



AVALIAÇÃO DO DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO DO ERRO ELEMENTAR DO MEF h-ADAPTATIVO BASEADO NA RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICA

Evaluation of the element error domain integration for the h-fem isotropic error density recovery element size design methodology

Frederico Alves Jahnert (1)(P); Jucélio Tomás Pereira (2); Jéderson da Silva (3)

(1) Engenheiro Mecânico, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina - PR, Brasil

Email para Correspondência: fred_jahnert@hotmail.com; (P) Apresentador

Resumo: O Método de Elementos Finitos (MEF) é uma técnica para resolver numericamente problemas físicos comumente utilizada na engenharia. Um fator importante na obtenção de uma solução precisa e eficiente decorre da utilização adequada da malha de discretização. Tipicamente, técnicas h-adaptativas são empregadas para projeção de uma malha ótima, onde o erro estimado em cada elemento é distribuído e minimizado de acordo com um critério de malha ótima. Neste contexto, o presente trabalho avaliar o domínio de integração elementar do método de refino h-adaptativo denominado de Recuperação da Densidade do Erro Isotrópica (IEDR) para elementos triangulares lineares. Esta técnica baseia-se na recuperação de uma função densidade do erro em energia em conjunto com a solução de um problema de otimização que busca o tamanho do novo elemento. Originalmente, a técnica define o erro em uma região próxima ao elemento como a integral da função densidade do erro em energia sobre um domínio circular concêntrico com o elemento. Uma alternativa à esta metodologia foi proposta, na qual, utiliza-se um domínio triangular para definição do erro. Logo, uma comparação entre as metodologias é realizada, onde, a metodologia IEDR, que aborda os erros provenientes do MEF de maneira que contenha informações locais com maior abrangência, seja aprimorada. Os parâmetros de qualidade de malha, obtidos através de ambas metodologias, são comparados à tradicional técnica de projeto de malha denominada de Ch^p e a promissora técnica LB. A estimativa dos erros de discretização é realizada através do estimador de erro a posteriori baseado em recuperação, onde os gradientes recuperados são obtidos pelo método Superconvergente de Recuperação de Padrões (Superconvergent Patch Recovery - SPR). A implementação computacional é elaborada no software Matlab®, sendo a geração de malha realizada pelo gerador Bidimensional Anisotropic Mesh Generator (BAMG), parte do software FreeFem++. Resultados numéricos demonstram que o processo h-adaptativo baseado na técnica IEDR utilizando ambas metodologias de cálculo do erro elementar obtém malhas convergentes para problemas analisados, as quais apresentam, em geral, vantagens em relação ao número de graus de liberdade, à convergência e aos parâmetros de malha em comparação à tradicional técnica Ch^p e à técnica LB.

Palavras-chave: h-adaptividade, Refino de malha, Estimadores de erro a posteriori, Recuperação Superconvergente por Padrões, Recuperação da Densidade do Erro Isotrópica.



Abstract: The finite element method (FEM) is a technique used to numerically solve physics problems which is often used in engineering. One factor in obtaining a solution that has acceptable accuracy is using adequate mesh discretization. Typically, h-adaptive techniques are used to determine new element sizes based on errors distributed among each element following an optimum mesh criterion. In this context, the current work proposes to analyze the element domain of integration of the Isotropic Error Density Recovery h-refinement method for linear triangular finite elements. The technique is based on the recovery of an error density function, such that an optimization technique is used to search for the new element sizes. Originally, the technique defines the error by the integral of the energy error density function over a circular domain concentric with the element. An alternative methodology has been proposed, where a triangular concentric domain is used instead. Thus, a comparison between methodologies is presented aiming at improving the IEDR technique in view of its dependence on the element error definition. The h-adaptive finite element method processes based on both IEDR methodologies is compared to the traditionally used Ch^p mesh design technique and the promising LB technique found in the literature. The discretization error estimates are achieved via a recovery based *a posteriori* error estimator, whereas the recovered gradients are obtained using the Superconvergent Patch Recovery Method. The algorithm is implemented using Matlab®, while the mesh generation is done by the *Bidimensional Anisotropic Mesh Generator* (BAMG). Results show, overall, that the meshes designed through both IEDR methodologies analysed, based on the element error integration in a circular or triangular domain, obtain superior mesh quality parameters, less degrees of freedom and better convergence in comparison with the Ch^p and LB remeshing methodologies.

Keywords: h-adaptivity, Mesh refinement, *a posteriori* error estimator, Superconvergent Patch Recovery, Isotropic Error Density Recovery.



1 INTRODUÇÃO

Os desafios da engenharia atual vêm se tornando mais complexos e requerem o desenvolvimento de novas técnicas para alcançar soluções rápidas e precisas. Neste sentido, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se mostra como uma ferramenta importante para resolver um vasto número de problemas, em particular, aqueles que podem ter seus fenômenos físicos modelados por equações diferenciais parciais e condições de contorno.

