



ANÁLISE A *PRIORI* DE ATIVIDADE SOBRE FUNÇÕES COM O OLHAR DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Marcelo Muniz ¹
Rosilângela Lucena ²

RESUMO

O presente trabalho, recorte de dissertação de mestrado, objetivou apresentar, solucionar, com suporte do GeoGebra e analisar, com o olhar da teoria dos registros de representação semiótica, uma situação-problema, adaptada de uma questão da OBMEP, a qual possibilitou a construção do conceito de função definida por partes. Caracteriza-se como uma pesquisa de intervenção de uma orquestração instrumental, focada em sua etapa inicial (modo de execução), por meio da qual o professor realiza a fase de planejamento e é quando a análise a *priori* entra em cena, em que foi realizada com um olhar da teoria dos Registros de Representação Semiótica. Assim, este artigo indica elementos teóricos, cujo significado pode ser reproduzido/replicado numa eventual situação a ser desenvolvida pelo professor em sala de aula tanto do Ensino Médio, quanto com estudantes de licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Registros de representação semiótica. Função definida por partes. Orquestração Instrumental. OBMEP. GeoGebra.

INTRODUÇÃO

Em uma Orquestração Instrumental, modelo teórico idealizado por Trouche (2005), há um contexto figurado de uma sala de aula, por meio da qual o professor exerce o papel de maestro, os estudantes são os instrumentistas e os artefatos didáticos serão os futuros instrumentos musicais a serem transformados. A música, nesse caso, conforme aponta Lucena (2018, p. 47), “é o resultado de todos os procedimentos executados pelos instrumentistas, guiados pelos maestros, com seus instrumentos, respeitadas as condições impostas pela partitura executada”.

¹ Mestrando em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC - UFPE, marcelo.msantos@ufpe.br;

² Professor coorientador: Doutora, Secretaria de Educação Municipal do Recife - PE, rosi.lucenasc@gmail.com.



Nesta direção, Trouche (2005) define duas etapas essenciais para que o ensino orquestrado seja estruturado: a configuração didática e o modo de execução. Corroboraram com o desenvolvimento da OI, Drijvers et al (2010), ao enxergarem a sala de aula considerando imprevistos e decisões necessárias para o bom andamento da orquestração, ao definirem a terceira etapa da OI - a performance didática.

Propor ao professor a análise de currículo para definir os objetivos didáticos e as situações matemáticas que serão executadas, nos faz compreender que a orquestração instrumental é também um universo da prática docente, constituída de critérios e objetivos. Segundo Lucena (2018), esta organização norteará as decisões do professor rumo à sistematização, à articulação, à assistência e ao controle relativos às ações previstas e passíveis de execução, por parte dele e dos alunos.

A orquestração instrumental permite ainda ao professor analisar o nível de aprendizagem dos estudantes, pois é durante o planejamento da situação que o professor pode se perguntar como os estudantes poderão mobilizar seus conhecimentos para lidar com as tarefas matemáticas que lhes serão propostas. Para responder a esse questionamento, uma análise *a priori* pode ser realizada a fim de obter possíveis resultados para a situação matemática, assim como prever possíveis reações dos estudantes, e decisões do professor. Outro questionamento que pode ser levantado é como o trabalho matemático permitirá aos sujeitos enriquecer seus conhecimentos. Para isso, novos esquemas deverão ser mobilizados a fim de novos conhecimentos serem criados, de acordo com Rabardel (1995), que também pode ser previsto durante a realização da análise *a priori*.

Portanto, a OI é um modelo que leva em conta que o professor vai gerir as escolhas realizadas por ele para configuração didática e modo de execução ao orquestrar o ensino. Com base nisto, surgiu a questão que norteou nossa pesquisa: como estudantes podem resolver, em sala de aula, uma atividade sobre funções definida por partes na qual são contempladas as transformações entre diferentes registros de representação semiótica?

Para construir a atividade, buscamos questões no banco de dados da OBMEP³ a fim de coletar problemas e, das encontradas, escolhemos a do ano 2014 2ª fase nível 3. Em seguida, realizamos adaptações de modo que o estudante pudesse mobilizar mais conhecimentos sobre funções e assim, utilizar uma maior quantidade de recursos do GeoGebra.

³ OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas: <http://www.obmep.org.br/>



Desta forma, neste trabalho, objetivamos apresentar, solucionar, com suporte do GeoGebra, e analisar, com o olhar da teoria dos registros de representação semiótica, uma situação-problema, adaptada de uma questão da OBMEP, a qual possibilitou a construção do conceito de função definida por partes. A seguir, apresentamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 2004, 2009, 2012a, 2012b), que nos dará suporte para analisar a atividade proposta.

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

As representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, tabelas e gráficos de um certo objeto matemático. Logo, é na atividade cognitiva de formação dessas representações que o estudante consegue, como afirma Duval (2009, p.53), “expressar” uma representação mental ou “evocar” um objeto real”.

Duval (2012b) classifica os registros de representação em: registro natural, caracterizado como o escrito discursivo, cuja intenção é expressar um conceito internalizado; registro gráfico - que pode explicar uma situação com grande quantidade de dados escritos ou ainda descrever um percurso durante um dado intervalo de tempo. Além destes, pode-se, também, destacar outro registro importante: o registro algébrico. Este não serve apenas para expressar variáveis, como também pode ser mobilizado em situações que envolvem conjuntos; o registro tabular descreve várias informações em tabelas e quadros, podendo ou não estar associado a outro registro de representação semiótica.

No entanto, para que um sistema semiótico seja considerado uma representação, deve permitir as três transformações cognitivas fundamentais (DUVAL, 2012b, p. 6): formação de uma representação identificável, tratamento e conversões. A primeira transformação cognitiva corresponde a enunciação de uma frase, escrita de um texto ou construção de uma figura. Para esta transformação, há de se respeitar as regras (sejam gramaticais, no caso da escrita do texto, seja para a construção da figura, mantendo-se as propriedades desta). Os tratamentos, por sua vez, correspondem a transformações dentro de um mesmo registro de representação, ou seja, não há a modificação do sistema semiótico.

A última transformação cognitiva, para Duval (2012b), são as conversões, que por sua vez, correspondem à mobilização entre diferentes registros de representação semiótica.



Portanto, representa a passagem de um tipo de registro para outro, diferente do registro de partida.

É preciso destacar, conforme aponta Duval (2012b), que não há regras para conversões entre registros de representação, tal como existe na formação de uma representação identificável ou nos tratamentos.

Apreensões na aprendizagem de geometria

Duval (2012a) também nos conduz para o caminho da aprendizagem que ocorre na geometria. Para este teórico, os problemas geométricos apresentam uma especificidade em relação aos demais problemas matemáticos, pois o ensino da geometria passa pela condução de fazer o outro enxergar aquilo que eu vejo (DUVAL, 2004). Então, os estudos de Duval (2012a) nos mostram que, no campo geométrico, as aprendizagens se dão por meio das apreensões, que podem ser, dentre outras, perceptiva e discursiva.

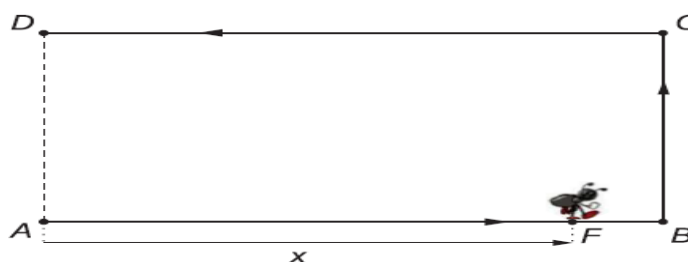
A apreensão perceptiva, bem como apontam Moretti e Brandt (2015), tem a função de identificação, a qual, segundo Duval (2012a), é aquela solicitada em atividades de construção ou descrição, em que deseja-se reproduzir uma figura.

METODOLOGIA

Esse estudo foi realizado como uma pesquisa de intervenção de uma orquestração instrumental, fruto de um projeto piloto da pesquisa de dissertação (MUNIZ, 2022), em que é apresentado a seguir a componente deste aporte teórico-metodológico: descrição da situação a ser resolvida e modo de execução. Nesta última, é descrita uma análise a priori das questões, prevendo possíveis dificuldades dos estudantes nas questões apresentadas na situação matemática.

