

# ANALISANDO DINÂMICA DO RISCO DE CONTÁGIO VIA MODELOS CÓPULAS-ONDALETAS ASSIMÉTRICOS

**Thiago Dutra de Araújo**

*Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária da Universidade de São Paulo*

**João Vinícius de França Carvalho**

*Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária da Universidade de São Paulo*

## **Resumo**

Risco de contágio refere-se à propagação de choques entre segmentos econômicos ou países, intensificando-se em períodos de crise, quando eventos localizados podem gerar impactos sistêmicos. Tradicionalmente, esse fenômeno é mensurado via correlações, que capturam a intensidade da dependência, mas apresenta limitações importantes como a simetria, impossibilitando identificar a direção do contágio. Para superar essas limitações, este estudo propõe uma abordagem robusta que combina medidas de dependência assimétricas, inferência causal via *vine copulas* e análise de coerência de ondaletas. Essa combinação permite capturar coerências não lineares, incorporar relações causais e temporais, mensurar a intensidade do contágio eliminando a simetria e analisar sua direção em múltiplas frequências temporais. A metodologia foi aplicada a dados intradiários da economia norte-americana entre 2005-2025, focando os setores bancário e segurador. Os resultados indicam que o setor bancário transmite choques de longo prazo ao segurador durante crises, enquanto ambos absorvem choques de outros durante períodos de normalidade.

**Palavras-chave:** risco sistêmico; dependência dinâmica; dependência assimétrica; finanças.

## 1. Introdução

A propagação de choques originados de um segmento econômico a outros (ou de um país para outros) é denominada *contágio financeiro* (Atasoy et al., 2024; Forbes & Rigobon, 2002). Em períodos de crises financeiras, esses choques tendem a se intensificar, ampliando o risco de contágio (Atasoy & Özkan, 2024).

Um caso emblemático de subdimensionamento do risco real de contágio foi a crise do *subprime* de 2008 (Leong, 2025). Naquele episódio, o contágio ocorreu de forma multifacetada: os choques se propagaram de instituições bancárias colapsadas para outras instituições financeiras, como seguradoras (Dreassi et al., 2018), e do sistema financeiro norte-americano para outros ao redor do mundo, especialmente o europeu e o asiático (Zorgati et al., 2019). Esse processo transformou uma crise localizada em um evento sistêmico (Eichengreen et al., 2012).

Embora o *subprime* tenha sido um dos eventos mais relevantes do século XXI em termos de prejuízos acumulados (R. Zhang, 2023), ele não foi o único. Após a década de 2001-2010 diversas outras crises afetaram agentes interconectados em níveis regional e global, causando severas perdas financeiras (Tabela 1). Em grande parte, os impactos dessas crises foram potencializados pelo contágio financeiro entre indústrias e economias sistemicamente importantes (B. Wu & Wang, 2025).

**Tabela 1.** Principais crises financeiras após 2008

<b>Crise</b>	<b>Período</b>	<b>Nível</b>	<b>Perdas (US\$ bi)</b>
Recessão da Covid-19	2020-hoje	Global	15.000
Crise no mercado chinês de ações	2015-2016	Global	4.000
Crise da zona do euro	2009-2019	Global	700
Crise econômica turca	2018-hoje	Regional	250
Crise econômica brasileira	2014-2016	Regional	200
Invasão russa à Ucrânia	2022-hoje	Global	100-200
Crise venezuelana	2012-hoje	Regional	150
Crise financeira russa	2014-2016	Global	120
Grande recessão espanhola	2008-2014	Regional	100
Crise monetária argentina	2018-hoje	Regional	60
Criptocrise bancária norte-americana	2023	Regional	40

Fonte: elaboração própria, a partir de Skrabec (2015)<sup>1</sup>.

Após a crise de 2008, diversos setores econômicos revisaram seus marcos regulatórios para capturar e mitigar o risco de contágio. No caso do setor bancário, o acordo de *Basileia III*, emitido em 2010, introduziu padrões de liquidez e alavancagem, além de requerer que bancos avaliassem sua capacidade de absorver choques oriundos de outros setores. Esses requisitos variam conforme o nível de operação: local, regional e global.

Apesar dessas medidas, observa-se que diversas crises posteriores continuaram a atingir agentes interconectados, o que evidencia que a mensuração do risco de contágio permanece insuficiente para fins de mitigação (Iwanicz-Drozdowska, Rogowicz, Kurowski & Paweł, 2021). Avaliações precisas de contágio são fundamentais para gerar indicadores capazes de sinalizar a propagação potencial de crises entre setores ou países (Rigana et al., 2023). Tais indicadores auxiliam governos, reguladores e gestores a identificar vetores de contágio e instituições absorventes, configurando uma “primeira linha de defesa” contra a disseminação de choques (Allen & Walther, 2021).

A técnica mais tradicional para mensurar contágio entre mercados financeiros é o cálculo da correlação linear entre índices de retorno e a observação de aumentos anormais dessa correlação durante períodos de crise (J. Li et al., 2022). Contudo, essa abordagem possui pelo menos duas limitações: (i) como correlações lineares são escalares simétricos (i.e., não são direcionais), elas permitem identificar a intensidade do contágio, mas não seus vetores de propagação nem os absorventes de choques, o que reduz sua utilidade prática (Escanciano & Hualde, 2021), e; (ii) não é possível estimar o risco de contágio de forma prospectiva, dificultando a adoção de medidas preventivas (Edirisinghe et al., 2015).

Diante dessas limitações, a literatura passou a empregar modelos de rede para mapear o contágio (Fonseca & Carvalho, 2025; Amini, 2023; Yu & Zhao, 2020). Mais recentemente, a literatura (Czado, 2025; Junker et al., 2021) propôs representações causais não lineares baseadas em *vine copulas* e medidas assimétricas de dependência (i.e.,  $\xi(X, Y) \neq \xi(Y, X)$ ), capazes de introduzir direcionalidade à estrutura de dependência.

Apesar dos avanços, tais métodos assumem que os dados são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), típicos de cortes transversais, o que implica uma visão estática do contágio, i.e., sem captar sua dinâmica temporal.

---

<sup>1</sup> Skrabec, Q. R. (2015). *The 100 most important American financial crises: an encyclopedia of the lowest points in American economic history*. Santa Barbara, California: Greenwood, an imprint of ABC-CLIO, LLC. ISBN 978-1-4408-3011-2.

Para superar essa limitação, este estudo propõe expandir o uso dessas técnicas incorporando a *coerência parcial de ondaletas* (Hu & Si, 2021). As ondaletas são ferramentas espectrais que decompõem séries temporais em diferentes níveis (frequências), permitindo observar simultaneamente as dimensões do tempo e da frequência, e identificar movimentos em múltiplos horizontes: curto, médio e longo prazo (Aidoo et al., 2022).

Por meio da diferença de fases da coerência parcial, é possível identificar comovimentos entre séries temporais e determinar em quais instantes e frequências uma série antecipa/sucedee a outra (Barnes et al., 2024). Essa antecedência temporal, embora não suficiente *per se*, é condição necessária para caracterizar o contágio (Yarovaya et al., 2022).

Assim, o uso da diferença de fases constitui o primeiro passo para localizar o contágio financeiro no tempo e nas frequências relevantes. O passo seguinte consiste em estabelecer a representação causal por meio das *vine copulas* – estrutura de dependência condicional mais flexível do que as redes bayesianas, que assumem apenas relações lineares – para verificar se a antecedência observada implica causalidade efetiva.

