



ANÁLISE ESTÁTICA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

Static analysis of Euler-Bernoulli beams

Julia Nordio Appi (1); José Antônio Marques Carrer (2); Luiz Alkimin de Lacerda (3)

(1) Mestranda, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil. (P) Apresentadora

(2) Dr. Prof., Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil.

Email para Correspondência: juliappi23@hotmail.com;

Resumo: Este trabalho tem por objetivo principal o desenvolvimento de formulações que auxiliem o monitoramento estrutural. Tal monitoramento refere-se ao estudo de vigas contínuas de Euler-Bernoulli com rigidez constante e sobre base elástica, sujeitas a cargas dinâmicas, utilizando o Método dos Elementos de Contorno. Especificamente, este artigo trata da primeira etapa de um futuro trabalho principal e corresponde ao desenvolvimento de uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para uma viga estática de Euler-Bernoulli. Diferentes condições de contorno estão relacionadas com os quatro tipos mais familiares de vigas, isto é: viga engastada com extremidade livre, viga engastada-engastada, viga engastada-apoiada e viga apoiada-apoiada. Será considerado um carregamento constante uniformemente distribuído. Serão apresentados, em forma de gráficos, os resultados para: deslocamento, rotação, momento fletor e esforço cortante. Naturalmente, no trabalho principal serão combinados carregamentos diversos, tais como: cargas concentradas, carregamentos distribuídos em trechos específicos da viga e carregamentos não uniformemente distribuídos. Ainda serão consideradas cargas dinâmicas aplicadas à estrutura estudada e também será considerado o problema da viga apoiada em base elástica. No que tange aos aspectos materiais da viga, futuramente será considerado o caso de vigas com seção variada. Posteriormente, será implementado um sistema de n vigas à estrutura, sendo consideradas as condições de equilíbrio e a compatibilidade entre os nós estruturais para o acoplamento. Planeja-se que o algoritmo completo trará como resultados diagramas de deslocamentos, rotações, momentos fletores e esforços cortantes de vigas com carregamentos estático e dinâmico diversos. Com a obtenção destes diagramas, as informações dinâmicas do modelo serão correlacionadas com os dados de um diagnóstico não destrutivo de saúde estrutural. De uma maneira mais ampla, espera-se que o código programado seja capaz de analisar estruturas com rigidez variável, bem como sobre diversas condições de carregamento, e as respostas obtidas neste desenvolvimento numérico possam ser empregadas numa correlação com dados de análise de integridade estrutural por meio de monitoramentos estruturais dinâmicos.

Palavras chaves: Método dos Elementos de Contorno; vigas de Euler-Bernoulli; estática.



Abstract: The main objective of this paper is the development of formulations that support structural health monitoring. Such monitoring refers to the study of continuous Euler-Bernoulli beams with constant stiffness and on elastic base, subject to dynamic loads, using the Boundary Element Method. Specifically, this paper focus on the first stage of a future dissertation and corresponds to the development of a formulation of the Boundary Element Method for a static Euler-Bernoulli beam. Different boundary conditions are associated to the four most familiar beams types, i.e.: fixed beam with free end, pinned-pinned beam, fixed-pinned beam and fixed-fixed beam. A uniformly distributed constant load will be considered. The results will be presented, in graph form, for displacement, rotation, bending moment and shear force. In the dissertation diverse loads will be combined, such as concentrated loads, loads distributed in specific parts of the beam and loads not evenly distributed. Dynamic loads will be applied to the studied structure and to the problem of the supported beam in elastic base will be considered. Regarding the material aspects of the beam, the case of varying cross section beams will be considered in future papers. Subsequently, a beams system will be implemented to the structure, considering the conditions of equilibrium and the compatibility between the structural coupling nodes. The complete algorithm must provide the diagrams of displacements, rotations, bending moments and shear stresses of beams subjected with various static and dynamic loads. By obtaining these diagrams, the dynamic information of the model will be correlated with the data of a non-destructive structural health monitoring. More broadly, it is expected that the computer code will be able to analyze structures with variable stiffness as well as various loading conditions, and the responses obtained in this numerical development will be employed in a correlation with structural integrity analysis data by means of dynamic structural monitoring.

Keywords: Boundary Element Method; Euler-Bernoulli beam; static.