A situação matemática

(OBMEP-2014/2ª fase/nível 3 - adaptada) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar x centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.



- Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?
- Calcule a área do triângulo ADF quando $x = 22$ cm.
- Descreva as diferentes fórmulas gerais das funções que compõem a figura do enunciado.
- Esboce o gráfico em um papel ou no quadro compartilhado.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

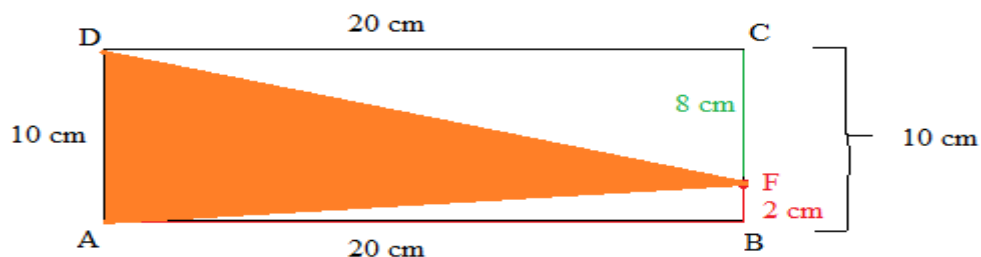
Na primeira questão, original da prova, encontramos a seguinte pergunta: “Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?”.

Para responder, o aluno precisa partir da interpretação do enunciado, caracterizada por Duval (2012) como conversão entre o registro de representação em linguagem natural para a linguagem figural, onde há a informação de que o percurso de A para B mede 20 cm, de B para C, 10 cm e, por fim, de C para D terá os mesmos 20 cm do segmento AB, já que se trata de um retângulo. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para determinar a medida do lado AD, o qual mede 10 cm.

Assim, concluímos que a formiga percorrerá $20 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 20 \text{ cm} = 50 \text{ cm}$, partindo do ponto A até o ponto D.

Na pergunta seguinte, também original da prova, é solicitado aos alunos o cálculo da área do triângulo ADF quando $x = 22$ cm. Como x é uma medida variável que descreve a distância percorrida pela formiga sobre a trajetória retangular, o sujeito precisa perceber que o inseto irá caminhar todo o segmento AB, subindo 2 cm de B em direção a C, conforme mostra a Figura 1.

Figura 1 - Construção do triângulo ADF



Fonte: Muniz (2022)

Duval (2012a) traz quatro formas de apreensão (sequencial, perceptiva, discursiva e operatória) das quais para essa situação o sujeito desenvolverá a perceptiva e a discursiva. Na perceptiva, há a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica. Já na discursiva, haverá a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação do enunciado, considerando a rede semântica de propriedades do objeto, sendo, portanto, a reflexão necessária para a construção da Figura 1.

Após os estudantes perceberem que o ponto F está situado no segmento BC, uma vez esboçando, seja mentalmente, seja fisicamente, a figura tal como a apresentada na Figura 1, fica mais fácil substituir os valores na fórmula para o cálculo da área de triângulos:

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h, \text{ em que } b \text{ representa a base e } h, \text{ a altura.}$$

A base está determinada na Figura 1 como sendo o segmento AD, ou seja, 10 cm, cujo valor é fixo independente da medida da altura do triângulo ADF. Por definição, altura é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado. Ela é um segmento de reta perpendicular (que forma um ângulo de 90°) com o segmento AD e que passa pelo ponto F. Como este ponto é variável, implica que a altura assumirá diferentes valores dependendo da posição da formiga. Portanto, quando a formiga andar 22 cm, a altura do triângulo ADF será 20 cm.

Logo, teremos que $A = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100 \text{ cm}^2$.