Nos casos em que essa causalidade é confirmada, a intensidade do contágio é mensurada pelo coeficiente de assimetria de dependência proposto por Junker et al. (2021), que já exclui o componente simétrico da relação. Por fim, o modelo desenvolvido é aplicado a índices setoriais Dow Jones da economia norte-americana, de modo a analisar a dinâmica do risco de contágio entre diferentes indústrias.

Desta forma, este trabalho traz quatro contribuições principais: (i) amplia achados metodológicos recentes, propondo um modelo dinâmico que combina cópulas, dependências direcionais e coerência parcial de ondaletas; (ii) reintroduz o papel dos modelos de dependência na mensuração de contágio, tema que perdeu espaço na literatura nos últimos anos; (iii) utiliza ondaletas para localizar crises com maior precisão, substituindo análises gráficas ou critérios *ad-hoc*; e (iv) responde a um chamado recente da literatura ao investigar o papel de bancos e seguradoras como potenciais propagadores ou absorventes de choques financeiros.

## 2. Referencial teórico

O risco de contágio financeiro é uma preocupação central para governos, reguladores, gestores, e analistas de risco, que buscam compreender quando e como uma crise em um segmento econômico pode se espalhar para outros. Existem diferentes tipos de contágio (e.g., entre mercados ou entre setores de uma mesma economia) e múltiplas abordagens para estudá-los (Fonseca & Carvalho, 2025; Atasoy & Özkan, 2024).

Essencialmente, a literatura analisa o contágio sob duas grandes perspectivas: (i) pelos canais de transmissão, e; (ii) pela dependência estatística entre mercados, usualmente medida por correlações. Nesse segundo grupo, o trabalho seminal de Forbes e Rigobon (2002) caracterizou o contágio como um aumento anormal das correlações entre países durante períodos de crise. Desde então, inúmeros trabalhos adotaram essa métrica (Denkowska & Wanat, 2022; Srbinoski et al., 2024; P. Zhang et al., 2023), mesmo com algumas variações.

Embora a maior parte dos estudos tenha focado em contágios entre países, medindo correlações entre retornos de índices de mercado, alguns autores passaram a investigar contágios setoriais, com o objetivo de identificar os segmentos mais propagadores de crises. Exemplos incluem o papel do setor tecnológico na bolha da internet dos anos 1990 (Xu et al., 2022; Chunxia et al., 2016; Baur, 2012).

Durante a crise do *subprime*, diversos estudos examinaram o papel de bancos e seguradoras na propagação dos choques. Embora se pudesse supor que as seguradoras amplificassem os efeitos negativos sobre os bancos (em virtude das indenizações decorrentes de *defaults*), pesquisas posteriores mostraram o inverso: os bancos se revelaram mais centrais na propagação dos choques (Caccioli et al., 2024; Cummins & Weiss, 2014; Fonseca & Carvalho, 2025; Tzomakas, 2024).

Na recessão da Covid-19, J. Wu et al. (2024), Bevilacqua et al. (2023), Y. Li et al. (2022) e Cornaro (2023) investigaram o contágio tanto entre setores financeiros e não financeiros de uma mesma economia, quanto o contágio entre setores de diferentes países. Houve evidências consistentes de que a pandemia aumentou o risco sistêmico no setor bancário, que atuou como principal propagador de choques. Por outro lado, o setor de seguros apresentou um padrão distinto, sendo as seguradoras de vida as mais afetadas. Dada a forte interdependência entre bancos e seguradoras, Yarovaya et al. (2022) recomendam o uso de modelos que considerem a relação de *feedback* bidirecional entre esses segmentos.

Com o tempo, tornou-se evidente que correlações lineares são limitadas por sua natureza simétrica: um aumento na correlação mede apenas a intensidade do contágio, mas não sua direção – aspecto crucial para identificar quem propaga e quem absorve choques. Essa limitação impulsionou o desenvolvimento de métodos baseados em redes (e.g., bayesianas, complexas, neurais) e outros métodos de aprendizagem de máquina.

Entre os exemplos, Fonseca e Carvalho (2025) mapearam interdependências setoriais dentro da economia dos EUA por meio de redes bayesianas, identificando três períodos críticos

de contágio: a crise do *subprime*, a crise da dívida europeia e as eleições presidenciais de 2016, mostrando que o setor de seguros atua como receptor, especialmente do setor bancário. De modo semelhante, Chong e Klüppelberg (2018) modelaram o contágio entre instituições financeiras com redes bayesianas de inadimplência, identificando riscos sistêmicos conjuntos.

Modelos híbridos também surgiram. Chung et al. (2024) combinaram o DCC-GARCH e redes neurais recorrentes para prever contágios financeiros, criando um sistema de “alerta” antecipado. Sahiner (2024) utilizou abordagem similar para prever a propagação de volatilidades. L. Li et al. (2023), por sua vez, integraram técnicas de *machine learning* em redes financeiras, ressaltando a necessidade de sistemas mais sustentáveis e resilientes.

Apesar dos avanços, esses métodos capturam majoritariamente relações lineares de dependência. Para lidar com não linearidades, a literatura passou a empregar cópulas, uma técnica estatística desenvolvida entre as décadas de 1950 e 1960 (Fréchet, 1951; Sklar, 1959) e amplamente aplicada às Finanças a partir dos anos 1990 (Embrechts et al., 2003).

Durante a crise do *subprime*, as cópulas foram usadas para mapear contágios entre diferentes mercados. Zorgati et al. (2019) observaram níveis de contágio mais elevados nos EUA do que na Ásia. Mohti et al. (2019) encontraram evidências significativas apenas na Europa (Croácia e Romênia). Já Weiß (2012) identificou efeitos contagiante no setor bancário da Alemanha e do Japão, destacando o aumento da dependência de cauda após anúncios de crise bancária.

Entretanto, as cópulas tradicionais são simétricas, o que pode gerar a falsa impressão de reciprocidade causal – como se conhecer  $X$  ajudasse a prever  $Y$  e vice-versa. Para superar esse problema, Junker et al. (2021) propuseram uma medida assimétrica de dependência  $\xi$ , que elimina o componente simétrico.

Contudo, como os próprios autores reconhecem, essa medida não implica causalidade: ela quantifica a assimetria da dependência, mas não indica se  $X \rightarrow Y$ ,  $Y \rightarrow X$  ou se existe um conjunto de variáveis exógenas  $Z$  tal que  $Z \rightarrow X$  e  $Z \rightarrow Y$ .

Na tentativa de impor direcionalidade causal no contágio, diversos estudos (Jang et al., 2022; Abdennadher & Hellara, 2018) recorreram ao teste de causalidade de Granger (Granger, 1969). Embora útil, esse teste apenas identifica se os valores passados de uma série ajudam a prever outra – condição necessária, mas não suficiente para caracterizar causalidade.

Um modelo mais adequado para inferência causal é o de equações estruturais (Pearl, 2009), frequentemente representado por um grafo acíclico direcionado (assim como a rede

bayesiana). Porém, sua limitação está na incapacidade de lidar com dependências não-gaussianas, o que resulta em distribuições condicionais não lineares e não aditivas. Para contornar essa limitação, Czado (2025) propôs o uso cópulas *D-vine* para especificar distribuições condicionais de um nó, dados seus pais, estendendo consideravelmente a classe de modelos lineares. Segundo a autora, esse modelo baseado em cópulas permite estabelecer relações causais e temporais de forma mais flexível.

