizando uma formulação integral-ponderada, com função peso (Ψ e v) em cada equação, tem-se:

$$\int_A v \left(EI \frac{d^4 w}{dx^4} - EF \frac{d^3 \phi}{dx^3} - q \right) dx = 0 \quad (23)$$

$$\int_A \Psi \left(EF \frac{d^3 w}{dx^3} - ED \frac{d^2 \phi}{dx^2} + GK \phi \right) dx = 0 \quad (24)$$

Realizando o tratamento algébrico da Eq. (24) e substituindo a Eq. (12) nela, obtém-se:

$$\int_A -EF \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d\Psi}{dx} + ED \frac{d\phi}{dx} \frac{d\Psi}{dx} + \Psi GK \phi dx - [\Psi]_A [M^a]_A = 0$$

Portanto, o problema variacional constitui-se em encontrar w e ϕ tal que:

$$C(\Psi, w) + D(\Psi, \phi) = L_2(\Psi) \quad (25)$$

onde C , D e L_2 são operadores tais que:

$$C(\Psi, w) = \int_{Xa}^{Xb} -EF \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d\Psi}{dx} dx \quad (26)$$

$$D(\Psi, \phi) = \int_{Xa}^{Xb} ED \frac{d\phi}{dx} \frac{d\Psi}{dx} + \Psi GK \phi dx \quad (27)$$

$$L_2(\Psi) = \hat{Q}_6 \Psi(Xb) + \hat{Q}_3 \Psi(Xa) \quad (28)$$

onde:

$$\hat{Q}_6 = -M^a(Xb), \hat{Q}_3 = M^a(Xa)$$

Semelhantemente, inserindo a Eq. (10) e a Eq. (11) na Eq. (23):

$$\int_A EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} - EF \frac{d\phi}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} - vq dx + \left[\frac{dv}{dx} \right]_A [M^T]_A - [v]_A [Q^T]_A = 0$$

Portanto, o problema variacional constitui-se em encontrar w e ϕ tal que:

$$A(v, w) + B(v, \phi) = L_1(v) \quad (29)$$

onde A , B e L_1 são operadores tais que:

$$A(v, w) = \int_{Xa}^{Xb} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx \quad (30)$$

$$B(v, \phi) = \int_{Xa}^{Xb} -EF \frac{d\phi}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} dx \quad (31)$$

$$L_1(v) = \int_{Xa}^{Xb} -v q dx + \frac{dv}{dx}(Xb) \hat{Q}_5 + \frac{dv}{dx}(Xa) \hat{Q}_2 + v(Xb) \hat{Q}_4 + v(Xa) \hat{Q}_1 \quad (32)$$

onde:

$$\hat{Q}_5 = M^T(Xb), \hat{Q}_2 = -M^T(Xa), \hat{Q}_4 = -Q^T(Xb), \hat{Q}_1 = Q^T(Xa)$$

5 FORMULAÇÃO DO MEF PARA TEORIA DE TOURATIER

Na presente etapa, será desenvolvida a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para a teoria trigonométrica. Para tanto, as funções aproximadoras serão aplicadas na formulação variacional desenvolvida na seção anterior.

Aproximando o campo de deslocamento e de rotação por $\varphi_i^{(1)}$ e $\varphi_j^{(2)}$, respectivamente, e aplicando o método de Galerkin (REDDY, 2006) para as funções peso ($v \approx \varphi_i^{(1)}$ e $\Psi \approx \varphi_j^{(2)}$), é possível obter a matriz de rigidez do problema:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [y] \\ [u] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F^1] \\ [F^2] \end{bmatrix}, \text{ onde:}$$

$$K^{11} = A(\varphi_i^{(1)}, \varphi_j^{(1)}), K^{12} = B(\varphi_i^{(1)}, \varphi_j^{(2)}), K^{21} = C(\varphi_i^{(2)}, \varphi_j^{(1)}), K^{22} = D(\varphi_i^{(2)}, \varphi_j^{(2)})$$

$$F^1 = L_1(\varphi_i^{(1)}), F^2 = L_2(\varphi_i^{(2)})$$

6 APLICAÇÃO DO MEF ÀS TEORIAS DE VIGA

Nessa seção, é apresentada a análise da aplicação da teoria de alta ordem para estruturas de viga simplesmente apoiada e biengastada. Em todas as análises, é utilizado elemento finito de dois nós. No entanto, são considerados polinômios cúbicos de Hermite para o campo acoplado de deslocamento transversal e sua derivada. Já para o campo de rotação devido ao cisalhamento, é utilizado polinômio quadrático de Lagrange com condensação estática. Os resultados obtidos

