



# XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018  
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



## ANÁLISE FISICAMENTE NÃO LINEAR DE MEIOS PARCIALMENTE FRÁGEIS COM ELEMENTOS DE INTERFACE BASEADOS NA CINEMÁTICA DE DESCONTINUIDADE FORTE

### PHYSICALLY NON-LINEAR ANALYSIS OF QUASI-BRITTLE MEDIA WITH INTERFACE ELEMENTS BASED ON CONTINUUM STRONG DISCONTINUITY APPROACH

Thais de Oliveira Azevedo (1); Samuel Silva Penna (2); Rodrigo Guerra Peixoto (3)

(1) Engenheira Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.

Email para Correspondência: thaisazevedo\_2005@hotmail.com; (1) Apresentador

**Resumo:** Neste artigo, apresenta-se a implementação computacional de um modelo baseado em elementos finitos de interface cujo campo de deformações considera a descontinuidade forte provocada por trincas que surgem no meio material. Tais elementos de interface possuem elevada razão de aspecto, assim, com a redefinição do campo de deformações, é possível representar a descontinuidade do meio, a partir de modelos constitutivos contínuos. A implementação foi desenvolvida no sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANALysis Environment*), desenvolvido no departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG. No presente trabalho adotou-se um modelo de fissuração distribuída baseado em leis tensão- deformação na descrição da não linearidade do material. Por fim, são apresentadas simulações numéricas para exemplificar o emprego destes elementos de interface na análise fisicamente não linear de estruturas de concreto.

**Palavras chaves:** *Análise Fisicamente Não Linear, Descontinuidade Forte, Elementos de Interface, Método dos Elementos Finitos.*

**Abstract:** This paper presents the implementation of a interface finite element model, in which the field of deformations considers the strong discontinuity introduced by cracks that grows in the material media. Such interface elements have a high aspect ratio, thus with the redefinition of the strain field, allows to represent the discontinuity of the medium by means of continuous constitutive models. The implementation was placed in the INSANE (*INteractive Structural ANALYSIS Environment*), developed in the Department of Structural Engineering of UFMG. In the present work, a distributed cracking model based on strain-stress laws was used to describe the non-linearity of the material. At last, numerical simulations are presented to exemplify the use of these interface elements in the physically non-linear analysis of concrete structures.

**Keywords:** *Physically Nonlinear Analysis, Strong Discontinuity, Interface Elements, Finite Element Method.*



# XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018  
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



## 1 INTRODUÇÃO

A não linearidade inerente aos materiais empregados em estruturas, quando considerada, torna o problema de difícil solução analítica, resumindo-se a casos particulares e, muitas vezes, complexos e trabalhosos. Uma forma eficaz de tratar tais problemas é através de métodos numéricos computacionais. Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um destes métodos, o qual permite a formulação de modelos fisicamente não lineares apropriados para análise do comportamento dos materiais, inclusive o concreto.

A análise e modelagem das descontinuidades de deslocamento na mecânica dos sólidos é um problema singular, que pode ser analisado por diferentes pontos de vista. Nos recentes anos, uma nova metodologia para focar o problema, baseado no conceito de cinemática com forte descontinuidade, foi desenvolvida.

A introdução de elementos de interface na malha de elementos finitos faz com que todos os potenciais focos de degradação sejam previamente definidos e, utilizando os conceitos da abordagem cinemática de forte descontinuidade, o comportamento do elemento de interface é descrito por um modelo constitutivo contínuo.

Neste trabalho, apresenta-se a combinação de um modelo de fissuração distribuída, para análise via MEF, com as hipóteses de elementos de interface e da cinemática de forte descontinuidade.

## 2 ANÁLISE NÃO LINEAR DE MEIOS PARCIALMENTE FRÁGEIS

Na análise fisicamente não linear, a resposta estrutural é diretamente influenciada pelo comportamento dos materiais que compõem a estrutura. De acordo com o comportamento constitutivo do meio material, pode-se, de forma geral, classificá-los, como dúcteis, frágeis ou parcialmente frágeis, dentre outras possíveis denominações. A resposta não linear de materiais parcialmente frágeis quando solicitados é caracterizada por um ramo descendente após a resistência máxima ser atingida, ou seja, observa-se em suas leis constitutivas um acréscimo de deformações acompanhado por um decréscimo de tensões, tal comportamento é conhecido por amolecimento (*softening*), ou abrandamento, do material.

O concreto, por ser um material parcialmente frágil, apresenta um mecanismo de ruptura caracterizado pela presença de uma zona inelástica na ponta da trinca. Teoricamente, as tensões tendem ao infinito nessa zona, porém o material não é capaz de suportá-las. O que ocorre na realidade, é a formação de uma região degradada, denominada zona de processo de fratura (ZPF), onde os mecanismos responsáveis pela resposta característica do *softening* se desenvolvem.

De acordo com Shah (1995), considerando-se uma trinca, que propaga a partir de um defeito inicial, pode-se observar que existe uma região sem tensões, uma região com tensões, e a região íntegra, onde as tensões de tração ainda não desenvolveram os



mecanismos de tenacidade à fratura. O trecho que contém a maior concentração de tensões, onde se encontra a ZPF, é regido por tais mecanismos e é o responsável pela formação da região de localização de tensões.