No presente estudo, combinamos esses avanços recentes com o uso de ondaletas, empregadas tanto para localizar períodos de crise como para identificar a antecedência temporal entre séries financeiras por meio da coerência parcial. Essa integração possibilita (i) localizar crises ao longo do tempo; (ii) observar a antecedência temporal entre duas séries financeiras, condição primária para detectar contágio; (iii) mapear os instantes e frequências em que essa antecedência ocorre; (iv) estabelecer uma relação causal-temporal, caracterizando o contágio de forma dinâmica, e; (v) quantificar sua intensidade por meio do coeficiente de assimetria de dependência.

### 3. O cerne metodológico: cópulas e ondaletas

A base metodológica deste trabalho fundamenta-se em *vine copulas* e ondaletas, conforme descritas em Hofert et al. (2018), Joe (2014), Morettin (2014) e Nason (2008).

#### 3.1. Vine copulas

Cópulas são funções que mapeiam o hipercubo  $[0,1]^d$  no intervalo  $[0,1]$ , associando as distribuições marginais  $F_{X_i}$  das variáveis aleatórias  $X_i$  à sua distribuição conjunta  $F$ . Assim, se  $C$  for uma cópula, então  $F = C(F_{X_1}, F_{X_2}, \dots, F_{X_d})$ . Sklar (1959) demonstrou que, no caso de variáveis contínuas,  $C$  é única.

Uma cópula particularmente relevante neste estudo é a cópula  $\Pi(u_1, u_2, \dots, u_d) = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_d$ , que representa a independência entre as variáveis aleatórias:  $X_i \perp X_j$  se, e somente se, a cópula entre  $X_i$  e  $X_j$  for  $\Pi$ . Esta condição é mais robusta do que a simples ausência de correlação linear.

No caso bivariado ( $d = 2$ ), há diversas maneiras de construir cópulas. Entretanto, para  $d > 2$ , a construção torna-se significativamente mais complexa, tanto do ponto de vista matemático quanto computacional.

Uma abordagem eficiente consiste em decompor a estrutura multivariada em cópulas bivariadas – procedimento conhecido como *pair-copula decomposition* – e agregá-las em estruturas hierárquicas chamadas *vine copulas*. No caso bivariado, tem-se:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (1)$$

Derivando a Equação (1) em relação a  $x_1$  e  $x_2$ , obtém-se a densidade conjunta  $f$ :

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial F_1 \partial F_2} \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \quad (2)$$

Denotando  $c_{12}(F_1, F_2) = \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial F_1 \partial F_2}$ , reescreve-se a última igualdade:

$$f_{12}(x_1, x_2) = c_{12}(F_1, F_2) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \quad (3)$$

e a densidade condicional:

$$f_{2|1}(x_2|x_1) = \frac{f(x_2, x_1)}{f(x_1)} = c_{12}(F_1, F_2) \cdot f_2(x_2) \quad (4)$$

A partir das Equações (3) e (4), é possível decompor densidades conjuntas multivariadas em produtos de funções bivariadas. Para o caso trivariado:

$$\begin{aligned} f_{123}(x_1, x_2, x_3) &= f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) \cdot f_{12}(x_1, x_2) \\ &= f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) \cdot f_{2|1}(x_2|x_1) \cdot f_1(x_1) \\ &= f_{31|2}(x_3|x_1, x_2) \cdot c_{12}(F_1, F_2) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \\ &= c_{31|2}(F_{3|2}, F_{1|2}) \cdot f_{3|2}(x_3|x_2) \cdot c_{12}(F_1, F_2) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \\ &= c_{31|2}(F_{3|2}, F_{1|2}) \cdot c_{32}(F_3, F_2) \cdot f_3(x_3) \cdot c_{12}(F_1, F_2) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \\ &= c_{31|2}(F_{3|2}, F_{1|2}) \cdot c_{32}(F_3, F_2) \cdot c_{12}(F_1, F_2) \cdot f_3(x_3) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \end{aligned} \quad (5)$$

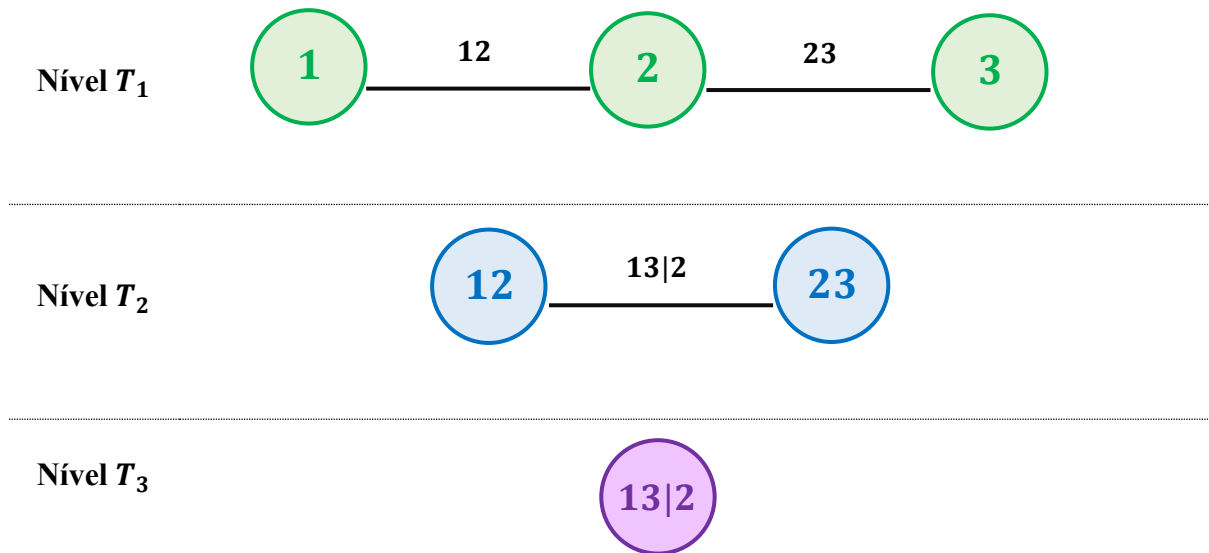
Isto significa que toda densidade multivariada é produto de três tipos de funções: as marginais e as cópulas bivariadas, condicionais e incondicionais. Em geral, para uma cópula  $d$ -dimensional:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \underbrace{\prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{i,(i+j)|(i+1), \dots, (i+j-1)}}_{\text{cópulas bivariadas}} \cdot \underbrace{\prod_{k=1}^d f_k}_{\text{marginais}} \quad (6)$$

Essa decomposição pode ser representada usando grafos acíclicos, originando estruturas hierárquicas conhecidas como *vine copulas* padrão (*Regular vine*, ou *R-vine*). A Figura 1 mostra

o grafo correspondente à Equação (5). No primeiro nível, cada nó representa uma marginal, e cada aresta representa a cópula bidimensional que as conecta. Nos níveis seguintes, os nós correspondem às arestas do nível anterior, e as novas arestas representam cópulas condicionadas ao elemento comum entre os nós.

**Figura 1.** Decomposição em cópulas representada por grafos



Fonte: elaboração própria.

Como o processo de decomposição não é único, à medida que o número de dimensões aumenta, surgem diversas estruturas hierárquicas equivalentes – entre as mais comuns, destacam-se as *C-vines* e as *D-vines*.

Para um conjunto de dados observado, é possível selecionar, para cada cópula da Equação (6), aquela que melhor se ajusta aos dados, segundo o Critério de Informação de Cópias (CIC) proposto por Grønneberg e Hjort (2014). Valores mais altos do CIC indicam melhor ajuste. Como veremos adiante, um caso especial de ajuste relevante é a cópula  $\Pi$ , que representa a independência (condicional ou incondicional) entre variáveis.