por meio da teoria trigonométrica são comparados com as respostas analíticas de referência, e a quantificação da discrepâncias entre estas respostas é dada pelas equações, norma L_2 :

$$Erro = \frac{\|U_{ref} - U_{cal}\|_{L_2}}{\|U_{ref}\|_{L_2}}$$

$$\|U_{ref} - U_{cal}\|_{L_2} = \sqrt{\sum_i^n (U_{ref_i} - U_{cal_i})^2}$$

$$\|U_{ref}\|_{L_2} = \sqrt{\sum_i^n U_{ref_i}^2}$$

6.1 Viga Simplesmente Apoiada (SA)

Para uma viga isostática – simplesmente apoiada (SA) e submetida a um carregamento distribuído uniforme de valor 10 KN/m – foram calculados os erros pela norma L_2 , tendo como referência a teoria da elasticidade para o deslocamento e para a rotação. Nas análises, foram considerados vigas delgadas ($h/L = 0,1$) e moderadamente espessas ($h/L = 0,5$).

Na figura 1 e 2, é apresentado o comportamento do erro para o deslocamento e para a rotação, respectivamente, à medida que a quantidade de elementos finitos é aumentada, tanto para vigas delgadas quanto para moderadamente espessas.

Tanto pela figura 1, quanto pela figura 2, é possível observar menor porcentagem do erro à medida que o número de elementos é aumentado. No entanto, há estabilização do erro com valores inferiores a 4% para viga moderadamente espessa e com valores inferiores a 0,2% para viga delgada, quando se analisou o campo de deslocamento e de rotação.

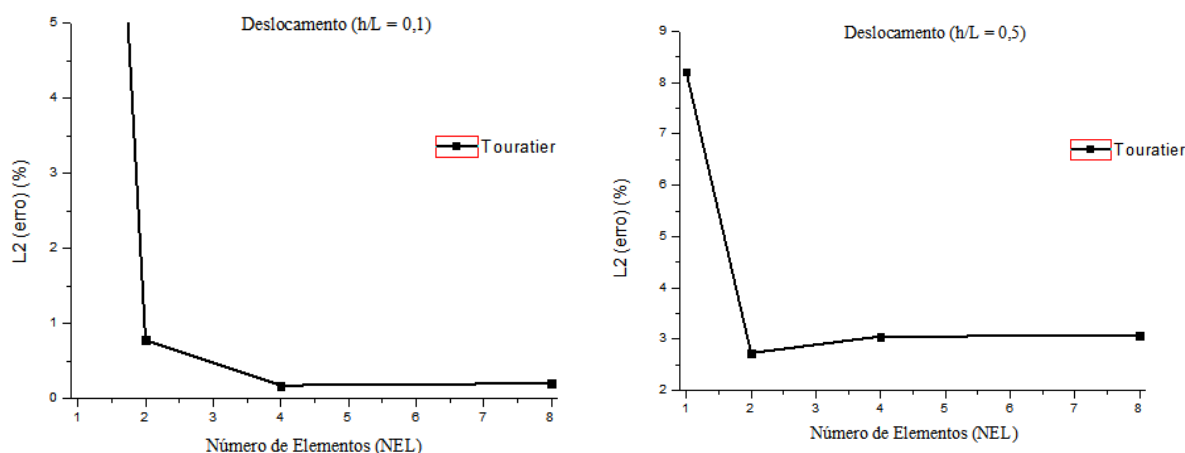


Figura 1. Erro, de acordo com a norma L_2 , para o deslocamento da viga SA submetida a um carregamento distribuído uniforme pela cinemática estudada.