## 2.1 Modelo Constitutivo

Dois modelos básicos são usados para tratar problemas de mecânica da fratura através do MEF, a saber: modelos distribuídos e modelos discretos. Em ambos os modelos a modelagem do processo de nucleação e propagação das trincas necessita da descrição do meio material. Para tanto, a utilização de parâmetros que descrevem o comportamento do material, como aqueles baseados na mecânica da fratura, é bem difundida. Em modelos discretos, adota-se uma descrição geométrica da trinca. Modelos distribuídos, pressupõem a fissuração como um processo distribuído no meio, e são aplicáveis para se obter a um comportamento mais global de toda a estrutura. Nestes modelos, idealiza-se o meio como contínuo e homogêneo, formado por microfissuras paralelas, em uma região representada numericamente por uma grandeza definida como comprimento característico do meio.

Uma vantagem do modelo distribuído em relação ao discreto é que no primeiro a geração das fissuras é automática, já o modelo de fissuração discreta é usado quando se deseja obter uma visão detalhada da trinca e da trajetória de propagação.

Neste artigo, propõe-se a descrição do comportamento estrutural através de um modelo constitutivo distribuído, sendo a representação dos possíveis focos de descontinuidade feita através de elementos de interface, que são formulados através da consideração da cinemática de forte descontinuidade. O modelo é baseado em elementos finitos de interface cujo campo de deformações considera a descontinuidade forte provocada por trincas que surgem no meio material. A partir da redefinição do campo de deformações, é possível representar a descontinuidade do meio devido ao surgimento de trincas, através de modelos constitutivos contínuos.

### 2.1.1 Modelo de Fissuração Distribuída

Nos modelos de fissuração distribuída relações entre tensões e deformações são adotadas para acompanhar o processo de fissuração, sendo os limites de resistência do concreto e parâmetros da mecânica da fratura as bases da formulação. Os modelos tradicionais consideram o meio material como inicialmente isotrópico e homogêneo e, à medida que o estado de sollicitação no material aumenta, seu comportamento é alterado devido ao surgimento de fissuras, que no decorrer da análise se propagam através do meio. A partir do início da fissuração, o material passa a ser tratado como ortotrópico e os eixos de ortotropia determinados de acordo com a direção das fissuras.

Em seu trabalho, Pitangueira (1998) descreve uma generalização dos modelos de fissuração distribuída baseados na inversão de flexibilidade. Aqui será apresentada uma síntese do modelo. Os detalhes da formulação são explicitados por Penna, Pitangueira e Fuina (2013).

Nos modelos de Fissuração Distribuída, relações entre tensão e deformação são escritas relativamente aos eixos principais de ortotropia  $n$ ,  $s$ ,  $t$ , na forma

$$\{\sigma_l\} = [{}^sD]\{\varepsilon_l\} \quad (1)$$

onde  $\{\sigma_l\}$  é o vetor de tensões no sistema local,  $[{}^sD]$  é a matriz constitutiva secante local e  $\{\varepsilon_l\}$  é o vetor de deformações no sistema local.

A matriz constitutiva secante local, para estado plano de tensões, é dada por:

$$[{}^sD] = \frac{1}{1 - \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \frac{\nu E_1 E_2}{E_0} & 0 \\ \frac{\nu E_1 E_2}{E_0} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \nu^2\right) G_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{sendo: } G_{12} = \frac{E_0 E_1 E_2}{E_0 E_1 + E_0 E_2 + 2\nu E_1 E_2} \geq \beta_r \frac{E_0}{2(1 + \nu)}$$

Para transformar tensões entre os sistemas (local e global), usa-se

$$\{\sigma_l\} = [T_\sigma]\{\sigma_g\} \quad \text{e} \quad \{\varepsilon_l\} = [T_\varepsilon]\{\varepsilon_g\} \quad (3)$$

onde  $\{\sigma_g\}$  são as tensões no sistema global e  $[T_\sigma]$  é a matriz de transformação de tensões. Assim, tem-se:

$$\{\sigma_g\} = [{}^gD]\{\varepsilon_g\}. \quad (4)$$

Sendo que

$$[{}^gD] = [T_\varepsilon]^T [{}^sD] [T_\varepsilon]. \quad (5)$$

é a matriz constitutiva secante global.

A análise não linear é realizada através de um processo incremental-iterativo. Neste procedimento, se baseado em formulação secante, as equações acima são suficientes. Entretanto, no caso da formulação tangente, que requer o cálculo de rigidez tangente incremental, a relação diferencial entre tensões e deformações deve ser obtida:

$$d\{\sigma_g\} = \left[ [T_\varepsilon]^T [{}^tD] [T_\varepsilon] + \frac{\partial [T_\varepsilon]^T}{\partial \{\varepsilon_g\}} \{\sigma_l\} \right] d\{\varepsilon_g\}, \quad (6)$$

onde  $[{}^tD] = \frac{\partial \{\sigma_l\}}{\partial \{\varepsilon_l\}}$  é a matriz constitutiva tangente no sistema local de coordenadas, e a parcela  $\frac{\partial [T_\varepsilon]^T}{\partial \{\varepsilon_g\}} \{\sigma_l\}$  é devido a influência de eventuais alterações na matriz de transformação durante o processo incremental-iterativo. Avaliando-se os sinais das deformações nas direções de ortotropia, investiga-se a degradação tanto em tração quanto em compressão, sendo necessárias somente leis específicas para regiões de tração e de compressão.