### 3.2. Ondaletas

Ondaletas são funções de energia finita e média nula utilizadas para representar todo funcional pertencente ao espaço  $L^2(\mathbb{R})$ , i.e., o espaço das funções de quadrado integrável. A partir de uma ondaleta-mãe  $\psi$ , obtêm-se suas versões escaladas e transladadas:

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (7)$$

com  $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ .

O espaço  $L^2(\mathbb{R})$  pode ser gerado pela base  $\{\psi_{a,b}\}$ , de modo que qualquer elemento deste espaço é representado por:

$$f(x) = \sum_{j \geq j_0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(x) \quad (8)$$

em que  $d_{j,k}$  são coeficientes obtidos pelo produto interno  $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ , também chamado de *transformada contínua de ondaletas*:

$$W_f(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (9)$$

e representa o detalhe produzido por  $\psi_{a,b}$ , indicando a contribuição da ondaleta-mãe em certo nível  $a$ , localizado no instante  $b$ . É possível discretizar a Equação (9) escolhendo-se valores convenientes para  $a$  e  $b$  como, por exemplo,  $a = 2^{-j}$  e  $b = k2^{-j}$ , com  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

Janela temporal é o intervalo de tempo em que a ondaleta tem valores significativamente não-nulos, i.e., é o intervalo temporal que a ondaleta ‘observa’ o sinal. No caso contínuo, a função  $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$  atua como uma janela temporal centrada em  $b$ , com largura proporcional a  $a$ .

Da mesma forma que  $\psi$  define uma janela temporal em função da escala  $a$ , ela também define uma frequência  $f_a$ , dada por:

$$f_a = \frac{\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2}}{4\pi a} \quad (10)$$

em que  $\omega_0$  é a frequência central de  $\psi$  (em rad/s). Assim, quando  $a$  é pequeno, tem-se janelas de curta duração e alta frequência. Já quando  $a$  é grande, tem-se janelas de longa duração e baixa frequência. O período correspondente  $T_a$  é dado por  $\frac{1}{f_a}$ .

O espectro de ondaletas representa a distribuição da variância (energia) do sinal ao longo do tempo e das frequências. Ele é definido como o módulo do quadrado dos coeficientes de ondaleta, e mostra quanta energia do sinal está associada àquela frequência naquele instante.

Em uma série temporal  $X_t$ , o espectro relativo à escala  $a$ , centrado em  $b$ , é dado por:

$$\mathbb{E}[|W_X(a, b)|^2] = \sum_u \sum_v \psi_{a,b}(u) \cdot \psi_{a,b}(v) \cdot \mathbb{E}[X_{u+t} \cdot X_{v+t}] \quad (11)$$

e pode ser estimado por meio do periodograma  $I_{j,k}$ . No caso não-estacionário, calcula-se:

$$I_{j,k} = \left| \sum_{t=0}^T X_{t,T} \psi_{j,k}(t) \right|^2 \quad (12)$$

Já o espectro cruzado de ondaletas mensura a energia compartilhada por duas séries ao longo do tempo e frequência. Assim, se  $X_t$  e  $Y_t$  são duas séries temporais com transformadas contínuas dadas pela Equação (9) e representadas por  $W_X(a, b)$  e  $W_Y(a, b)$ , o espectro cruzado é dado por:

$$W_{XY}(a, b) = W_X(a, b) \cdot \overline{W_Y(a, b)} \quad (12)$$

em que  $\overline{W_Y}$  indica o conjugado complexo.

Note que  $W_{XY}$  é um número complexo da forma  $W_{XY}(a, b) = |W_{XY}(a, b)| \cdot e^{i\phi}$ . O módulo  $|W_{XY}(a, b)|$  mede o nível local de comovimento (energia comum) entre  $X_t$  e  $Y_t$  na escala  $a$ , localizado no instante  $b$  e  $\phi$  indica o deslocamento temporal relativo entre as séries.

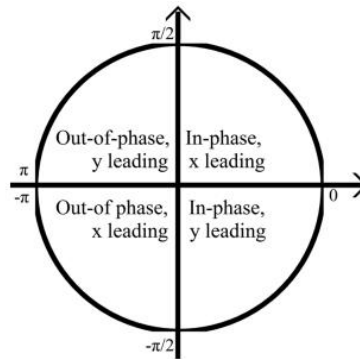
A diferença entre as fases ( $\phi$ ) é obtida fazendo:

$$\phi(a, b) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im}(W_{XY}(a, b))}{\operatorname{Re}(W_{XY}(a, b))} \right) \quad (13)$$

e mostra qual série antecede/sucedee a outra. Quando  $\phi = 0$ , as séries estão positivamente correlacionadas, movendo-se juntas (i.e., estão “em fase”), situação representada por  $\rightarrow$ . Se  $|\phi| = \pi$ , as séries estão se movendo de forma contrária (antifase), situação indicada por  $\leftarrow$ . Quando  $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , então  $X_t$  antecede  $Y_t$  e são correlacionadas positivamente ( $\nearrow$ ); no caso  $\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\pi\right)$ ,  $X_t$  também antecede  $Y_t$ , mas agora correlacionadas negativamente ( $\swarrow$ ).

Os casos  $\phi \in \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$  e  $\phi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  indicam que  $Y_t$  antecede  $X_t$ , sendo o primeiro positivamente correlacionadas ( $\searrow$ ) e o segundo, negativamente ( $\nwarrow$ ). Por fim, se  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ , então as séries não são correlacionadas ( $\uparrow$  ou  $\downarrow$ ). Essas conclusões são esquematizadas na Figura 2.

**Figura 2.** Intepretação de comovimentos a partir da diferença de fases



Fonte: Aguiar-Conraria & Soares (2014)<sup>2</sup>, p. 356.

O grau de associação local (tempo-frequência) entre  $X_t$  e  $Y_t$  é dado pelo módulo da coerência complexa de ondaletas  $\varrho_{XY}$ :

$$\varrho_{XY}(a, b) = \frac{S(W_{XY}(a, b))}{[S(|W_X(a, b)|^2) \cdot S(|W_Y(a, b)|^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

em que  $S$  é um operador de suavização tanto no tempo quanto na escala.

Com o intuito de investigar se o comovimento entre duas séries é mediado por outras, Ng & Chan (2012) propuseram a coerência parcial de ondaletas, medindo a dependência direta entre  $X_t$  e  $Y_t$ , expurgada dos efeitos das demais. No caso multivariado, sejam  $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$  o conjunto formado por  $n$  séries temporais e, para cada escala  $a$  centrada em  $b$ , considere a matriz  $\Omega$  de coerências complexas (Equação (14)) dada por:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_{12} & \dots & \varrho_{1n} \\ \varrho_{21} & 1 & \dots & \varrho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho_{n1} & \varrho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Indicando por  $\varrho_{ij}^{-1}$  o elemento  $(i, j)$  de  $\Omega^{-1}$ , se  $\varrho_{ij}^{-1} \approx 0$  então não há dependência direta entre  $X_i$  e  $X_j$ . A coerência parcial múltipla entre  $X_i$  e  $X_j$ , expurgada das demais, é definida como o módulo da coerência parcial múltipla complexa  $\varphi_{i,j}$ :