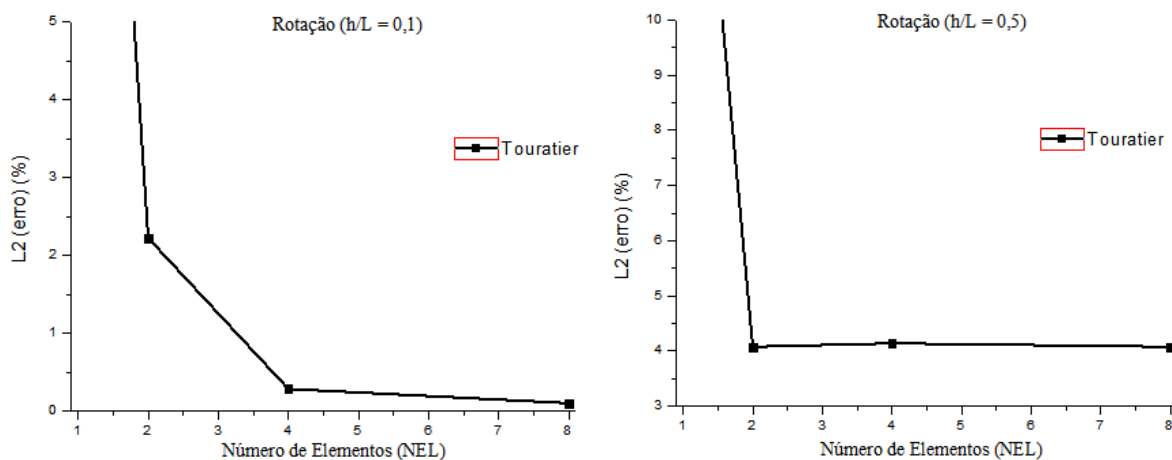


Figura 2. Erro, de acordo com a norma L2, para a rotação da viga SA submetida a um carregamento distribuído uniforme pela cinemática estudada.

A rotação total da viga, pela teoria em estudo, é encontrada por meio da subtração do valor de θ (parcela referente à flexão) pelo valor de ϕ (parcela referente ao cisalhamento). Na figura 3, é mostrado o comportamento da razão $\frac{\theta}{\phi}$ à medida que é variada a razão h/L . Ainda nessa figura 3, é possível observar que o aumento da razão h/L (ou seja, mais espessa), proporciona maior influência da rotação ϕ frente à rotação total. De forma inversa, observa-se quando a razão h/L é diminuída (mais delgada), menos significativo é a influência da rotação ϕ frente à rotação θ , o que caracteriza a ausência do efeito de travamento por cisalhamento (*shear locking*).

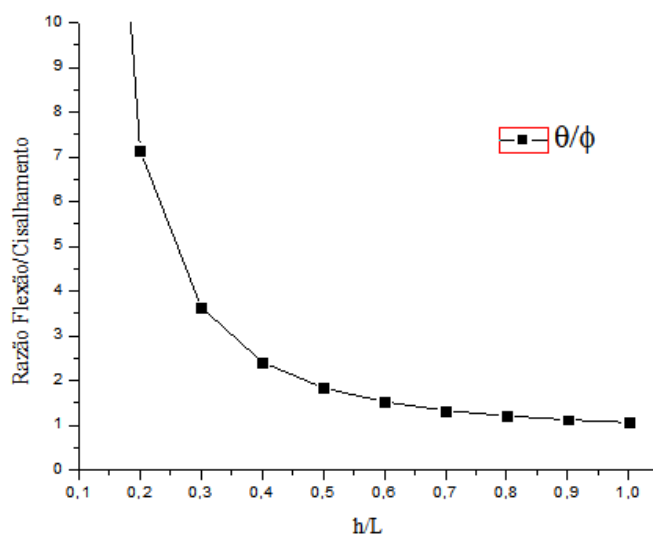


Figura 3. Razão, pela cinemática de Touratier, entre o valor da rotação causada pela flexão e o valor da rotação causada pelo cisalhamento para a borda ($x = 0$) da viga SA submetida a um carregamento distribuído uniforme.

6.2 Viga Biengastada (EE)

Para uma viga hiperestática – biengastada (EE), com comprimento $L = 1$ metro e submetida a um carregamento distribuído uniforme de 10 KN/m – foram calculados os erros relativos em relação entre a solução analítica de Euler-Bernoulli e o numérico de Touratier, obtido pelo MEF com oito elementos de dois nós. Na figura 4 e 5, é mostrado a variação do campo de deslocamento generalizado (deslocamento translacional e rotacional) para viga delgada ($h/L = 0,1$). Pode ser observado pela figura 5 que, mesmo quando considerado viga delgada, a rotação total da teoria de Touratier tem comportamento muito semelhante à de Euler-Bernoulli. Já para o campo de deslocamento (figura 4), a teoria de Touratier proporciona maiores valores quando comparada com a teoria de Euler-Bernoulli, mas com erro inferior a 11% para viga delgada.