1 INTRODUÇÃO

A inspeção visual é o principal ‘monitoramento’ estrutural feito nas obras existentes, atualmente. Porém este tipo de inspeção tem caráter subjetivo, visto que depende da avaliação humana no processo de inspeção. Desde o início dos anos 90, desenvolvem-se métodos para um monitoramento contínuo das estruturas, como extensômetros; raio X; emissão acústica; ultrassom; fibra óptica; termografia; análise dinâmica de estruturas, entre outras. Estes métodos têm a capacidade de detectar falhas estruturais com antecedência ao colapso, possibilitando uma prevenção mais eficiente às obras, o que resulta em uma maior vida útil dos sistemas estruturais (NERY, 2013).

Com o auxílio da modelagem computacional, é possível compreender o comportamento da estrutura como um todo. Com a utilização de ensaios experimentais, e com os dados obtidos através destes, a modelagem computacional pode ser utilizada para simular casos de monitoramento e compreender a estrutura como um todo. Em específico, a Modelagem Dinâmica procura aperfeiçoar os métodos atuais da tecnologia de monitoramento estrutural, através da simulação numérica de processos dependentes do tempo, representando matematicamente um processo do mundo real.

Neste contexto, o presente artigo discorre sobre a primeira etapa de um projeto e apresenta o desenvolvimento de uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para uma viga estática de Euler-Bernoulli. À mesma foram aplicadas diferentes condições de contorno, relacionadas com os quatro tipos mais familiares de vigas: viga engastada com extremidade livre, viga engastada-engastada, viga engastada-apoiada e viga apoiada-apoiada, e foi considerado um carregamento constante e uniformemente distribuído. Ao final, são apresentados, em forma de gráficos, os resultados para: deslocamento, rotação, momento fletor e esforço cortante gerados pelo método, e comparados com as respostas esperadas por equações analíticas.

2 VIGA DE EULER-BERNOULLI

2.1 Solução analítica

Segundo Beer et al. (2003), a equação da linha elástica da viga de Euler-Bernoulli é obtida por:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = q(x) \quad (1)$$

onde x representa a coordenada espacial, em metro (m); $u = u(x)$ representa o deslocamento transversal (m); $q = q(x)$ representa a força distribuída constante e uniforme, em Newton por metro (N/m); E simboliza o módulo de elasticidade longitudinal (N/m²); e I simboliza o momento de inércia da seção transversal da viga (m⁴).

Neste artigo, a viga estudada tem comprimento L , sendo $x = 0$, o ponto inicial e $x = L$ o ponto final da mesma. As condições de contorno, determinantes para o cálculo da linha elástica, variam conforme o apoio apresentado nas extremidades da viga. Para o engaste, o deslocamento ($u = u(x)$) e a rotação ($\theta = \theta(x)$) são nulos. Para apoio simples, o deslocamento ($u = u(x)$) e o momento fletor ($M = M(x)$) são nulos. E para a extremidade livre, o momento fletor ($M = M(x)$) e o esforço cortante ($Q = Q(x)$) são nulos (BEER et al., 2003).

Partindo da Eq. (1), as equações para um carregamento genérico que regem a rotação, o momento fletor e o esforço cortante, respectivamente, são:

$$\theta = \frac{du}{dx}; M = -EI \frac{d^2u}{dx^2}; Q = -EI \frac{d^3u}{dx^3} \quad (2)$$

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno, empregado, essencialmente, pela clareza na discretização da superfície estudada, diminuindo o número de incógnitas, é um método empregado para o estudo do comportamento de sistemas mecânicos e obras estruturais com carregamentos aplicados (KATSIKADELIS, 2002).

3.1 Solução fundamental

A viga de Euler-Bernoulli será resolvida por meio da formulação da integral de contorno e para tanto é necessário empregar a solução fundamental do problema apresentado em (1), uma vez que a formulação da integral de contorno recai em uma solução no contorno do problema por meio da eliminação das integrais de domínio ao se empregar a solução fundamental. No trabalho proposto, a solução fundamental é a solução para a equação:

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \delta(\xi, x) \quad (3)$$

A solução fundamental de (3) é:

$$u = u^* = u^*(\xi, x) = \frac{|x - \xi|^3}{12} \quad (4)$$

O asterisco, *, apresentado em (4) é a notação utilizada para solução fundamental. Assim como há equações para um carregamento genérico que regem a rotação, o momento fletor e o esforço cortante, respectivamente, são apresentadas em (5) as equações que regem a rotação, o momento fletor e o esforço cortante para a solução fundamental.

$$\theta^* = \frac{du^*}{dx}; M^* = -EI \frac{d^2u^*}{dx^2}; Q^* = -EI \frac{d^3u^*}{dx^3} \quad (5)$$

3.2 Resíduos Ponderados

Segundo Brebbia, Telles e Wrobel (1984), a sentença de resíduos ponderados pode ser apresentada como:

$$\int_0^L R_D w_D dx + R_1 w_1|_{x=0} + R_2 w_2|_{x=0} + R_3 w_3|_{x=L} + R_4 w_4|_{x=L} \quad (6)$$

no qual w_D é a função de ponderação para o resíduo no domínio, R_D . O resíduo no domínio gerado pela Eq. (1) é

$$R_D = \frac{d^4 \tilde{u}}{dx^4} - \frac{q(x)}{EI} \quad (7)$$

no qual \tilde{u} é relacionado aos valores aproximados.