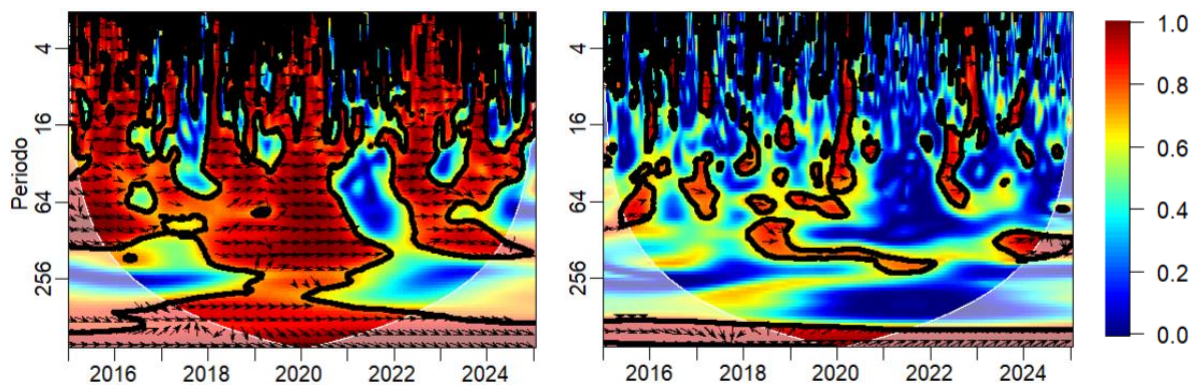
$$\varphi_{i,j}(a, b) = \frac{\varrho_{ij}^{-1}(a, b)}{[\varrho_{ii}^{-1}(a, b) \cdot \varrho_{jj}^{-1}(a, b)]^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

<sup>2</sup> Aguiar-Conraria, L. & Soares, M. J. (2014). The continuous wavelet transform: moving beyond uni and bivariate analysis. *Journal of Economic Surveys*, 28(2), 344-375. <https://doi.org/10.1111/joes.12012>

Se  $|\varphi_{i,j}(a,b)| \ll |\varrho_{i,j}(a,b)|$ , então o comovimento entre  $X_i$  e  $X_j$  é explicado, em grande parte, pelas demais séries do sistema.

Um exemplo que ilustra as diferenças entre os resultados obtidos pelas Equações (14) e (16) é a coerência entre o índice de retornos do setor bancário ( $XLF$ ) e o índice de retornos do S&P 500. A Figura 3 mostra, à esquerda, a coerência entre essas séries, para retornos diários obtidos de 01/01/2005 a 01/01/2025. Já à direita, a coerência entre estas mesmas séries, agora condicionada ao VIX (*CBOE Volatility Index*), medida de incerteza do mercado dada pela expectativa de volatilidade futura do S&P 500, baseada em preços de opções.

**Figura 3.** Exemplo de diferenças entre  $\varphi$  e  $\varrho$



Fonte: elaboração própria.

No lado esquerdo da Figura 3, há forte intensidade da coerência entre estas séries, especialmente em momentos de crise (pandemia da Covid-19, em 2020, e a crise bancária norte-americana, em 2023), indicando o faseamento ( $\rightarrow$ ) e o comovimento entre elas, especialmente no curto e médio prazo. Contudo, quando condicionada ao VIX (medida de incerteza global) a coerência cai drasticamente, desaparecendo muitas das regiões de coerência no gráfico à direita, indicando que a comovimentação é induzida por choques de volatilidade global, e não por conexões diretas entre os índices.

Ainda na Figura 3, destacam-se dois tipos de contornos: o que se assemelha a uma letra “U”, chamado *cone de influência*, dentro do qual as cores estão mais fortes, e o segundo, em preto, delimitando regiões que representam grandes intensidades de coerência.

Ao realizar a transformada contínua de ondaletas, há sobreposições de janelas temporais dos coeficientes nas escalas. Assim, a versão discreta precisa considerar essa sobreposição (*maximal overlap*), gerando ciclicidade na sequência finita de dados. Pode-se fazer isso ao completar a série com zeros, calcular a transformada de ondaleta e, depois, removê-los.

Entretanto, completar com zeros produz descontinuidades nos extremos, diminuindo a janela temporal nas escalas maiores, onde mais zeros são inseridos. O cone de influência é a região onde os efeitos de borda tornam-se importantes, para além dos quais perde-se a confiabilidade dos coeficientes obtidos pela transformada.

Já as regiões dentro dos contornos pretos representam locais em que a coerência possui significância estatística (neste caso, a 5%), e não são provenientes de ruídos. Para mais detalhes sobre significância da coerência, sugere-se Liu et al. (2007) ou Torrence e Compo (1998).

Dentre as diversas famílias de ondaletas contínuas, duas serão usadas neste trabalho: as Derivadas da Gaussiana [*DoG*, do inglês *Derivatives of a Gaussian*] e a ondaleta de Morlet. As ondaletas *DoG* são reais, simétricas e possuem máxima localização temporal, sendo usadas em detecção de rupturas estruturais, saltos e choques financeiros (Caoile, 2016). Por isso, serão usadas nas séries de retornos, localizando os instantes de início e término de crises.

Já a ondaleta de Morlet é bastante usada por apresentar vantagens em relação às demais: (i) não é ortogonal, permitindo que o espectro tenha variações suaves e contínuas; (ii) possui espectro complexo, sendo possível extrair informações sobre a diferença de fases; (iii) apresenta combinação ideal de resolução no tempo e frequência, pois possui frequência central  $\omega_0 = 6$  o que, substituindo na Equação (10), resulta  $f_a \approx \frac{1}{1,03a}$  e  $T_a \approx 1,03a$ , i.e., escala e períodos bastante próximos. Isso torna comum usar Morlet em Finanças e Economia (Razi et al., 2025).

#### 4. Dependência direcional e inferência causal via cópulas

Segundo Junker et al. (2021), uma característica predominante das medidas de dependência estatística é a simetria, i.e.,  $m(X, Y) = m(Y, X)$ , implicando que  $X$  é dependente de  $Y$  da mesma forma que  $Y$  depende de  $X$ . Os autores argumentam que considerar apenas medidas simétricas pode levar a avaliações de risco equivocadas. Ainda, medir conexões entre nós em redes usando escalares como os coeficientes de Pearson, Spearman ou Kendall pode dificultar a inferência causal.

Segundo os axiomas de Rényi (Rényi, 1959), uma medida dependência bivariada deve ser simétrica. Contudo, Trutschnig (2011) já havia destacado que distribuições bivariadas podem ser fortemente assimétricas e, portanto, boas medidas devem ser capazes de detectar essa assimetria. Nesse contexto, os autores propuseram a medida de dependência direcional  $\xi$ , que satisfaz: (i)  $\xi(X, Y) \in [0, 1]$ ; (ii)  $\xi(X, Y) \neq \xi(Y, X)$  (assimetria); (iii)  $\xi(X, Y) = 0 \leftrightarrow X \perp Y$  (independência); (iv)  $\xi(X, Y) = 1 \leftrightarrow Y = f(X)$  (dependência

completa), e; (v) se  $T, S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são estritamente monótonas,  $\xi(T(X), S(Y)) = \xi(X, Y)$  (invariância de escala).

Essa medida é construída das distribuições condicionais da cópula  $C$  associada às variáveis  $X$  e  $Y$ , e é definida em função da distância de  $C$  até  $\Pi$ , que representa a independência:

$$\xi(X, Y) = \xi(C) = 3 \iint_0^1 |K_C(x, [0, y]) - y| d\lambda(x) d\lambda(y) \quad (17)$$

A partir dessa definição, obtém-se o coeficiente de assimetria de dependência:

$$\alpha(X, Y) = \alpha(C) = \xi(C) - \xi(C^t) \in [-1, 1] \quad (18)$$

em que  $C^t$  denota a transposta de  $C$ , i.e.,  $C^t(x, y) = C(y, x)$ .