O MEF é um método numérico onde, sobre cada subdomínio, as variáveis do problema são aproximadas utilizando um conjunto de baixa dimensão de parâmetros e funções (Reddy, 2006). Logo, a solução produzida desta maneira contém erros de aproximação. Um grande esforço vem sendo aplicado no desenvolvimento de estimadores de erro (Nadal et al., 2015). Estes, em geral, podem ser classificados em estimadores de erro *a priori* e *a posteriori*, os quais são aplicados, respectivamente, antes que a solução de elementos finitos seja conhecida, e depois da solução em elementos finitos. A utilização de estimadores de erros precisos possibilita a realização de mudanças na malha de elementos finitos através do emprego de algoritmos adaptativos, buscando uma solução que satisfaça um critério pré-determinado (Prudhomme et al., 2003). Segundo Cook et al. (2002), três formas básicas de refino adaptativo de malha são geralmente empregadas: a *h*-adaptividade, relacionada à alteração do tamanho *h* dos elementos, a *p*-adaptividade, que envolve a alteração da ordem *p* do polinômio de aproximação dos elementos, e a *r*-adaptividade, que é relacionada com a localização dos nós da malha e que, na essência, é uma variação do refino do tipo *h*. Neste trabalho será utilizada a técnica *h*-adaptativa de malha por sua ampla aplicação em conjunto com estimativas de erro *a posteriori*.

Recentemente, Pereira, Silva e Gonçalves (2016) propuseram um método *h*-adaptativo de determinação do tamanho elementar baseado no conceito de recuperação da densidade de erro em energia, denominado Recuperação Quadrática do Erro (RQE) para elementos lineares. Neste artigo, os resultados demonstraram superioridade na utilização desta técnica em comparação com a clássica técnica Ch^p , proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987), de projeção do tamanho do elemento. Nesta formulação a função densidade de erro recuperada para cada elemento é integrada em uma região circular concêntrica com o baricentro deste elemento.

Em Silva (2017) e Jahnert, Pereira e Silva (2017), a formulação foi modificada, chamada de Recuperação da Densidade do Erro Isotrópica (Isotropic Error Density Recovery – IEDR), onde um processo iterativo de busca do tamanho ótimo elementar foi implementada. Nestes estudos, a integral da função densidade do erro elementar é utilizada com base em uma região triangular, onde o tamanho ótimo do elemento é definido de forma direta. Baseado nestes artigos, em Jahnert (2018), a extensão da técnica para elementos quadráticos foi introduzida utilizando a integral definida por uma região triangular e uma modificação ao processo iterativo de busca de tamanho ótimo dos elementos foi proposta, obtendo resultados melhores do que a clássica técnica, Ch^p e vantajosos comparado à técnica proposta por Li e Bettess (1995), chamada de Li-Bettess (LB).

Neste contexto, este trabalho propõe avaliar os dois domínios de integração da função densidade de erro elementar na técnica de projeção IEDR para elementos triangulares lineares aplicados à problemas elípticos. Para isso, esta metodologia é comparada em relação à clássica projeção do tamanho elementar proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987), denominada



de projeção Ch^p , bem como com os resultados obtidos através da promissora técnica proposta por Li et al. (1995), denominada projeção Li-Bettess (LB).

2 ESTIMADORES DE ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

De acordo com Zienkiewicz e Zhu (1987), o erro elementar em um domínio Ω , pode estimado na norma de energia ($\|e\|$) como:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\nabla u - \nabla u^{FEM})^T \mathbf{k} (\nabla u - \nabla u^{FEM}) d\Omega \right]^{1/2}, \quad (1)$$

onde ∇u^{FEM} é o gradiente da solução obtida através do MEF. Em vista de que a solução analítica (u) é desconhecida, uma estimativa do erro em energia ($\|e^{REC}\|$) pode ser expressa por

$$\|e^{REC}\| = \left[\int_{\Omega} (\nabla u^{REC} - \nabla u^{FEM})^T \mathbf{k} (\nabla u^{REC} - \nabla u^{FEM}) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Neste caso, ∇u^{REC} é o vetor gradiente recuperado da solução de MEF, o qual é obtido através de métodos de recuperação do gradiente. Neste artigo, a técnica SPR é utilizada por conta da sua alta precisão e robustez na recuperação do gradiente da solução (Zienkiewicz and Zhu, 1992a, 1992b). A qualidade do estimador de erro pode ser medida através do índice de efetividade, θ . Este índice é definido como a razão entre o erro estimado e o erro real, dado por

$$\theta = \frac{\|e^{REC}\|}{\|e\|}. \quad (3)$$

Já que a solução recuperada tem uma maior taxa de convergência do que a solução de MEF, tem-se uma estimativa assintoticamente exata (Zienkiewicz and Zhu, 1992b).