Os os resíduos nas condições de contorno são representados pelos termos R_1 , R_2 , R_3 e R_4 são. Onde R_1 e R_2 são os resíduos gerados para a posição $x = 0$, e R_3 e R_4 , para a posição $x = L$. Estes resíduos dependem das condições de contorno de cada viga. Para a viga apoiada-apoiada, estes valores são exibidos abaixo.

$$R_1|_{x=0} = \hat{u}(0) - \tilde{u}(0) \quad (8)$$

$$R_2|_{x=0} = \hat{M}(0) - \tilde{M}(0) \quad (9)$$

$$R_3|_{x=L} = \hat{u}(L) - \tilde{u}(L) \quad (10)$$

$$R_4|_{x=L} = \hat{M}(L) - \tilde{M}(L) \quad (11)$$

onde, \hat{u} e \hat{M} são os valores prescritos e \tilde{u} e \tilde{M} são os valores aproximados.

Substituindo a equação (7) na integral de (6), aplicando integração por partes quatro vezes na primeira integral e substituindo o resultado da integração por partes, a integral da Eq. (6) é reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_0^L R_D w_D dx &= \int_0^L \left(\frac{d^4 \tilde{u}}{dx^4} \right) w_D dx - \int_0^L \left(\frac{q(x)}{EI} \right) w_D dx = \\ &= \left(\frac{d^3 \tilde{u}}{dx^3} w_D - \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} \frac{dw_D}{dx} + \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{d^2 w_D}{dx^2} - \tilde{u} \frac{d^3 w_D}{dx^3} \right) \Big|_{x=L} \\ &\quad - \left(\frac{d^3 \tilde{u}}{dx^3} w_D - \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} \frac{dw_D}{dx} + \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{d^2 w_D}{dx^2} - \tilde{u} \frac{d^3 w_D}{dx^3} \right) \Big|_{x=0} \\ &\quad + \int_0^L \tilde{u} \frac{d^4 w_D}{dx^4} dx - \int_0^L \frac{q(x)}{EI} w_D dx \end{aligned} \quad (12)$$

As equações associadas aos valores aproximados, \tilde{u} , são relacionadas às equações para um carregamento genérico que regem a rotação, o momento fletor e o esforço cortante apresentadas em (2). E as equações associadas às funções de ponderação de domínio, são relacionadas às equações que regem a rotação, o momento fletor e o esforço cortante para a solução fundamental, apresentadas em (5).

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = \tilde{\theta}; \quad \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} = -\frac{\tilde{M}}{EI}; \quad \frac{d^3\tilde{u}}{dx^3} = -\frac{\tilde{Q}}{EI} \quad (13)$$

$$\frac{du^*}{dx} = \theta^*; \quad \frac{d^2u^*}{dx^2} = -\frac{M^*}{EI}; \quad \frac{d^3u^*}{dx^3} = -\frac{Q^*}{EI} \quad (14)$$

Considerando a função de ponderação de domínio, w_D , igual a solução fundamental, u^* , e substituindo as equações (3), (13) e (14) em (12), a integral do resíduo ponderado para o domínio é

$$\begin{aligned} \int_0^L R_D w_D dx = & \left(-\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* + \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* - \frac{\tilde{\theta}}{EI} M^* + \frac{\tilde{u}}{EI} Q^* \right) \Big|_{x=L} \\ & - \left(-\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* + \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* - \frac{\tilde{\theta}}{EI} M^* + \frac{\tilde{u}}{EI} Q^* \right) \Big|_{x=0} + \int_0^L \tilde{u} \delta(\xi, x) dx - \int_0^L \frac{q(x)}{EI} u^* dx \end{aligned} \quad (15)$$