Conforme destacado pelos autores, esta medida busca quantificar se “conhecer  $X$ , em média, aumenta a previsibilidade de  $Y$  mais do que o inverso” (Junker et al., 2021, p.4). Nesse trabalho, ainda se apresentam formas fechadas de  $\xi$  para algumas famílias de cópulas, bem como um estimador eficiente para obtê-la dado um conjunto de microdados.

Se, por um lado, o coeficiente de assimetria de dependência auxilia a mensurar a intensidade e direção da dependência entre nós em redes (expurgando o efeito da simetria), por outro, seu uso para inferência causal ainda apresenta limitações.

Modelos estatísticos de causalidade frequentemente utilizam grafos acíclicos direcionados (redes bayesianas). Kiiiveri et al. (1984) investigaram a relação entre inferência causal e independência condicional nessas redes, concluindo que, se  $X$  afeta  $Y$  de forma não-causal, isso ocorre devido à presença de um conjunto  $Z$  de variáveis que são causas diretas de  $Y$ . Assim, mantendo  $Z$  constante, nenhuma variação de  $X$  implicará variação em  $Y$ , caracterizando a independência entre  $X$  e  $Y$ , condicionada à  $Z$ .

Ademais, os autores mostraram que toda densidade de probabilidade conjunta associada a uma relação causal admite uma fatoração determinada pela estrutura da rede. Por exemplo, considerando a rede  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ , a densidade conjunta satisfaz:

$$f(x, y, z) = f(x) \cdot f(y|x) \cdot f(z|y) \quad (19)$$

e, portanto, as restrições de independência condicional emergem naturalmente dessa fatoração.

A análise causal via redes bayesianas, portanto, requer uma ordenação topológica dos nós, em que a direção das relações é dada pela fatoração da densidade de probabilidade conjunta em densidades marginais condicionais (Fonseca & Carvalho, 2025).

Nesse sentido, Czado (2025) discutiu o uso de *vine copulas* na construção de modelos de inferência causal. Considerando um grafo com  $d$  nós  $\{X_1, X_2, \dots, X_d\}$  representando variáveis aleatórias, a densidade conjunta é dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^d f(x_j | \pi(X_j) = \pi(x_j)) \quad (20)$$

em que  $f(x_j | \cdot)$  são distribuições condicionais,  $\pi(X_j)$  é o conjunto de nós com arestas direcionadas para  $X_j$ , i.e.,  $\pi(X_j) = \{X_i: X_i \rightarrow X_j\}$ , e  $\pi(x_j)$  denota o conjunto de valores observados.

Ainda, a suposição padrão da Equação (20) é a normalidade conjunta, o que conduz à classe dos modelos de equações estruturais lineares. A proposta é aumentar a flexibilidade desses modelos ao representar as distribuições condicionais por meio de *vine copulas*, o que permite ajustar redes bayesianas a modelos mais gerais (não-lineares) baseados em cópulas.

O modelo proposto é:

$$f(x_j | \pi(X_j) = \pi(x_j)) = \left[ \prod_{s=2}^{n_i} c_{i,s|1:s-1} \right] \cdot c_{i1} \cdot f_i(x_i) \quad (21)$$

Essa formulação constrói uma fatoração para a Equação (20) usando *D-vine copulas*.

Um caso de interesse ocorre quando  $c$  é a cópula  $\Pi$ : dizer que  $c(X, Y|Z)$  é a cópula independente significa que  $X$  é exógeno a  $Z$  e, portanto,  $Y$  pode ser parcialmente explicado por  $Z$ . O conjunto  $\{Z\}$  contém variáveis explicativas de  $Y$  que independem de  $X$ . Assim, a metodologia proposta pode ser estruturada na seguinte sequência de etapas:

- 1) Constrói-se uma *vine copula* para representar a dependência entre as variáveis  $X_i$ ;
- 2) Para cada par  $(i, j|D)$  estima-se a cópula condicional  $c_{i,j|D}$ ;
- 3) Usa-se a estrutura hierárquica para verificar independência condicional:  $X_i \perp X_j|D$ ;
- 4) Com base nas independências verificadas, reconstrói-se o grafo acíclico causal;
- 5) Comparam-se os ajustes dos modelos  $X \rightarrow Y$  e  $Y \rightarrow X$  via critérios de informação.

A direção com melhor ajuste é a mais plausível causalmente, uma vez que, quando a densidade é fatorável segundo um grafo acíclico direcionado, a estrutura de cópulas é consistente com o grafo causal verdadeiro. Assim, as *vine copulas* fornecem uma representação causal não linear da distribuição conjunta, sem depender das suposições da normalidade ou linearidade.

No presente trabalho, combinamos esses modelos e técnicas para identificar, localizar, quantificar e inferir causalidade sobre contágios financeiros em períodos de crise, a partir de séries temporais de índices setoriais de retornos. Os passos dessa combinação metodológica são descritos e executados na próxima seção.

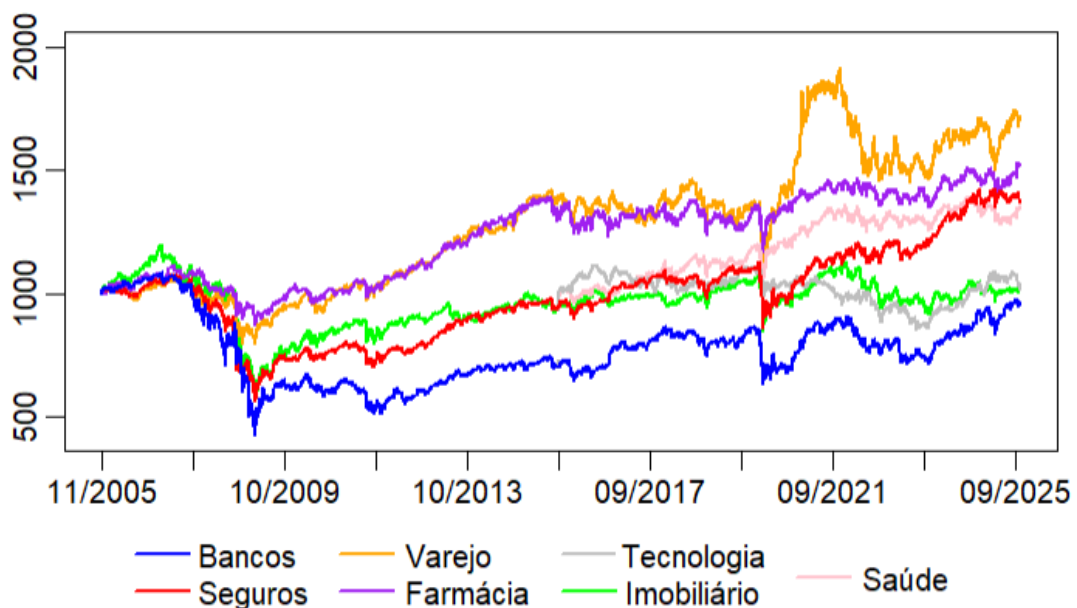
## 5. Aplicação empírica e discussões

### 5.1. Resultados empíricos

Como exemplificação da metodologia proposta, investigamos o contágio entre duas indústrias relevantes na economia de diversos países: bancária e securitária. Para isso, utilizamos séries temporais de índices setoriais Dow Jones, comumente empregados como indicadores de comovimentos no mercado norte-americano. A amostra é formada pelos log-retornos diários obtidos de 01/11/2005 a 28/10/2025, totalizando 5.032 observações referentes aos seguintes setores: (1) Seguros, (2) Bancos, (3) Imobiliário, (4) Varejo, (5) Farmácia, (6) Saúde e (7) Tecnologia.