3 ESTRATÉGIAS H-ADAPTATIVAS CLÁSSICAS DE REFINO DE MALHA

Proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987), a projeção Ch^p é baseada na equidistribuição do erro na norma de energia na malha, sendo utilizada amplamente em problemas de engenharia (Wiberg et al., 1997; Díez and Huerta, 1999; Castellazzi et al., 2010). Assim, é possível expressar o parâmetro de refino elementar, ζ_{ie} , em termos do erro elementar, $\|e\|_{ie}$, como

$$\zeta_{ie} = \frac{\|e\|_{ie}}{\|\mathcal{E}_{adm}\|} = \frac{\|e\|_{ie} \sqrt{NEI}}{\bar{\eta} \|\mathbf{u}_m\|}. \quad (4)$$



onde ε_{adm} é o erro limite por elemento como função do número de elementos na malha, NEI , a energia de deformação da solução por FEM, $\|\mathbf{u}_m\|$, e o erro admissível global, $\bar{\eta}$. Zienkiewicz e Zhu (1987) propõem que a obtenção do tamanho de um novo elemento baseia-se na taxa de convergência do erro, dada por

$$\|\mathbf{e}\| \leq Ch^{\min(p,\lambda)}, \quad (5)$$

sendo $\|\mathbf{e}\|$ o erro segundo a norma em energia da malha, C é uma constante que depende dos dados do problema, h representa o tamanho de um elemento finito, p é a ordem polinomial do elemento e λ é um parâmetro que define a regularidade da solução. Para um problema com regularidade suficiente ($\lambda > p$), o erro é proporcional a h^p . Com isso, obtêm-se uma estimativa para o tamanho do novo elemento, h_{new} , a partir da relação entre erro para um elemento na malha corrente e o erro limite elementar, onde o tamanho do elemento na malha atual é definido por h_{old} . Assim, para um elemento genérico ie , tem-se

$$h_{new} = \frac{h_{old}}{\zeta_{ie}^{1/p}}, \quad (6)$$

Uma alternativa foi introduzida por Li e Bettess (1995), chamada de projeção Li-Bettess (LB). Esta se baseia em utilizar a taxa de convergência local do erro no elemento, Eq. (7), e estimar o número de elementos necessários para a malha ótima, NEI_{new} dado pela Eq. (8). Logo, o tamanho ótimo do novo elemento é encontrado utilizando a Eq. (9).

$$\|\mathbf{e}\|_{ie} \leq Ch^{\min(\lambda,p)+1} \quad (7)$$

$$NEI_{new} = (\bar{\eta} \|\mathbf{u}_m\|)^{-2/p} \left\{ \sum_{ie=1}^{NEI} \|\mathbf{e}\|_{ie,old}^{2/(p+1)} \right\}^{(p+1)/p}. \quad (8)$$

$$h_{new} = h_{old} \left[\frac{\bar{\eta} \|\mathbf{u}_m\|}{\|\mathbf{e}\|_{ie,old} \sqrt{NEI_{new}}} \right]^{1/p+1}. \quad (9)$$

4 PROJEÇÃO IEDR BASEADA NO CRITÉRIO DE EQUIDISTRIBUIÇÃO ELEMENTAR

A técnica IEDR, também chamada de RQE, inicialmente proposta por Pereira et al. (2016), busca recuperar uma equação quadrática para a função densidade do erro na norma de energia para uma região em torno dos elementos que compõe a malha de elementos finitos. Logo, o erro total em uma região qualquer Ω_{ie} para o elemento i pode ser expressa como



$$\|e\|_{ie}^2 = \int_{\Omega_{ie}} U d\Omega = \int_{\Omega_{ie}} \Delta u^T \mathbf{k} \Delta u d\Omega, \text{ onde } \Delta u = \nabla u^{REC} - \nabla u^{FEM} \quad (10)$$

onde U é a função densidade do erro em energia, Δu o gradiente do erro, definido pela diferença entre o gradiente obtido por MEF e o gradiente recuperado. Assim, a função densidade do erro pode ser expressa por

$$U = U(x, y) = \Delta u^T \mathbf{k} \Delta u = \mathbf{P}^T \mathbf{B}_{\nabla u}^T \mathbf{k} \mathbf{B}_{\nabla u} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{Z} \mathbf{P}, \quad (11)$$

onde \mathbf{P} é um vetor que contém as coordenadas relativas de um ponto genérico, $\mathbf{B}_{\nabla u}$ é a matriz de coeficientes do polinômio que descreve o gradiente recuperado e \mathbf{Z} uma matriz simétrica característica. A expansão da função densidade do erro $U(x, y)$ pode ser expressa por