onde $\tilde{Q}, \tilde{M}, \tilde{\theta}, \tilde{u}$ são variáveis da condições de contorno e w_1, w_2, w_3, w_4 são funções de ponderação dos resíduos de contorno. Substituindo os termos R_1, R_2, R_3 e R_4 pelos seus valores apresentados em (8) a (11), e aplicando a propriedade da função de Delta de Dirac na primeira integral, a Eq. (15) passa a ser:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & \frac{1}{EI} (\tilde{Q}u^* - \tilde{M}\theta^* + \tilde{\theta}M^* - \tilde{u}Q^*) \Big|_{x=L} - (\hat{u} - \tilde{u})w_3 \Big|_{x=L} - (\hat{M} - \tilde{M})w_4 \Big|_{x=L} \\ & - \frac{1}{EI} (\tilde{Q}u^* - \tilde{M}\theta^* + \tilde{\theta}M^* - \tilde{u}Q^*) \Big|_{x=0} - (\hat{u} - \tilde{u})w_1 \Big|_{x=0} - (\hat{M} - \tilde{M})w_2 \Big|_{x=0} \\ & + \int_0^L \frac{q(x)}{EI} u^* dx \end{aligned} \quad (16)$$

A escolha apropriada da função de ponderação, w , pode simplificar as equações, favorecendo no cálculo. Assim, são apresentadas a seguir as funções de ponderação adequadas, para o problema proposto, para a substituição em (16).

$$w_1 = -\frac{Q^*}{EI}; \quad w_2 = -\frac{\theta^*}{EI}; \quad w_3 = \frac{Q^*}{EI}; \quad w_4 = \frac{\theta^*}{EI} \quad (17)$$

Posteriormente a substituição dos valores dos resíduos e da eliminação dos termos necessários, a equação da deflexão para a viga apoiada-apoiada em um ponto ξ é:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* + \frac{\tilde{\theta}}{EI} M^* - \frac{\hat{u}}{EI} Q^* - \frac{\hat{M}}{EI} \theta^* \right) \Big|_{x=L} \\ & - \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* + \frac{\tilde{\theta}}{EI} M^* - \frac{\hat{u}}{EI} Q^* - \frac{\hat{M}}{EI} \theta^* \right) \Big|_{x=0} + \int_0^L \frac{q(x)}{EI} u^* dx \end{aligned} \quad (18)$$

Os cálculos apresentados para obter a Eq. (18), foram feitos utilizando as condições de contorno para uma viga apoiada-apoiada. Para a viga engastada-engastada, viga em balanço, e viga engastada-apoiada, uma equação semelhante pode ser obtida, onde apenas os valores prescritos e aproximados diferem, conforme são aplicadas diferentes condições de contorno. Desconsiderando as notações que diferem os valores prescritos dos aproximados, encontra-se a equação geral:

$$\begin{aligned} u(\xi) = & \left(\frac{Q}{EI} u^* + \frac{\theta}{EI} M^* - \frac{u}{EI} Q^* - \frac{M}{EI} \theta^* \right) \Big|_{x=L} \\ & - \left(\frac{Q}{EI} u^* + \frac{\theta}{EI} M^* - \frac{u}{EI} Q^* - \frac{M}{EI} \theta^* \right) \Big|_{x=0} + \int_0^L \frac{q(x)}{EI} u^* dx \end{aligned} \quad (19)$$

3.3 Formulação integral estática

A integral que aparece no lado direito da igualdade na eq. (19) possui a solução fundamental, u^* , que depende do módulo $|x - \xi|$. Portanto, para facilitar o cálculo, a integral, que possuía intervalo de integração da integral de 0 a L , agora é dividida em duas integrais, com intervalos de integração de 0 a ξ e de ξ a L . Portanto, a eq. (19) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} u(\xi) = & \left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \frac{\theta}{EI} M^* - \frac{u}{EI} Q^* \right) \Big|_{x=L} \\ & - \left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \frac{\theta}{EI} M^* - \frac{u}{EI} Q^* \right) \Big|_{x=0} + \int_0^\xi \frac{q(x)}{EI} u^* dx + \int_\xi^L \frac{q(x)}{EI} u^* dx \end{aligned} \quad (20)$$

que é a equação para calcular a deflexão da viga em um ponto ξ .