O modelo permite diferentes hipóteses para as leis tensão-deformação locais, responsáveis pela degradação dos módulos de elasticidade longitudinais. Tais relações tensão-deformação são propostas a partir da aproximação de relações matemáticas ajustadas, baseadas em experimentos laboratoriais, e fazendo correlações entre as propriedades do material e os parâmetros das equações. Neste trabalho, utiliza-se uma combinação entre as propostas de Boone e Ingraffea (1987) e Carreira e Chu (1985).

A proposta de Boone e Ingraffea (1987) aproxima o comportamento do concreto à tração por uma lei exponencial, baseada em energia de fratura e nos limites de tensão e deformação admitidos, a equação é dada por

$$\sigma = f_t e^{-k(\epsilon - \epsilon_t)} \quad \text{sendo} \quad k = \frac{hf_t}{G_f} \quad \text{ou} \quad k = \frac{f_t}{g_f} \quad (7)$$

onde  $\sigma$  é a tensão,  $f_t$  é a tensão limite de resistência a tração,  $\epsilon$  é a deformação corrente,  $\epsilon_t$  é a deformação relativa ao limite elástico na tração,  $h$  é o comprimento característico,  $G_f$  é a energia de fratura por comprimento de trinca e  $g_f$  é a energia de fratura específica. A Figura 1 (a) esquematiza os parâmetros da equação.

O comportamento à compressão é expresso por uma lei proposta por Carreira e Chu (1985), dada por

$$\sigma_c = f_c \frac{k \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)}{k - 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^k} \quad \text{sendo} \quad k = \frac{1}{1 - \left( \frac{f_c}{\epsilon_c E_0} \right)} \quad (8)$$

onde  $\sigma_c$  é a tensão equivalente de compressão,  $f_c$  é a tensão equivalente relativa ao limite de resistência à compressão,  $\epsilon_c$  é a deformação equivalente relativa ao limite elástico na compressão, e  $E_0$  é o módulo de elasticidade equivalente no domínio elástico.

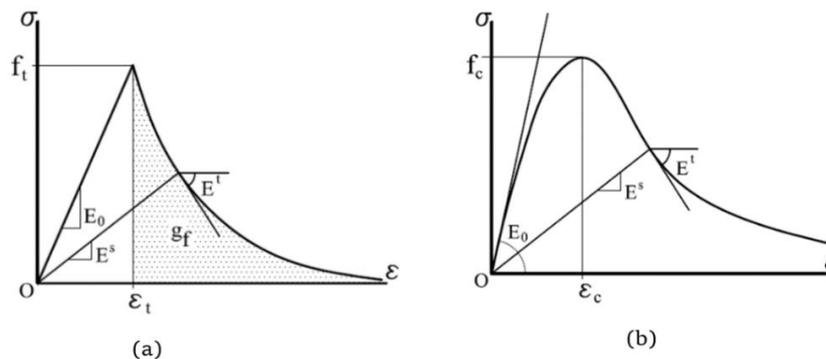


Figura 1. (a) Lei de Boone e Ingraffea; (b) Lei de Carreira e Chu

Fonte: (Penna, 2011)

A Figura 1 (b) ilustra de forma esquemática os parâmetros da equação. Com a combinação das duas propostas é possível avaliar o comportamento de estruturas de concreto que apresentem ou não abertura de fissuras.

## 2.2 Cinemática de Forte Descontinuidade

Durante o carregamento inelástico com *softening*, há uma etapa de transição entre as descontinuidades ditas fracas, e o aparecimento de saltos no campo de deslocamentos. No estágio de descontinuidade forte, a espessura da região de maior concentração de deformações se reduz a zero, fazendo com que haja um salto no campo de deslocamentos.

Consequentemente, o campo de deformações é obtido por uma parte regular, dada pela diferenciação padrão do campo de deslocamentos, e outra parte singular, em que o campo de deformações se torna infinito, ver Figura 2.

O campo de deslocamentos total, para um ponto material localizado em um domínio sólido onde há descontinuidade forte, pode ser dado pela soma entre o campo de deslocamento regular  $\tilde{u}$  e o campo de deslocamento descontínuo  $[[u]]$ .

$$u = \tilde{u} + H_S[[u]] \quad (9)$$

onde  $H_S$  é uma função degrau, ou de *Heaviside*, localizada na superfície da banda de localização, responsável por determinar se o campo é descontínuo em S.