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \mathbf{P}^T \mathbf{Z} \mathbf{P} = U_0 + (G_1 x + G_2 y) + (H_{11} x^2 + 2H_{12} xy + H_{22} y^2) \\ &= U_0 + \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (12)$$

sendo U_0 , \mathbf{G} , \mathbf{H} e \mathbf{x} dados por

$$U_0 = Z_{11}, \mathbf{G} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_{12} + Z_{21} \\ Z_{13} + Z_{31} \end{Bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

No caso de um elemento linear, a função densidade do erro é descrita por um polinômio quadrático onde U_0 é o termo constante, \mathbf{G} é o vetor que contém os termos lineares, \mathbf{H} é a matriz hessiana relacionada aos termos quadráticos do polinômio e \mathbf{x} é um vetor de coordenadas relativas associadas a um ponto qualquer no domínio. Assim, a norma do erro em energia ao quadrado, E_{ie}^2 , expressa para um domínio genérico em torno do elemento, Ω_{ie} , pode ser expressa por

$$E_{ie}^2 = \int_{\Omega_{ie}} U d\Omega = \int_{\Omega_{ie}} [U_0 + (G_1 x + G_2 y) + (H_{11} x^2 + 2H_{12} xy + H_{22} y^2)] d\Omega \quad (14)$$

4.1 Domínio de integração da função densidade do erro elementar triangular

Ao definir a função densidade do erro em energia para um dado elemento da malha, o tamanho ótimo do elemento pode ser encontrado ao definir um domínio de integração desta função no qual contenha o erro admissível elementar. Na formulação desenvolvida por Silva (2017) e Jahnert (2018), o domínio de integração foi definida como um triângulo, onde buscase encontrar o tamanho máximo desta geometria que contenha o erro admissível elementar. A

Figura 1 ilustra este processo, onde as isolinhas da função densidade de erro são representadas em verde e busca-se um tamanho ótimo do elemento, h_{new} .

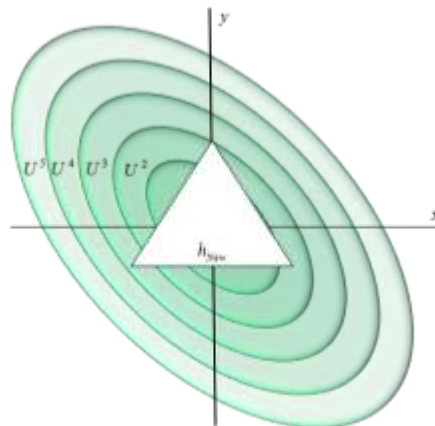


Figura 1: Processo de busca do tamanho ótimo do elemento baseado em uma região triangular.

Fonte: (Autor, 2018)

Ao utilizar um domínio triangular, os termos lineares, assim como o termo misto da hessiana, são nulos devido à simetria da área do triângulo. Logo, a Eq. (14) pode ser expressa por

$$E_{ie}^2 = U_0 A_{ie} + H_{11} I_y + H_{22} I_x, \quad (15)$$

onde A_{ie} é a área do triângulo e I_x e I_y são os momentos de área da geometria, descrito por

$$A_{ie} = \alpha h^2, \alpha = \sqrt{3}/4 \text{ e } I_x = I_y = \beta h^4, \beta = \sqrt{3}/96. \quad (16)$$

A equação definindo o erro nesta região pode ser simplificada em função de um tamanho de aresta do triângulo equilátero e os termos constantes e de segunda ordem. Assim, o erro contido em uma região triangular com aresta, h , pode ser definido como

$$E_{ie}^2 = h^2 \left[\alpha U_0 + \beta \text{tr}(\mathbf{H}) h^2 \right], \text{ e } \text{tr}(\mathbf{H}) = H_{11} + H_{22}. \quad (17)$$

A projeção do tamanho isotrópico elementar ocorre através de um problema de otimização, onde busca-se o tamanho máximo de aresta do elemento, h_{new} , concêntrico com o elemento original de tamanho h_{old} , restringido pelo erro admissível elementar, $E_o^2 \leq \varepsilon_{adm}^2$. Esse problema de otimização pode ser posto na sua forma padrão como

$$P: \begin{cases} \text{Minimizar} & -h \\ \text{Restrição:} & g(h) \leq 0, \end{cases} \text{ onde } g(h) = E_{ie}^2 - \varepsilon_{adm}^2 = h^2 \left[\alpha U_0 + \beta \text{tr}(\mathbf{H}) h^2 \right] - \varepsilon_{adm}^2 \quad (18)$$