Para o cálculo da rotação, θ , do momento fletor, M , e do esforço cortante, Q , é necessário derivar a expressão do deslocamento, $u(\xi)$, como apresentado em (2). Assim

$$\begin{aligned} \theta(\xi) = & \int_0^\xi \frac{q(x)}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx + \int_\xi^L \frac{q(x)}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \frac{\theta}{EI} M^* - \frac{u}{EI} Q^* \right) \Big|_{x=L} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \frac{\theta}{EI} M^* - \frac{u}{EI} Q^* \right) \Big|_{x=0} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 M(\xi) = & - \int_0^\xi q(x) \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} dx - \int_\xi^L q(x) \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} dx \\
 & - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [(Qu^* - M\theta^* + \theta M^* - uQ^*)|_{x=L}] \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [(Qu^* - M\theta^* + \theta M^* - uQ^*)|_{x=0}]
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 Q(\xi) = & - \int_0^\xi q(x) \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} dx - \int_\xi^L q(x) \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} dx \\
 & - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} [(Qu^* - M\theta^* + \theta M^* - uQ^*)|_{x=L}] \\
 & + \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} [(Qu^* - M\theta^* + \theta M^* - uQ^*)|_{x=0}]
 \end{aligned} \tag{23}$$

Nas Equações (20), (21), (22) e (23), observam-se as variáveis u, θ, M e Q no contorno ($x = 0$ e $x = L$), totalizando oito incógnitas. Devido as condições de contorno (naturais e essenciais), quatro destes valores são conhecidos. Os outros quatro valores são calculados através de um sistema do tipo:

$$\bar{H}\bar{u} = \bar{G}\bar{q} + \bar{B} \tag{24}$$

onde \bar{H} e \bar{G} são matrizes quadradas de ordem 4, e os termos \bar{u} , \bar{q} e \bar{B} são vetores de quatro elementos.

Para montar esse sistema, deve-se escolher duas dentre as quatro equações, (20), (21), (22) e (23) e aplicar o ponto de colocação, ξ , no contorno $x = 0$ e $x = L$ para cada equação escolhida. Para o desenvolvimento deste trabalho, foram escolhidas as equações (20) e (30).

Inicialmente, foi aplicado o ponto de colocação ξ no contorno $x = 0$ em (20), como pode ser observado em (25), para então os termos dependentes do deslocamento e da rotação passarem para a esquerda da igualdade, enquanto os termos dependentes do momento fletor e do esforço cortante, bem como as integrais, ficarem do lado direito da igualdade (26). O mesmo método foi reproduzido para a Eq. (21). E refeito para as Eqs. (20) e (21) empregando ξ no contorno $x = L$.

$$\begin{aligned}
 u|_{\xi=0} = & \frac{Q}{EI} u^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0} - \frac{Q}{EI} u^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0} - \frac{M}{EI} \theta^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0} + \frac{M}{EI} \theta^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0} \\
 & + \frac{\theta}{EI} M^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0} - \frac{\theta}{EI} M^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0} - \frac{u}{EI} Q^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0} + \frac{u}{EI} Q^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0}
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^\xi \frac{q(x)}{EI} u^* dx \Big|_{\xi=0}^{x=0} + \int_\xi^L \frac{q(x)}{EI} u^* dx \Big|_{\xi=0}^{x=L} \\
 & u \Big|_{\xi=0}^{x=0} - \frac{u}{EI} Q^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0}^{x=0} + \frac{u}{EI} Q^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0}^{x=L} + \frac{\theta}{EI} M^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0}^{x=0} - \frac{\theta}{EI} M^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0}^{x=L} \\
 & = \\
 & \frac{Q}{EI} u^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0}^{x=L} - \frac{Q}{EI} u^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0}^{x=0} - \frac{M}{EI} \theta^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0}^{x=L} + \frac{M}{EI} \theta^*(\xi, x) \Big|_{\xi=0}^{x=0} \\
 & + \int_0^\xi \frac{q(x)}{EI} u^* dx \Big|_{\xi=0}^{x=0} + \int_\xi^L \frac{q(x)}{EI} u^* dx \Big|_{\xi=0}^{x=L}
 \end{aligned} \tag{26}$$

Finalizados os cálculos, foi possível montar o sistema de equações (27), no qual foram substituídos os valores referentes às soluções fundamentais. Em seguida foram aplicados os coeficientes referentes às coordenadas do contorno e às coordenadas do ponto de colocação. Assim, foi obtido o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \frac{EI}{2} & -\frac{EI}{2} & 0 & \frac{L}{2} \\ -\frac{EI}{2} & \frac{EI}{2} & \frac{L}{2} & -\frac{EI}{2} \\ 0 & 0 & \frac{EI}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{2} & \frac{EI}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u|_{x=0} \\ u|_{x=L} \\ \theta|_{x=0} \\ \theta|_{x=L} \end{Bmatrix} = \\
 & \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 & \frac{L^3}{12} & 0 & -\frac{L^2}{4} \\ -\frac{L^3}{12} & 0 & -\frac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{4} & 0 & \frac{L}{2} \\ -\frac{L^2}{4} & 0 & \frac{L}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q|_{x=0} \\ Q|_{x=L} \\ M|_{x=0} \\ M|_{x=L} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{q(x)L^4}{48EI} \\ \frac{q(x)L^4}{48EI} \\ -\frac{q(x)L^3}{12EI} \\ \frac{q(x)L^3}{12EI} \end{Bmatrix} \tag{27}
 \end{aligned}$$