A Figura 4 mostra o comportamento destas séries, normalizadas em 1000 no início.

**Figura 4.** Evolução dos índices setoriais do mercado norte-americano



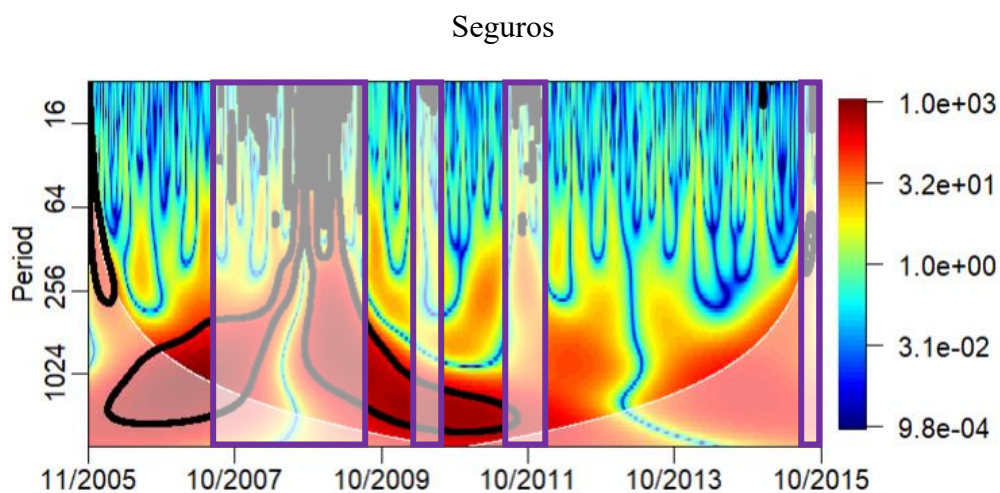
A Figura 4 revela comovimentos marcantes entre as séries, especialmente durante as crises do *subprime* (2007-08), da zona do euro (2011), dos mercados chinês e russo (2015-16), da guerra comercial com a China (2018), da pandemia da Covid-19 (2020-21) e da criptocrise bancária (2023).

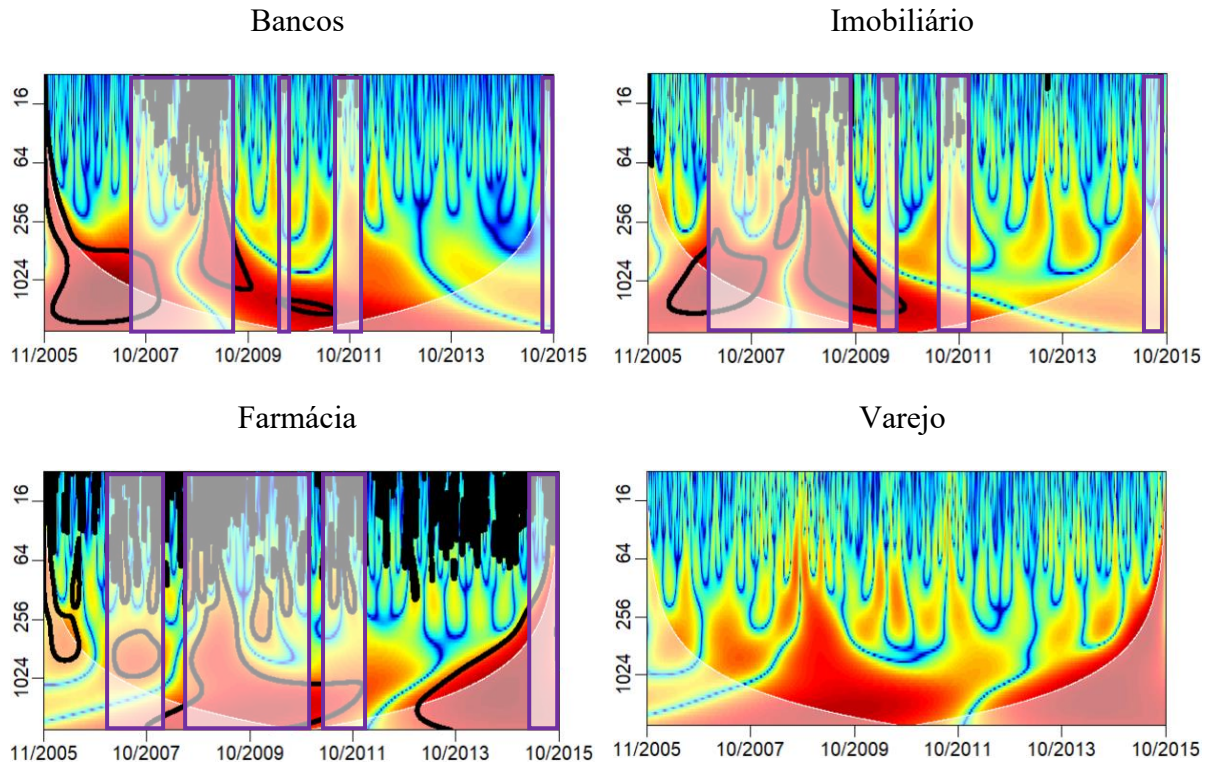
Evidenciam-se ainda tendências comuns entre segmentos como o paralelismo entre os setores bancário, segurador e farmacêutico; o alinhamento, até a crise da Covid-19, entre os setores de seguros e imobiliário; e outro alinhamento, até a pandemia, entre varejo e o setor farmacêutico. Corroborando Yong (2021), observa-se que a crise da Covid-19 alterou diversos padrões de dependência entre riscos.

Devido à complexidade computacional das transformadas ( $\sigma(n(\log n)^2)$ ), dividiu-se a amostra em duas partes: (i) de 01/11/05 a 30/09/15 (2.501 dados), e; (ii) de 01/10/15 a 28/10/25 (2.531 dados). Esta divisão coincide com o início da disponibilização pública dos índices (6) e (7).

Sobre a primeira parte, aplicando a Equação (12) para cada série, usando as ondaletas *DoG*, foi possível mapear instantes de início e fim de algumas crises, observando alta concentração de energia em múltiplas frequências simultaneamente a todas as séries, indicando variações abruptas nos log-retornos, conforme os contornos da Figura 5.

**Figura 5.** Transformada de ondaletas das séries: primeira parte da amostra





Fonte: elaboração própria.

A análise da Figura 5 revela períodos de alta volatilidade em diversos setores, atingindo diversas frequências simultaneamente. O setor farmacêutico, por exemplo, mostra-se muito volátil, tanto no curto prazo (períodos próximos de 64 dias) quanto no longo prazo (períodos próximos a 1.024 dias), sobretudo em momentos de crise. O oposto ocorre no varejo, mais resiliente e menos suscetível a choques abruptos.

Crises financeiras nem sempre afetam todos os segmentos econômicos simultaneamente: podem ter impactos localizados. Observa-se, contudo, comportamento semelhante entre seguros, bancos, imóveis e farmácia: as regiões de alta energia (contornos roxos) são praticamente coincidentes entre eles, com variações marginais (e.g., o setor imobiliário, epicentro do *subprime*, foi afetado antes e por mais tempo).