O campo de deformações dado pela cinemática de forte descontinuidade é:

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} + \frac{\mu_S(\zeta)}{h} (n \otimes [[u]])^S \quad (10)$$

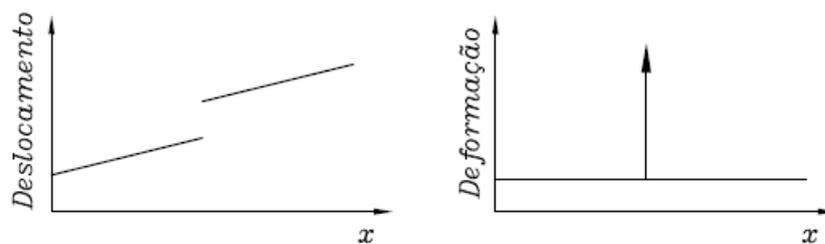


Figura 2. Salto no Campo de Deslocamentos e Deformações

Fonte: (Jirásek, 2001 apud Lopes,2016)

onde  $\tilde{\epsilon}$  é a parcela de deformações contínuas, que não dependem do salto,  $\mu_S(\zeta)$  é a função de colocação na região de localização e adquire os valores 1, para pontos dentro da região de localização ou 0 para pontos distantes,  $h$  é a espessura da região. A parcela de deformação dada pelo salto é obtida através do produto diádico entre o vetor normal a região de deformação e o campo de deformações irregulares, penalizada pela espessura  $h$ . Quando  $h$  se aproxima de zero, as deformações tornam-se ilimitadas, porém o correspondente campo de tensões é limitado e obtido através do modelo constitutivo contínuo.

### 2.3 Elemento de Interface

O modelo de elementos de interface, utilizado para avaliar o processo de fissuração foi inicialmente proposto por Manzoli et al. (2016) e baseia-se, nos conceitos da cinemática de forte descontinuidade (*Continuum Strong Discontinuity Approach - CSDA*). Para que a cinemática do campo de deslocamentos seja semelhante à *CSDA*, os elementos de interface devem possuir elevada razão de aspecto, ou seja, razão alta entre a menor e maior dimensão, respectivamente; sendo a menor dimensão, correspondente à espessura do elemento de interface. Conforme a razão de aspecto aumenta, as deformações do elemento de interface se aproximam das deformações calculadas pela cinemática de forte descontinuidade. Desse modo, baseado no mesmo princípio da *CSDA*,

tensões limitadas serão obtidas a partir de deformações ilimitadas, utilizando relações constitutivas contínuas, as quais tendem a relações constitutivas discretas conforme a razão de aspecto aumenta (Manzoli, 2012).

Nas regiões onde se espera o aparecimento da fissura, realiza-se a fragmentação da malha, através da inserção de um par de elementos de interface entre cada face de contato entre dois elementos padrão da malha de elementos finitos.

Considera-se o elemento finito de três nós da Figura 3, com base  $b$ , formada pelos segmentos entre os nós (2) e (3) e altura  $h$ , dada pela distância entre o nó (1) e a sua projeção na base do elemento (1').

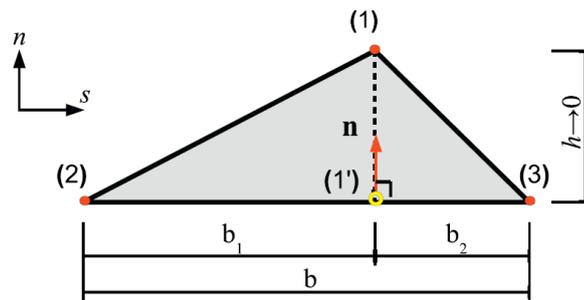


Figura 3: Geometria do Elemento de Interface

Fonte: (Manzoli et al., 2016)

Pelo Método dos Elementos Finitos, as deformações podem ser calculadas a partir da relação:

$$\epsilon = Bd \quad (11)$$

onde  $\epsilon$  é o vetor de deformações,  $d$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $B$  é a matriz que contém as derivadas das funções de forma.

O tensor de deformações é decomposto em duas parcelas, uma responsável pelas deformações ao longo da direção de  $h$  (que irá conter as componentes do salto), e outro que contém as deformações ao longo de  $b$  (que irá conter as deformações contínuas), conforme Eq. 12

$$\epsilon = \hat{\epsilon} + \tilde{\epsilon} \quad (12)$$

Partindo-se da multiplicação da Eq. 11, obtém-se o tensor de deformações total, em função dos deslocamentos nodais e da geometria do elemento triangular. A parcela  $\tilde{\epsilon}$  do vetor de deformações, contém as deformações relacionadas a base  $b$ :

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_n^{(3)} - u_n^{(2)}) \\ \frac{1}{2}(u_n^{(3)} - u_n^{(2)}) & \frac{1}{2}(u_s^{(3)} - u_s^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

E a componente relacionada ao movimento de corpo rígido é dada por:

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \llbracket u \rrbracket_n & \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_s \\ \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_s & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde  $\llbracket u \rrbracket_n = u_n^{(1)} - u_n^{(1')}$  e  $\llbracket u \rrbracket_s = u_s^{(1)} - u_s^{(1')}$ .

Pode-se escrever o tensor  $\hat{\epsilon}$  em uma notação semelhante à cinemática de forte descontinuidade:

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{h} (n \otimes \llbracket u \rrbracket)^S \quad (15)$$

Assim, o tensor de deformações total é:

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} + \frac{1}{h} (n \otimes \llbracket u \rrbracket)^S \quad (16)$$

Quando  $h$  se aproxima de zero, a deformação do elemento de interface, dada pela Eq. 16 é similar a expressão de deformação no regime de descontinuidade forte, Eq. 10, para pontos materiais dentro da região de localização. Assim, o correspondente campo de tensões pode ser obtido por meio da relação constitutiva contínua. Além disto, o tensor de deformações que não depende de  $h$  permanece limitado, porém o tensor  $\hat{\epsilon}$  não está mais limitado, como consequência, as deformações estão relacionadas quase que exclusivamente ao deslocamento relativo entre o nó (1) e sua projeção (1'), tornando-se a medida de descontinuidade de deslocamento.