Após ser estabelecido o tipo de viga a ser analisada, são determinadas as condições de contorno, e o sistema apresentado em (27), é finalmente reformulado como $Ax = b$, onde A é a matriz quadrada de quatro elementos, contendo os coeficientes das incógnitas apresentadas no vetor coluna, x , e b , vetor coluna de quatro elementos, contém os valores das condições de contorno prescritas, multiplicados pelos seus respectivos coeficientes e somados com o vetor coluna \bar{B} .

Depois de resolvido o sistema $Ax = b$, os valores do deslocamento, u , da rotação, θ , do momento fletor, M e do esforço cortante, Q , passam a ser conhecidos no contorno. Com o conhecimento desses valores, as equações (20), (21), (22) e (23) podem ser reescritas, e qualquer valor dessas grandezas pode ser calculado para qualquer ponto dentro do intervalo do comprimento da viga.

4 RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados numéricos apresentados neste artigo foram feitos para a viga engastada e para a viga engastada-apoiada. Para ambas as vigas isso foi adotado módulo de elasticidade de 25 GPa (concreto), base de 0,20 m e altura de 0,50 m, e carga distribuída de 30 kN/m. Para a viga engastada foi considerado um vão livre de 2,00 m e para a viga engastada-apoiada, de 5,00 m.

As Fig.1 e Fig.2 apresentam, respectivamente, a deflexão, a rotação, o momento fletor, e o esforço cortante ao longo de uma viga engastada. E as Fig. 3 e Fig 4 apresentam, respectivamente, a deflexão, a rotação, o momento fletor, e o esforço cortante ao longo de uma viga engastada-apoiada. Todos os resultados são comparados a resultados de soluções clássicas analíticas.

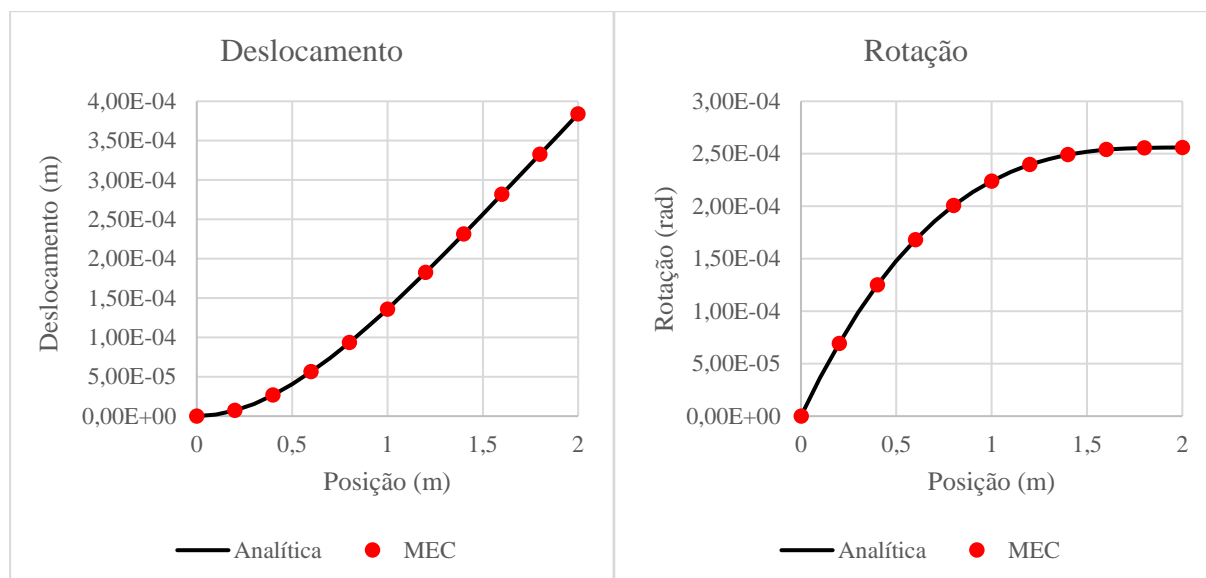


Figura 1. Deslocamento e Rotação para a viga engastada

Fonte: (Autor, 2018)