Com o objetivo de definir o tamanho ótimo do elemento, h_{new} , um problema de otimização é proposto que maximize a área da circunferência tal que esse domínio de integração da função densidade do erro em energia, E_o , atinja o erro limite, ε_{adm} . Matematicamente, este problema posto na forma padrão é definido como

$$P : \begin{cases} \text{minimizar} & -A_o = -\pi r^2 \\ \text{Restrição:} & g(r) \leq 0 \end{cases}, \text{ onde } g(r) = E_o^2 - \varepsilon_{adm}^2 = \pi r^2 \left[U_o + \text{tr}(\mathbf{H}) \frac{r^2}{4} \right] - \varepsilon_{adm}^2. \quad (22)$$

A solução deste problema pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, define o raio ótimo como

$$r = \left(2 \frac{\sqrt{(U_o)^2 + \frac{\text{tr}(\mathbf{H})}{\pi} \varepsilon_{adm}^2} - U_o}{\text{tr}(\mathbf{H})} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Pereira et. al. (2016) considerou que o tamanho da aresta do novo elemento é dada pela média simples entre o valor da aresta de um triângulo equilátero inscrito sobre a circunferência de raio ótimo e outro circunscrito. Logo o tamanho do novo elemento pode ser descrito por:

$$h_{new} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{3}} \right) r \cong 2.5981r. \quad (24)$$

4.3 Processo iterativo de ajuste da função densidade de erro em energia elementar

Em Jahnert (2018), um processo iterativo de ajuste das funções densidade do erro foi introduzida visando um aumento na taxa de convergência da técnica ao utilizar uma estimativa do número de elementos ótimo para a próxima malha. Considerando um elemento qualquer, a integral da função densidade do erro na norma de energia para um elemento da malha corrente, $\|e_{old}\|$, e nova malha, $\|e_{new}\|$, podem ser definidas em vista da taxa de convergência do erro elementar respectivamente, como

$$\|e_{old}\|^2 = \int_{\Omega_e} U_{old} d\Omega \leq C^2 h_{old}^{2\alpha} \text{ e } \|e_{new}\|^2 = \int_{\Omega_e} U_{new} d\Omega \leq C^2 h_{new}^{2\alpha}, \quad (25)$$

onde $\alpha = \min(\lambda, p) + 1$, considerando o critério de convergência elementar (Li et. al., 1995). Ao comparar os termos da funções densidade erro após integração, para um elemento na malha atual e um elemento projetado para a próxima malha, pode-se ajustar os termos da função:

$$U_{0_{new}} = \left(\frac{h_{new}}{h_{old}} \right)^{2\alpha-2} U_{0_{old}}, \quad (26)$$



$$tr(\mathbf{H})_{new} = \left(\frac{h_{new}}{h_{old}} \right)^{2\alpha-4} tr(\mathbf{H})_{old}, \quad (27)$$

Desta maneira, um processo iterativo de redefinição da função densidade de erro em energia pode ser caracterizado nos seguintes passos: **Passo 1**: Estimar os parâmetros do elemento, i.e., U_0 , $tr(\mathbf{H})$, ε_{adm}^2 ; **Passo 2**: Para cada elemento, os parâmetros do primeiro passo são reavaliados, de acordo com o tamanho do elemento na próxima malha e o da malha corrente, h_{new} e h_{old} ; **Passo 3**: Estima-se o número de elementos na nova malha (NEl) e o erro admissível, ε_{adm}^2 , é atualizado utilizando a Eq. (28); **Passo 4**: Observar convergência.

$$NEl_{new} = \sum_{ie=1}^{NEl} (h_{new} / h_{old})^2 \text{ e } \varepsilon_{adm} = \bar{\eta} \| \mathbf{u} \| / \sqrt{NEl}. \quad (28)$$

5 RESULTADOS

5.1 Problema 1

Considerando um problema escalar bidimensional do tipo Poisson, uma excitação de domínio é aplicada onde suas condições de contorno são do tipo Dirichlet homogêneas, tal que a solução analítica é dada por (Zienkiewicz e Taylor, 2000),

$$T(x, y) = 2^{2(a+b)} x^a (1-x)^a y^b (1-y)^b, \quad (54)$$

onde $a = 20$ e $b = 1$. O domínio é descrito por $\Omega = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Os processos h-adaptativos são comparados utilizando a estratégia Ch^p, LB, IEDR com integral triangular (IEDR) e IEDR com integral circular (IEDR Raio). Figura 3 demonstra a malha inicial com 112 elementos e a solução analítica do problema. Um erro admissível é estipulado de 5% ($\bar{\eta} = 5\%$).