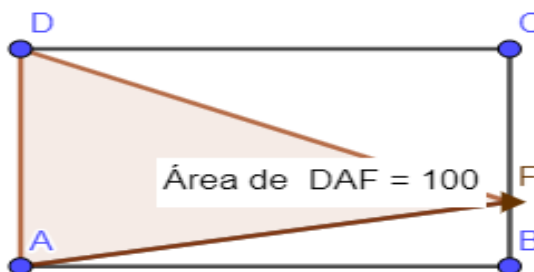
Outra possível solução é a apresentada por Machado (2015), em que a área do triângulo ADF é também obtida pela subtração entre a área do retângulo ABCD pelas áreas dos triângulos retângulos ABF e FCD. Logo, o autor chegou na expressão $S = AB \cdot AD - 1/2 \cdot AB \cdot BF - 1/2 \cdot FC \cdot CD = 20 \cdot 10 - 1/2 \cdot 20 \cdot 2 - 1/2 \cdot 8 \cdot 20 = 200 - 20 - 80 = 100 \text{ cm}^2$.

Essa conclusão será apresentada aos alunos durante a discussão das atividades, mostrando-lhes a simulação no GeoGebra por meio do recurso “área”, conforme apresentado



na Figura 2:

Figura 2 - Utilização de recurso tecnológico para resolução da questão



Fonte: Muniz (2022)

No entanto, Denardi e Bisognin (2019), utilizando uma metodologia parecida com a nossa, também com estudantes em matemática, perceberam que seus estudantes manifestaram dificuldades no cálculo da medida da área do triângulo que haviam desenhado. É possível, portanto, que os alunos aleguem não saber identificar a base e a altura, dificultando assim a determinação da medida da área solicitada.

Na questão seguinte, também criada pelo autor, é sugerido que os sujeitos descrevam as diferentes fórmulas gerais das funções da área do triângulo em relação à distância percorrida pela formiga. Esta situação tem por objetivo fazer com que o aluno realize a conversão do registro figural para o registro algébrico.

É preciso destacar que nos diferentes segmentos do retângulo haverá diferentes funções, mas que a área é uma variável dependente de x . Logo, enquanto a formiga estiver percorrendo o trecho AB, ou seja, $0 \leq x \leq 20$, teremos uma função a qual chamaremos de f_1 . No segmento BC (quando $20 \leq x \leq 30$), teremos uma outra função chamada de f_2 . Por fim, quando a formiga estiver no trecho CD, $30 \leq x \leq 50$, teremos outra função denominada f_3 .

Mantendo-se a base constante e a altura variável (ou vice-versa), quando x estiver no intervalo $0 \leq x \leq 20$, f_1 será descrita por $f_1(x) = \frac{10}{2}x$ e uma representação figural está apresentada na Figura 3. Portanto, $f_1(x) = 5x$.

Figura 3 - Representação figural da função $f_1(x) = 5x$

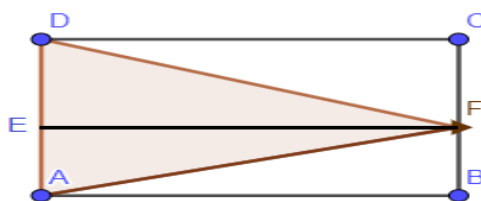


Fonte: Muniz (2022)

Analogamente, calcularemos f_2 . Esta função será representada por uma função constante (figura 4), já que para qualquer ponto F sobre CD, ou seja, em qualquer valor de x no intervalo $20 \leq x \leq 30$, teremos a mesma medida da altura (20 cm), por este segmento, representado na Figura 4 por EF, ser paralelo ao segmento AB.

$$\text{Portanto, } f_2(x) = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100 \text{ cm}^2.$$

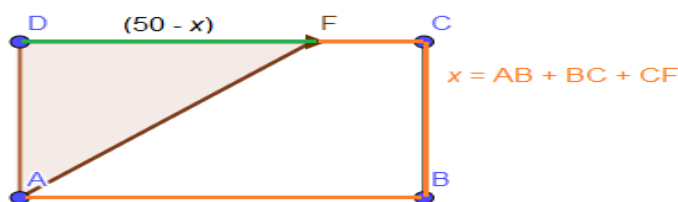
Figura 4 - Representação figural da função $f_2(x) = 100$



Fonte: Muniz (2022)

Por fim, quando a formiga estiver no segmento CD, a variação de x será no intervalo $30 \leq x \leq 50$. A altura do triângulo quando o ponto F estiver no segmento CD será o total do percurso menos o quanto a formiga já andou. Então podemos representar esta medida pela expressão $(50 - x)$, em que x indica a soma dos segmentos $AB + BC + CF$, como mostrado na Figura 19. Assim, a função f_3 estará representada (figura 5) por $f_3(x) = \frac{10}{2} (50 - x)$. Realizando o processo de tratamento a fim de simplificá-la, obteremos a função $f_3(x) = 250 - 5x$.