### 3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O sistema INSANE (*INterative Structural ANalysis Environment*) é um ambiente computacional desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais, implementado em linguagem de programação Java, que utiliza o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). O INSANE é composto por três grandes aplicações para seu funcionamento, o pré-processamento, que consiste na aplicação gráfica interativa que oferece ferramentas para inserir os dados no programa; o pós-processamento, que permite ao usuário a visualização dos resultados no final da sua análise; e um núcleo numérico (processador), responsável pela leitura dos dados e obtenção dos resultados das análises dos modelos discretos.

A implementação da formulação apresentada dá-se a partir da ampliação da herança da classe “*Element*”, mais especificamente pela implementação da classe “*InterfaceElement*”, que herda os métodos e atributos da classe mãe, com exceção do método que calcula as deformações, que foi sobrescrito para que a descrição cinemática apresentada fosse contemplada.

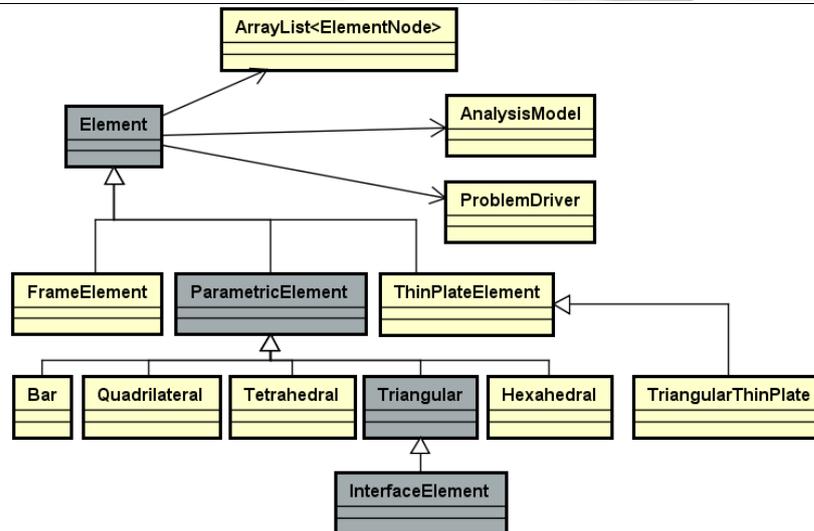


Figura 4. Estrutura de Classe da Classe Element

## 4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

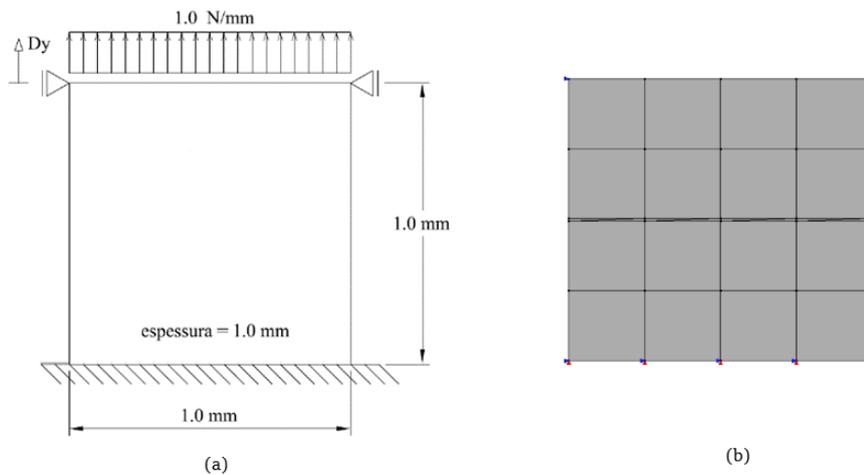
Nesta seção, serão apresentados os resultados de alguns exemplos numéricos que foram processados no INSANE, usando-se elementos finitos de interface, no Estado Plano de Tensões. Os exemplos foram extraídos de dissertações e teses da UFMG. Assim, foi possível comparar os resultados encontrados neste trabalho com os resultados apresentados por outros métodos numéricos comumente usados para análise de fissuras em meios parcialmente frágeis.

### 4.1 Tração – Modo I

Neste exemplo, o objetivo é avaliar a resposta de uma chapa quadrada de concreto, de espessura unitária, engastada na base e submetida a um carregamento uniforme distribuído na parte superior. As informações da geometria e das condições de apoio estão indicadas na Figura 5 (a) e (b). O ensaio é controlado pelo deslocamento vertical  $D_y$ . Elementos de interface são introduzidos na parte central da chapa, conforme se vê na Figura 11. A fissura propaga-se ao longo de toda a seção da chapa. Os valores usados para os parâmetros do material são: módulo de Elasticidade  $E_0 = 100 \text{ N/mm}^2$ ; Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,0$ ; Resistência a tração  $f_t = 1,0 \text{ N/mm}^2$ ; Energia de Fratura  $G_f = 0,02 \text{ N/mm}$  e Comprimento Característico  $L_c = 2,0 \text{ mm}$