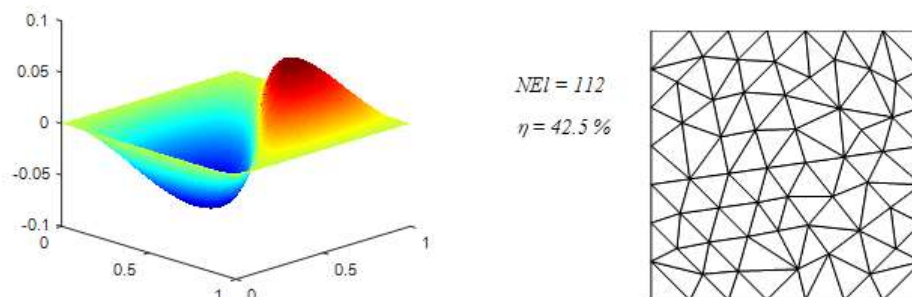


Figura 3: Solução analítica do problema e malha inicial utilizada.

Fonte: (Autor, 2018)



Para 4 iterações adaptativas, a Figura 4 demonstra a convergência de cada processo h-adaptativo e o desvio do parâmetro de erro local elementar ($D_{\bar{\zeta}}$), parâmetro que representa uma medida da distribuição do erro na malha, dado por

$$D_{\bar{\zeta}} = \sqrt{\frac{\sum_{ie=1}^{Nel} (\bar{\zeta}_{ie} - 1)^2}{Nel}}, \quad (29)$$

Nesta figura, nota-se que as curvas de convergência entre as técnicas IEDR, IEDR Raio e LB obtiveram resultados similares. No entanto, a técnica Ch^P obteve uma curva de convergência onde o número de elementos necessários para atingir convergência é consideravelmente maior. Além disso, ao utilizar esta técnica, o parâmetro de desvio de erro local elementar é visivelmente maior, indicando que a distribuição de erros na malha é desigual ao comparar com a técnicas IEDR, IEDR Raio e LB.

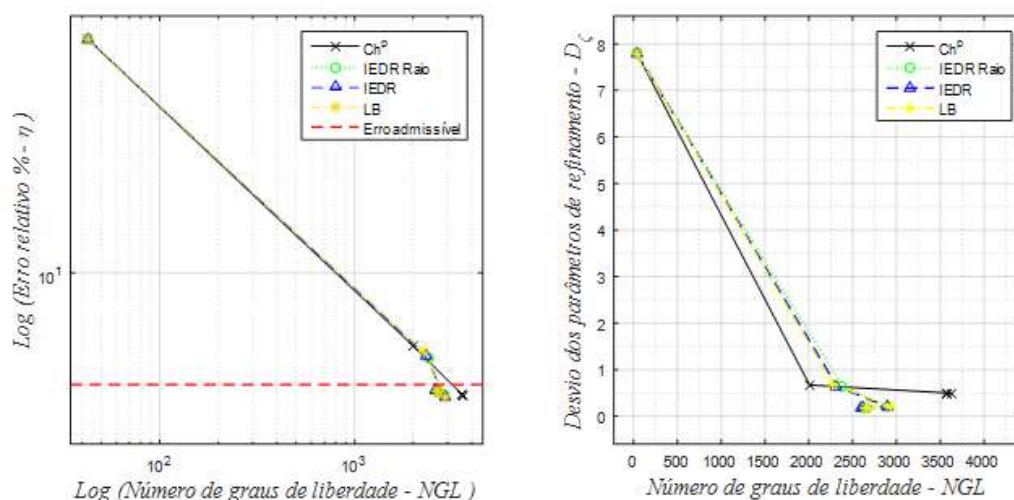


Figura 4: Curva de convergência de cada processo h-adaptativo e desvio do parâmetro de refinamento elementar.

Fonte: (Autor, 2018)

Através das malhas convergentes, aquelas que atingem o erro admissível estipulado, apresentadas na Figura 5, pode-se notar que ambas as técnicas IEDR e IEDR Raio obtiveram malhas convergentes similares, com uma equidistribuição do erro, onde o número de graus de liberdade na malha convergente da técnica IEDR é de 2.9% menor do que na técnica IEDR Raio que utiliza a integral circular. Além disso, os resultados de ambas as metodologias IEDR apresentam melhorias significantes em comparação à classica tecnica Ch^P , com um número de elementos para a malha convergente aproximadamente 20% menor. Em comparação com a técnica LB, as técnicas IEDR produzem malhas onde o um número de graus de liberdade é ligeiramente menor, no entanto, em vista das malhas produzidas, o desempenho é similar entre as técnicas.