Figura 5 - Representação Figural da função $f_3(x) = 250 - 5x$



Fonte: Muniz (2022)

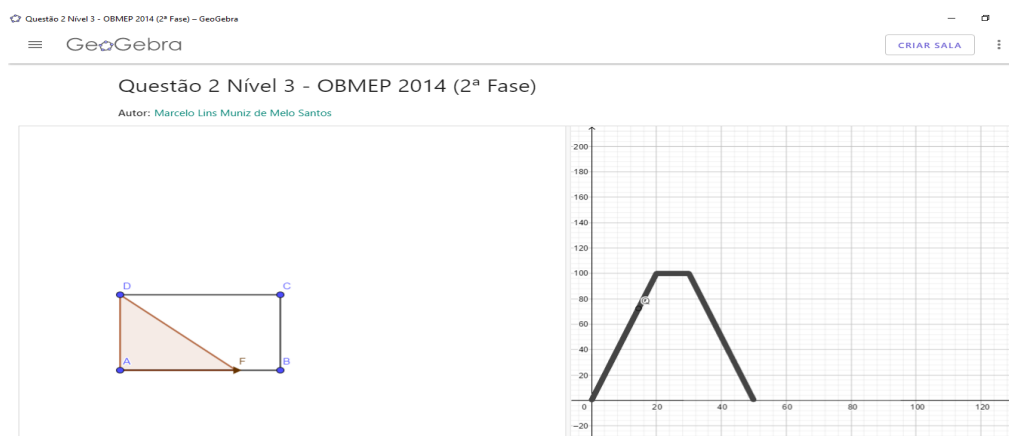


Acreditamos que, nesta situação, os alunos irão dedicar mais tempo para discutir com o grupo ou até mesmo apresentar dificuldades em resolvê-la, necessitando intervenção do mediador. Estas dificuldades foram observadas por Souza, Cordeiro e Moretti (2004) ao realizarem uma atividade com alunos do Ensino Médio. Situações dessa natureza exigem a realização da conversão entre os registros de representação geométrico e algébrico.

Na situação seguinte, os estudantes precisam esboçar o gráfico da função que associa ao comprimento x o valor da área do triângulo ADF. Esta questão foi reproduzida originalmente da prova.

Pesquisas como a de Souza, Cordeiro e Moretti (2004) e a de Fonseca e Henriques (2018) mostram que estudantes apresentam maior facilidade em realizar a conversão entre as representações algébrica e gráfica. Assim, esperamos que esta seja uma situação fácil de ser resolvida, posto que as representações algébricas já foram construídas anteriormente. Durante a discussão das situações, é possível apresentar o modelo desenvolvido no GeoGebra, com duas janelas de visualização sendo à esquerda, a construção geométrica do problema e à direita, o gráfico traçado pelo software com a representação gráfica, ambos sendo desenvolvidos com animação para facilitar a visualização em múltiplas representações. O objetivo é fazer com que os alunos despertem para a importância da mobilização entre registros de representação semiótica propostas com o auxílio do recurso tecnológico. A Figura 6 ilustra esta simulação:

Figura 6 - Resolução Gráfica utilizando simulação



Fonte: Muniz (2022)



Nesta situação, ainda, os estudantes podem realizar a conversão a partir dos registros de representação algébrica para o registro gráfico utilizando uma representação auxiliar de uma tabela. Pires e Barbosa (2018) apontam que os entrevistados utilizaram este recurso, pontuando no gráfico os valores dispostos na tabela.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A atividade reformulada da OBMEP apresentou uma abordagem teórica, mas que traz elementos do conceito de função sob o ponto de vista das transformações de registros de representação semiótica. O diálogo com a literatura mostrou as dificuldades que estudantes poderão encontrar ao resolver essa situação, haja vista ter sido utilizada uma questão de prova para estudantes de Ensino Médio (2ª fase da OBMEP 2014 - nível 3). É possível ainda que o professor observe diferentes interpretações e modos de resolução das que foram descritas na análise *a priori*.