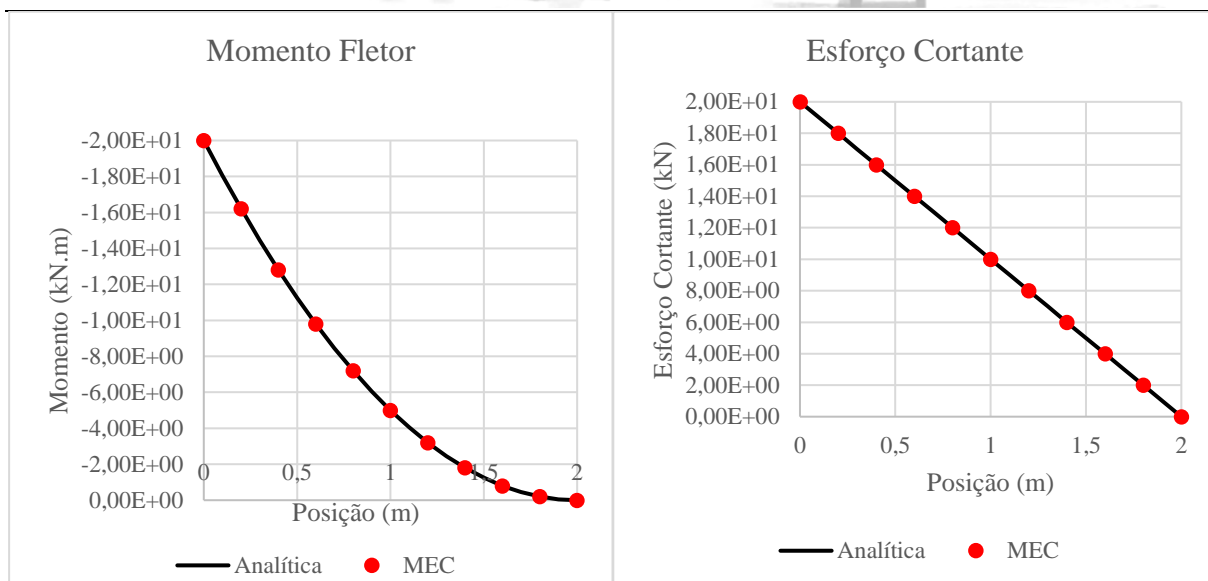


Figura 2. Momento Fletor e Enforço Cortante para a viga engastada

Fonte: (Autor, 2018)

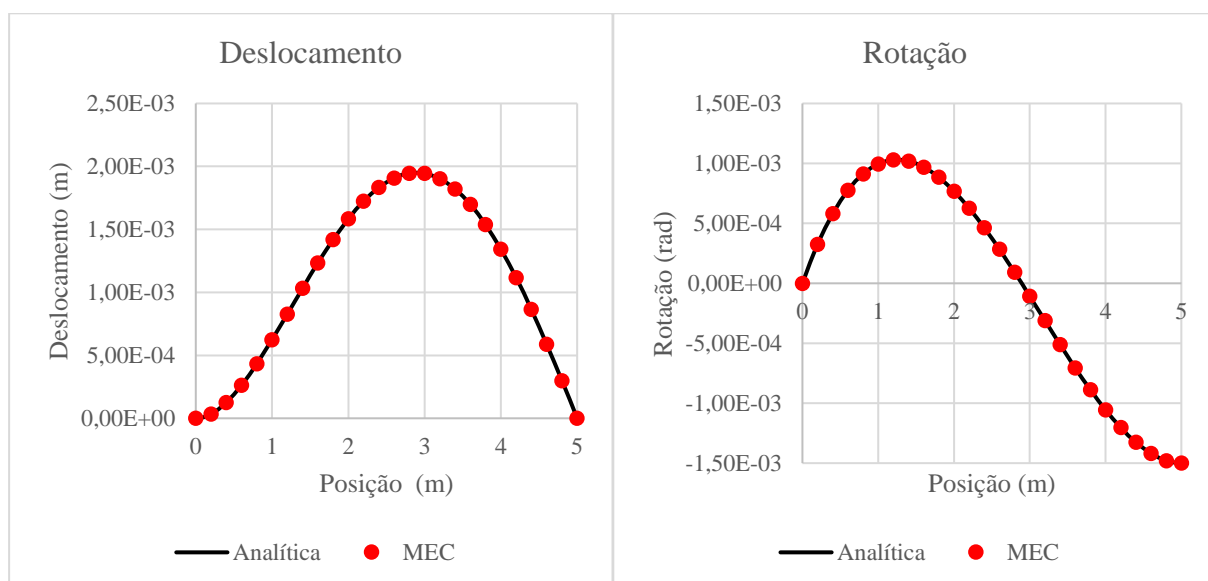


Figura 3. Deslocamento e Rotação para a viga engastada-apoiada

Fonte: (Autor, 2018)