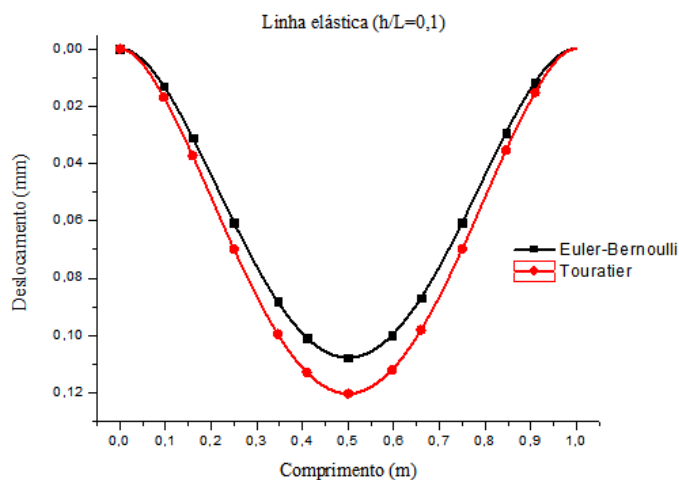


Figura 4. Deflexão da viga EE submetida a um carregamento distribuído uniforme.

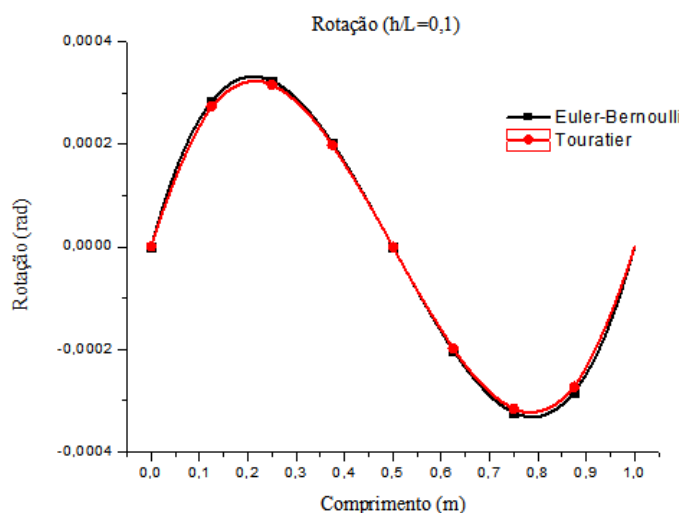


Figura 5. Rotação da viga EE submetida a um carregamento distribuído uniforme.

7 CONCLUSÃO

Foi desenvolvido um estudo acerca da teoria de viga refinada trigonométrica e a teoria de Euler-Bernoulli. Nesse estudo, foram desenvolvidas soluções analíticas para a equação diferencial que descreve o problema de vigas, tanto para a teoria de alta ordem de Touratier, quanto para a teoria de Euler-Bernoulli. A partir dos resultados das análises comparativas, pode-se observar que tanto a teoria de Euler-Bernoulli quanto a teoria de alta ordem têm valores cada vez mais divergentes à medida que a relação h/L é aumentada. Ou seja, quando a viga é esbelta, as teorias tendem a coincidir e comportamento oposto é observado para vigas espessas e moderadamente espessas.

A partir dos resultados obtidos, tem-se que a teoria de alta ordem apresenta vantagens em relação à teoria de Euler-Bernoulli para vigas moderadamente espessas, o que pode proporcionar melhor desempenho tanto para a análise quanto para o dimensionamento de estruturas.

Além disso, o presente trabalho desenvolveu uma abordagem numérica pelo Métodos dos Elementos Finitos (MEF) espectral de baixa ordem para a teoria trigonométrica de Touratier. Conforme resultados, à medida que é aumentado o número de elementos, a teoria de Touratier obtém valores de deflexões e rotações que são cada vez mais concordantes com os valores de referência adotados, seja pela teoria da elasticidade, seja pela solução analítica construída a partir da correlação entre as teorias. Foi observado ainda a ausência do efeito de travamento por cisalhamento (*shear locking*) quando é modelada vigas delgadas a partir do modelo de Touratier, via a formulação do MEF desenvolvida nesse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal de Sergipe, por meio do programa institucional PIBIC-COPES, pelo apoio em infraestrutura e a bolsa concedida para realização do presente trabalho.

REFERÊNCIAS

- Reddy, J. N., 2006. *An Introduction to the Finite Element Method*.
- Timoshenko, S., Goodier, J. N., 1986. *Theory of Elasticity* *Journal of Elasticity*.
- Timoshenko, S. P., 1921. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical magazine*, 41(6), pp. 742-746.
- Touratier, M., 1991. An efficient standard plate theory, *International Journal of Engineering Science*, 29(8), PP. 901-916.
- Wang, C. M., REDDY, J. N., LEE, K. H., 2000. *Shear Deformable Beams and Plates*.
- W. E. Boyce, R. C. DiPrima, 2012. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 9ª Edição. Rio de Janeiro: LTC.