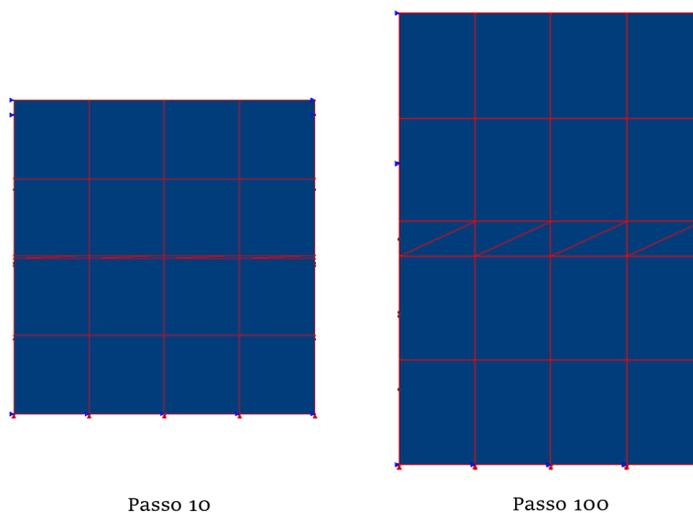
A chapa foi modelada com elementos quadrilaterais de quatro nós Q4 e elementos de interface triangulares de espessura  $h = 0,01 \text{ mm}$ , com energia de fratura  $G_f = 0,6 \text{ N/mm}$ .

Nas Figuras 6, apresentam-se, a deformada com fator de escala igual a 5, para os passos 10 e 100.



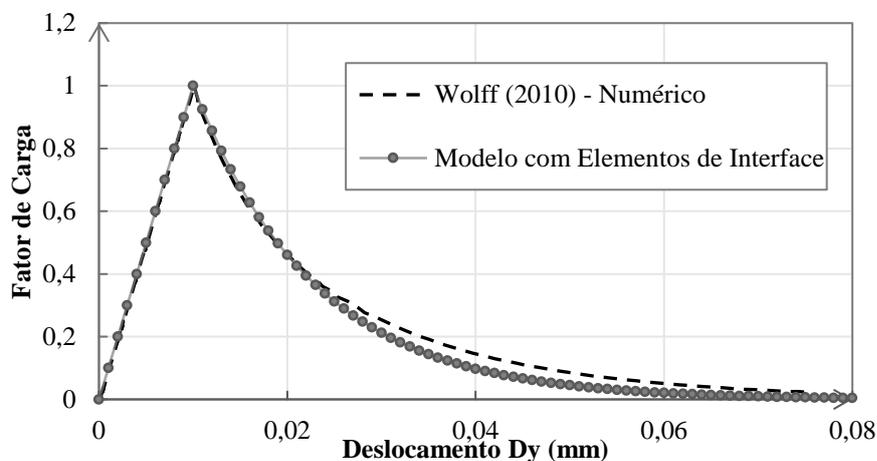
**Figura 5. (a) Geometria e condições de contorno da chapa quadrada; (b) Malha de Elementos Finitos e de Interface**

Fonte: (Wolff, 2010)



**Figura 6. Tração em Modo I: Deformada**

A partir da Figura 6, observa-se que, conforme esperado, a trinca surge no passo em que a chapa se encontra em um estado de tensão igual à sua resistência à tração, cortando simultaneamente todos os elementos pertencentes à linha de elementos de interface. Neste ponto, os elementos de interface passam a comandar a análise. Na Figura 7, apresenta-se a trajetória de equilíbrio do deslocamento de Controle  $D_y$  e a comparação com a trajetória apresentada no trabalho de Wolff (2010) que considera um modelo de propagação de trinca a partir de função de enriquecimento pelo método dos Elementos Finitos Estendidos.



**Figura 7. Tração em Modo I: Comparação da trajetória de equilíbrio do deslocamento  $D_y$ .**

Este exemplo, valida o emprego do modelo de Elementos de Interface para análise do processo de fissuração em meio linear elástico.

## 4.2 Flexão em Três Pontos.

A viga sob flexão em 3 pontos, cuja configuração é apresentada na Figura 8, foi simulada a partir do sistema gráfico integrado objetivando-se demonstrar o emprego deste sistema para análise de propagação de trincas adotando-se modelo constitutivo de fissuras distribuídas.

Nesta análise, adotou-se o modelo constitutivo de fissuras distribuídas com leis de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone e Ingraffea (1987), para tração, cujos parâmetros do material do elemento de interface são: Módulo de elasticidade  $E_0 = 44000,0 \text{ N/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , resistência à compressão  $f_c = 40,0 \text{ N/mm}^2$ , resistência à tração  $f_t = 3,8 \text{ N/mm}^2$ , deformação relativa ao limite elástico na compressão  $\epsilon_c = 0,0018$ , energia de fratura  $G_f = 0,164 \text{ N/mm}$ , comprimento característico de  $100,0 \text{ mm}$  e fator de retenção ao cisalhamento  $\beta_r = 0,0$ . Os elementos regulares foram considerados compostos por um material linear elástico. A viga foi modelada com 3 malhas de elementos quadrilaterais de quatro nós Q4 em estado plano de tensão, com 18, 12 e 8 elementos ao longo da altura.