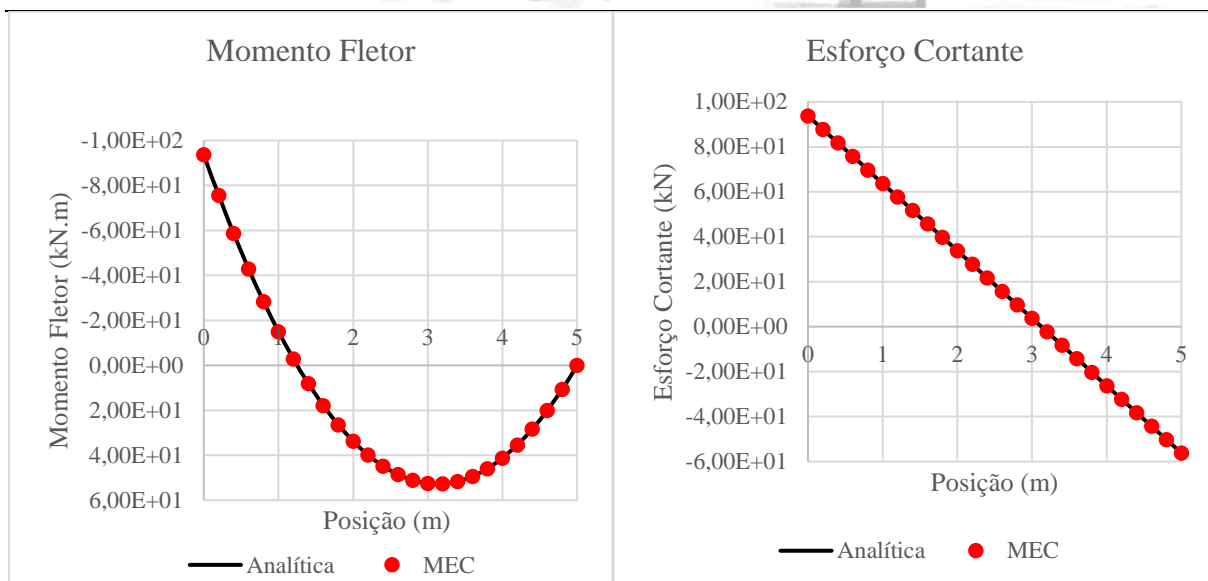


Figura 4. Momento Fletor e Enforço Cortante para a viga engastada-apoiada

Fonte: (Autor, 2018)

5 PRÓXIMOS DESENVOLVIMENTOS

Todo o cálculo desenvolvido nos tópicos 3.2 e 3.3 foi feito para uma viga estática com carga distribuída constante e uniforme. Para o trabalho final, será necessário implementar carregamentos diversos na viga, como carregamentos pontuais, carregamentos distribuídos em trechos específicos da viga, e carregamentos não-uniformemente distribuídos.

No que tange às propriedades da viga, implementar a rigidez variável trará um impacto na solução das integrais. Essa rigidez será oriunda dos diferentes parâmetros para a mesma viga. Em seguida, aplicar-se-ão cargas dinâmicas (base elástica não linear) à estrutura estudada com diferentes condições de contorno. Após feito todo este estudo para uma viga com dois apoios, serão implementadas n vigas à estrutura, considerando as condições de equilíbrio e a compatibilidade entre os nós.

Finalmente, o algoritmo desenvolvido deverá avaliar as deformações, rotações, momentos fletores e esforços cortantes para diferentes vigas (com diferentes carregamentos), e interligar estes dados com a saúde estrutural da viga.



AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante este período de realização do mestrado.

REFERÊNCIAS

Beer, F. P. et al. *Mecânica dos Materiais*. 5. ed. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2003.

Brebbia, C.; Telles, J.; Wrobel, L. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1984.

Katsikadelis, J. T. *Boundary Elements: Theory and Applications*. Elsevir, 2002.

Nery, G. Boletín Técnico. Monitoreo en la Construcción Civil. *ALCONPAT Internacional*. México, 2013.