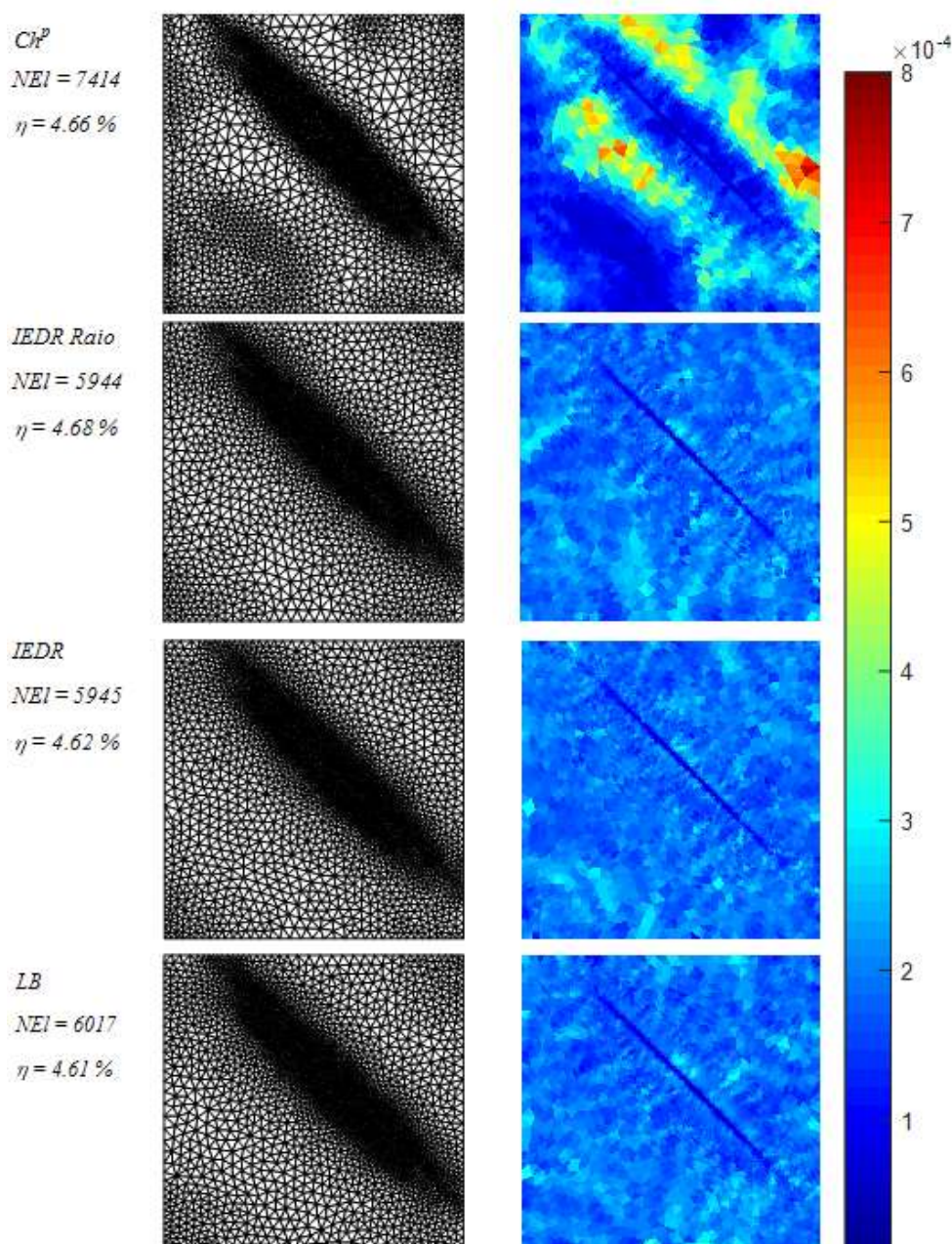


Figura 5: Malhas convergentes para os processos h-adaptativos analisados, e sua distribuição de erros.

Fonte: (Autor, 2018)

5.2 Problema 2

Considerando um outro problema elíptico do tipo Poisson, tem-se forças de corpo de domínio, tal que o campo de deslocamento analítico, definido em um domínio unitário, é dado por (Mitchel, 2013)



$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = x(1-x)y(1-y) \arctan[\alpha(\rho - \rho_0)] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

onde $\rho = (x+y)/\sqrt{2}$, $\rho_0 = 0.8$ e $\alpha = 20$. Figura 6 ilustra a solução deste problema e a malha inicial utilizada.

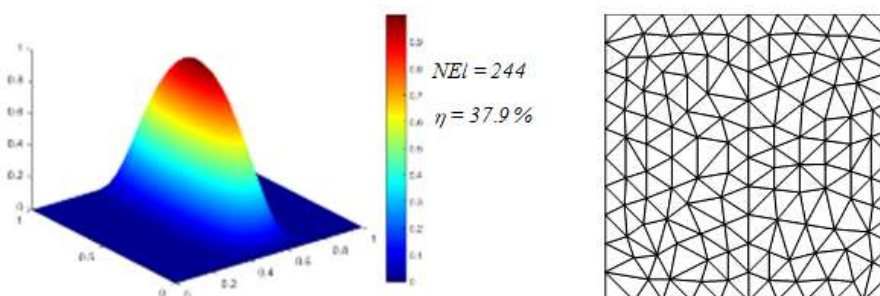


Figura 6: Solução analítica do problema e malha inicial utilizada.