Para solução do modelo, empregou-se o método de controle direto de deslocamento, incrementando-se de  $0,00015 \text{ mm}$  o deslocamento horizontal do apoio direito, com tolerância para convergência de  $0,0001$ , e carga de referência  $P = 1,0 \text{ N}$ .

Os resultados obtidos foram comparados com os obtidos por Lopes (2016). Em seu trabalho, o autor apresenta uma modelagem baseada no método dos Elementos Finitos Generalizados com função de enriquecimento de trinca e modelo constitutivo de fissuras distribuídas. A nucleação e propagação das trincas é baseada no tensor acústico que está relacionado ao modelo constitutivo.

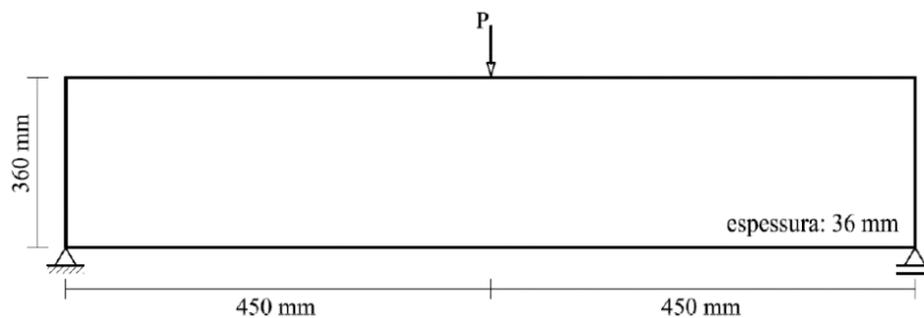
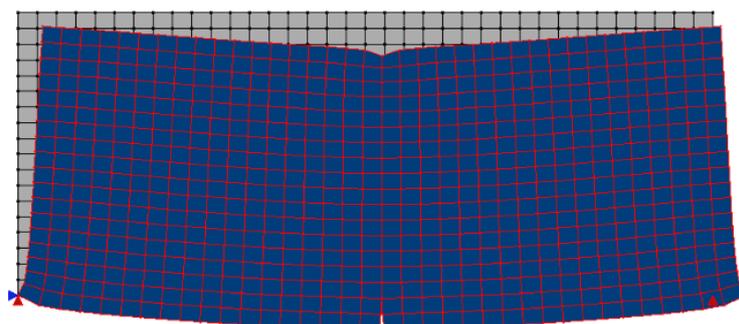


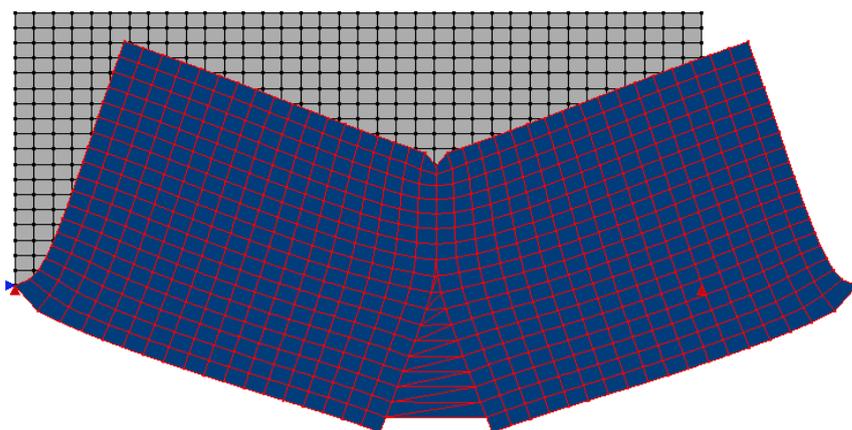
Figura 8. Flexão em 3 Pontos: Geometria e condições de contorno.

Fonte: (Penna, 2011)

Nas Figura 9, apresenta-se a deformada, para os passos 280 e 1360, para a malha mais refinada, com escala aumentada em 1000 vezes.