As questões podem ser desenvolvidas com o uso do *software* GeoGebra, entretanto, existe a possibilidade dos estudantes não conseguirem realizar a conversão do registro em linguagem natural, representado pelo enunciado do problema, para o registro figural. Para solucionar esse tipo de dificuldade, o professor pode realizar a atividade em grupo, de modo a possibilitar o trabalho em conjunto, a mobilização de diferentes concepções, as quais poderão contribuir com o desenvolvimento da construção coletiva de resolução da situação.

REFERÊNCIAS

- DENARDI, V. B.; BISOGNIN, E.. Representações Semióticas: Contribuições para o estudo do conceito de função. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Cruzeiro do Sul, v. 10, n. 2, p. 142–159, 2019. ISSN: 2179-426X.
- DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVEMEIJER, K. The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 75, n. 2, p. 213–234, 2010.
- DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía, 2004.



- DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2009.
- DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Mércles T. Moretti. *REVEMAT*, v. 7, n. 1, UFSC/PPGECT, Florianópolis, 2012a. Disponível em <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118>. Acessado em janeiro de 2022.
- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. de Mércles Thadeu Moretti. *Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012b. Disponível em <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>. Acessado em janeiro de 2022.
- FONSECA, V.; HENRIQUES, A. Compreensão da Definição Formal de Limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 1030–1049, 2018. ISSN: 0103-636X. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14>.
- LUCENA, R.. **Metaorquestração Instrumental**: um modelo para repensar a formação de professores de matemática. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica). 383p. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.
- MACHADO, S. **Uma análise crítica das provas da segunda fase da OBMEP 2014**. 2015. Dissertação. 111 p. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Instituto de Matemática Pura e Aplicada; Rio de Janeiro, 2015.
- MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597-616, nov. 2015.
- MORETTI, M. T.; HILLESHEIM, S. F. Linguagem natural e formal na semiosfera da aprendizagem matemática: O caso da geometria para a formação do pedagogo. Em Teia - *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 9, p. 1-19, 2018. Disponível em [Linguagem Natural e Formal na Semiosfera da Aprendizagem Matemática: o caso da Geometria para a formação do Pedagogo | Moretti | Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana \(ufpe.br\)](https://www.ufpe.br/revista-de-educacao-matematica-e-tecnologica-iberoamericana/). Acessado em janeiro de 2022.
- MUNIZ, M.; GITIRANA, V.; LUCENA, R.. Orquestração instrumental on-line para a aprendizagem de função no contexto de ensino remoto. In: Congresso Sobre Tecnologias na



Educação (CTRL+E), 6., 2021, Evento Online. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2021. p. 81-89. Disponível em Orquestração instrumental on-line para a aprendizagem de função no contexto de ensino remoto | Anais do Congresso sobre Tecnologias na Educação (Ctrl+e) (sbc.org.br). Acessado em janeiro de 2022.

MUNIZ, M. Representações semióticas como instrumentos para a aprendizagem de funções: uma análise da gênese instrumental de licenciandos em matemática no ensino remoto. Dissertação de Mestrado da Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, 2022.

PIRES, R. F.; BARBOSA, G. dos S. Representações de Função : Uma Análise das Produções de Professores do Ensino Médio. **REVEMAT**, *Florianópolis*, v. 13, n. 1, p. 288–306, 2018.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies** ; approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995. 195 p.

SOUZA, R. N.; CORDEIRO, M. H. B. V.; MORETTI, M. T. Desenvolvendo o conceito de função linear: análise de uma experiência didática utilizando diferentes registros de representações semióticas. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, p. 19, 2004. Disponível em:

<http://www.sbemrasil.org.br/files/viii/pdf/03/CC84642289968.pdf>. Acessado em 18 jan. de 2022.

TROUCHE, L. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. **Recherches en didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 25, p. 91-138, 2005