Fonte: (Autor, 2018)

Neste problema, conforme demonstrado pela Figura 7, os quatro processos h-adaptativos analisados atingem convergência em sua segunda iteração. Os processos adaptativos baseados na técnica IEDR demonstram uma convergência novamente similar, onde as malhas produzida na primeira iteração contêm um erro global mais próximo ao erro admissível em comparação as técnicas Ch^p e LB. Além disso, na segunda iteração, as técnicas IEDR, IEDR Raio e LB produzem uma malha convergente com erro relativo e número de elementos similares, enquanto a técnica Ch^p atinge convergência com um número excessivo de elementos para o mesmo erro relativo. Isto indica que as técnicas IEDR, IEDR Raio e LB apresentam maior equidistribuição do erro ao longo da malha. Os resultados do Problema 1 e Problema 2 demonstram que as técnicas IEDR e IEDR Raio são efetivas e robustas.

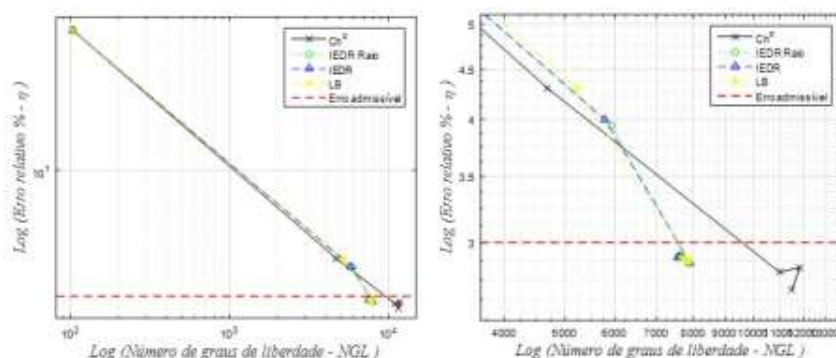


Figura 7: Curva de convergência de cada processo h-adaptativo, visão completa e ampliada.

Fonte: (Autor, 2018)



AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná pelo apoio no desenvolvimento deste estudo.

REFERÊNCIAS

- Castellazzi, G., Miranda, S., & Ubertini, F., 2010. Adaptivity based on the recovery by compatibility in patches. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 46, pp. 379–390.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J., 2002. *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley and Sons.
- Díez, P., & Huerta, A., 1999. A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 176, pp.215-229
- Jahnert, F., 2018. h-adaptive Finite Element Method: Extension of the Isotropic Error Density Recovery Remeshing Strategy for Quadratic Order Elements. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil
- Jahnert, F., Pereira, J., Silva, J., 2017. An alternative approach to the isotropic error density recovery method based on local patches. *XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Florianópolis, Brasil.
- Li, L. *et al.* Theoretical formulations for adaptive finite element computations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 11, p. 857–868, 1995.
- Li, L., & Bettess, P., 1995. Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp.911-915
- Mitchell, W., 2013. A collection of 2D elliptic problems for testing adaptive grid refinement algorithms. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 220, pp. 350-364
- Nadal E., Díez P., Ródenas J., Tur M. & Fuenmayor F., 2015. A recovery-explicit error estimator in energy norm for linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 287, pp. 172-190.
- Pereira, J. T., Silva, J., & Gonçalves, J. C. L., 2016. Método dos elementos finitos h-adaptativo: uma nova técnica para projeção isotrópica do tamanho elementar. *Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*.
- Prudhomme, S., Oden, J., Westermann, T., Bass, J., Botkin, M., 2003. Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, pp. 1193–1224.
- Reddy, J. N., 2006. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3. ed., Mc Graw Hill
- Silva, J. Otimização Estrutural Topológica Utilizando o Método dos Elementos Finitos h-adaptativo Fundamentado na Recuperação da Densidade do Erro Isotrópica e Anisotrópica. Tese – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil. 2017



Wiberg, N. E., Abdulwahab, F., & Li, X. D., 1997. Error estimation and adaptive procedures based on Superconvergent Patch Recovery (SPR) techniques. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 4, pp. 203–242.

Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z., 1987. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 337–357.

Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z., 1992a. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1331–1364.

Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z., 1992b. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp.1365–1382.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 2000. *The Finite Element Method. Volume 1: The Basis*. Butterworth Heinemann.