Passo 280

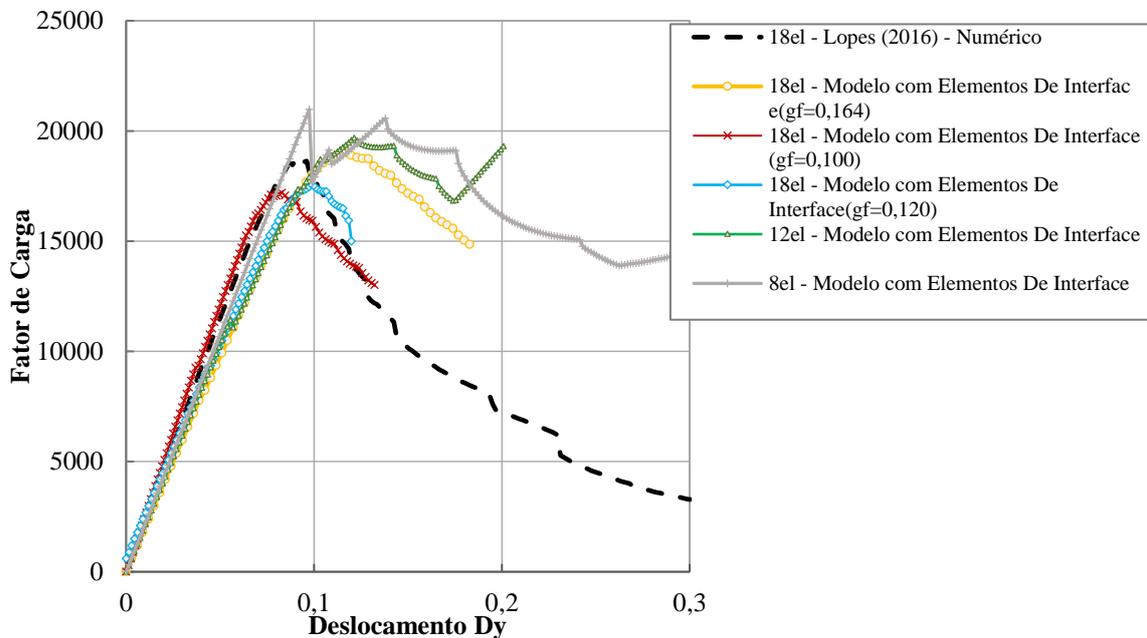


Passo 1360

Figura 9. Flexão em 3 Pontos: Deformada.

A partir da Figura 9, é possível observar o caminhamento da trinca ao longo do processo de solitação. Na Figura 10, apresenta-se a trajetória de equilíbrio do

deslocamento horizontal do apoio direito, para diferentes valores, em comparação com o trabalho de Lopes (2016).



**Figura 10. Flexão em 3 Comparação da trajetória de equilíbrio do deslocamento  $D_y$ .**

Observa-se que para tratar problemas de fissuração, em geral, malhas mais refinadas são necessárias. Além disso, a energia de fratura e comprimento característico são os responsáveis por conduzir numericamente o processo de fissuração.

A partir da análise das trajetórias de equilíbrio apresentadas, é possível observar que, na medida em que se refina a malha, tem-se melhores resultados. Outro fator importante que causam trajetórias de equilíbrio divergentes, é o ajuste no valor da energia de fratura para o elemento de interface, responsável pela área abaixo da curva. Nos trabalhos de Oliver (2000), Manzoli (2012), Manzoli (2015), Maedo (2015), tem-se a compatibilização de energia de fratura a fim de incluí-la na lei do material de forma que se tenha uma correlação entre uma lei de tensão-abertura de trinca e uma lei tensão-deformação do material.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, um modelo de elementos de interface baseado na cinemática de forte descontinuidade é apresentado. O modelo é implementado no Sistema INSANE através de uma única classe, capaz de utilizar todos os recursos do sistema sem grandes modificações. Conforme destacado, o modelo de elementos de interface integrado com a cinemática de forte descontinuidade permite avaliar o processo de fissuração em materiais parcialmente frágeis a partir de modelos constitutivos contínuos, sendo necessário alguns ajustes no valor da energia de fratura do elemento de interface.



# XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018  
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



Os recursos implementados permitem uma aproximação com boa precisão da resposta de fissuração, sendo capaz de modelar fissuras discretas que atravessam a malha de forma independente de sua geometria e tipologia. Este modelo tem como principal vantagem a não necessidade de definição prévia do caminho da trinca ou de redefinição.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro em forma de fomento à pesquisa concedido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

## REFERÊNCIAS

- Boone, T., Wawrzynek, P. A. e Ingraffea, A. R., 1986. Simulation of the fracture process in rock with application to hydrofracturing. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*, vol. 23 (3), pp. 255-265
- Boone, T. e Ingraffea, A. R., 1987. Simulation of the fracture process at rock interfaces. *Proceedings of the fourth international conference in Numerical Methods in fracture Mechanics*, pp. 519-531.
- Carreira, D. e Chu, K. H., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *American Concrete Institute Journal*, vol. 82.
- Hillerborg, A., Modeer, M. e Petersson, P. E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, vol. 6(6), pp. 773-782.
- Jirásek, M., 2001, Modeling of localized damage and fracture in quasi-brittle materials, in P. A. V. et al., ed., *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials*. Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, pp. 17-29.
- Lopes, L. S. 2016. Sistema Gráfico Interativo para Análise de nucleação e propagação de trincas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Maedo, M. A., 2015. Simulação computacional por elementos finitos de múltiplas fissuras em sólidos usando técnica de fragmentação da malha. Dissertação de Mestrado; Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, SP, Brasil.
- Manzoli, O. L., Gamino, A. L., Rodrigues, E. e Claro, G., 2012. Modeling of interfaces in two dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio. *Computer and Structures*, vol. 94-95, pp. 70-82.
- Manzoli, O. L., Maedo, A. M., Bitencourt Jr., L.A.G e Rodrigues, E. A., 2016. On the use of finite elements with high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 153, pp. 151-170.
- Oliver, J., 2000. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp.7207-7229.
- Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica - Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., Pitangueira, R. L. S., Fuina, J. S., 2013. Estudo Comparativo de Modelos de Fissuração Distribuída para Estruturas de Concreto. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, [s.l.], v. 34, n. 2, p.211-228. Universidade Estadual de Londrina.



---

Pitangueira, R. L. S., 1998. Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de Doutorado, PUC – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Shah, S. P., Swartz, S. E. e Ouyang, C., 1995. Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other Quasi-Brittle Materials. John Wiley & Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, NY 10158 - 0012.

Wolff, K. P., 2010. Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendido (XFEM). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.