Esse tipo de análise (baseada na significância conjunta entre periodogramas) é mais eficaz para identificar crises do que critérios *ad-hoc*, frequentemente adotados na literatura. Além disso, permite classificar crises pela duração: (i) curta duração, de 1-3 meses (16-64 dias úteis); (ii) média duração: 3-12 meses (64-256 dias úteis), e; (iii) longa duração: acima de 1 ano (mais de 256 dias úteis).

Aplicando esse critério também à segunda parte da amostra, a Tabela 2 lista os períodos de crise identificados.

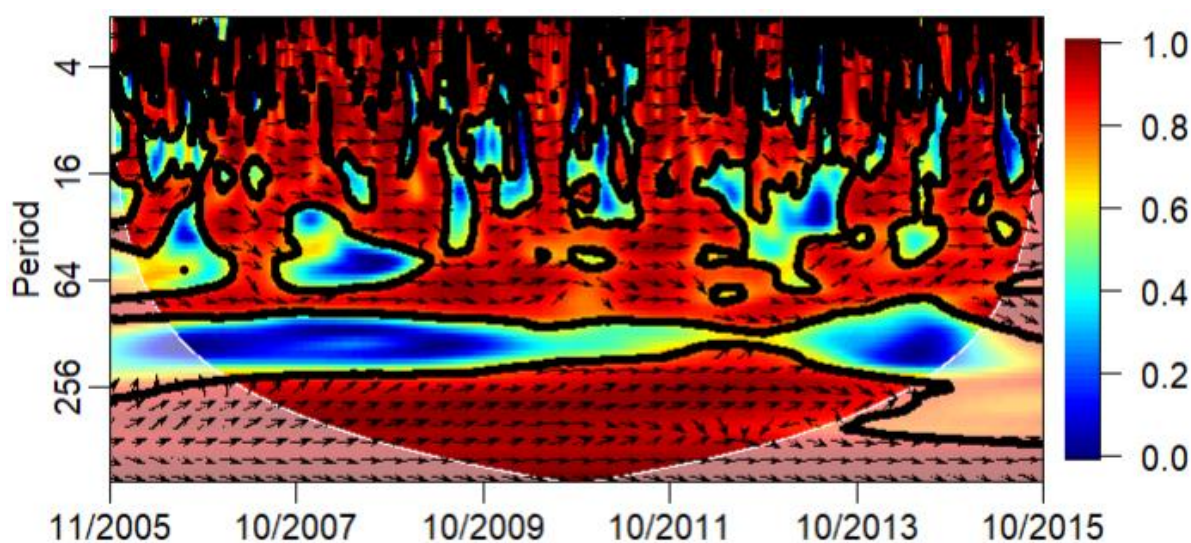
**Tabela 2.** Crises financeiras e sua longevidade

Crise	Longevidade	Início	Fim	Setores impactados
Subprime	Longa	Jul/2007	Jul/2009	(1);(2);(3);(5)
Crise da zona do euro I	Curta	Abr/2010	Jun/2010	(1);(2);(3);(5)
Crise da zona do euro II	Média	Jul/2011	Mar/2012	(1);(2);(3);(5)
Crise no mercado russo	Curta	Jun/2015	Out/2015	(1);(2);(3);(5)
Crise no mercado chinês	Média	Out/2015	Jul/2016	(1);(2);(4);(5);(6);(7)
“Efeito Trump” I	Curta	Set/2016	Out/2016	(1);(3);(4);(5);(6);(7)
Guerra comercial com a China	Média	Mai/2018	Fev/2019	(1);(2);(3);(4);(5);(6);(7)
Crise do mercado de recompra	Longa	Jul/2019	Ago/2020	(1);(2);(3);(4);(6);(7)
Pandemia da Covid-19	Longa	Mar/2020	Fev/2022	(1);(2);(3);(4);(7)
Criptocrise bancária	Média	Jul/2023	Jan/2024	(1);(2);(4);(6)
“Tarifaço” (Efeito Trump II)	Curta	Jan/2025	Ago/2025	(1);(3);(4);(5);(6);(7)

Fonte: elaboração própria.

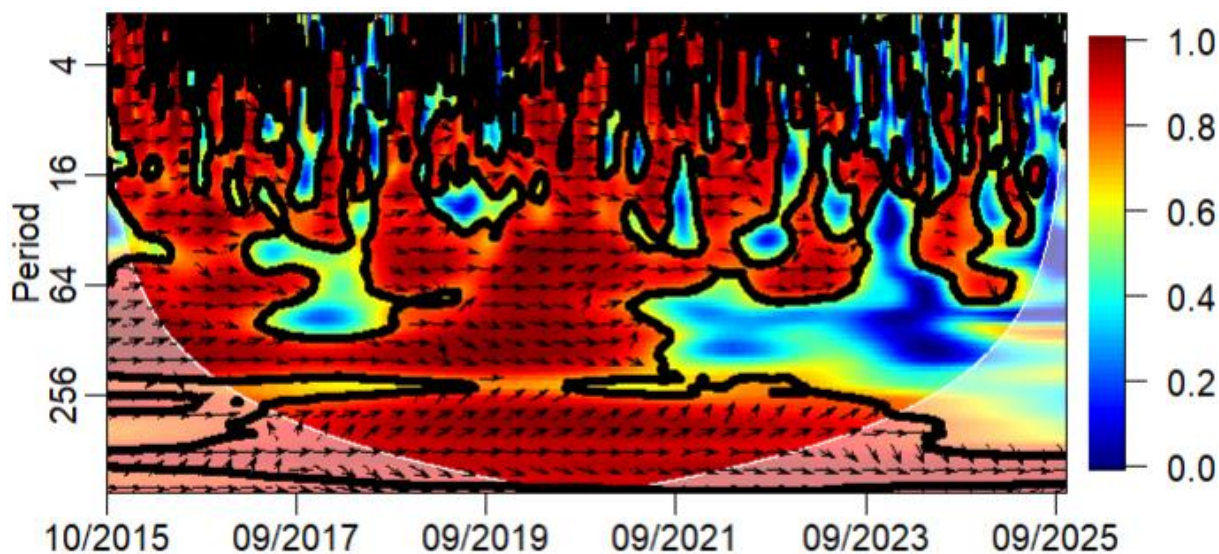
Essas identificações são consistentes com achados prévios (Fonseca & Carvalho, 2025; Longstaff, 2010), agora com a vantagem adicional de mensurar a longevidade e os setores mais afetados por cada crise.

As Figuras 6 e 7 exibem a representação gráfica da coerência (Equação (14)) entre os setores bancário e segurador, respectivamente para 1º e 2º períodos.

**Figura 6.** Coerência entre os índices bancário e segurador (1º período)

Fonte: elaboração própria.

**Figura 7.** Coerência entre os índices bancário e segurador (2º período)



Fonte: elaboração própria.

Pela Figura 6, nota-se predominância de faseamento ( $\rightarrow$ ) entre os índices, tanto no curto quanto no médio e longo prazo, indicando forte dependência positiva. Alternadamente, o setor de seguros lidera ( $\nearrow$ ), ou o setor de bancos ( $\searrow$ ). Após a Covid-19, observa-se ausência de comovimento de longo prazo, sinalizando mudança estrutural no padrão de dependência.

Durante as crises do *subprime* e da Covid-19, a liderança da indústria de seguros no longo prazo pode indicar que esse setor propaga choques, enquanto o bancário os absorve. Para verificar se o faseamento decorre de fatores exógenos, aplicou-se a coerência parcial múltipla de ondaletas, condicionando os demais setores.

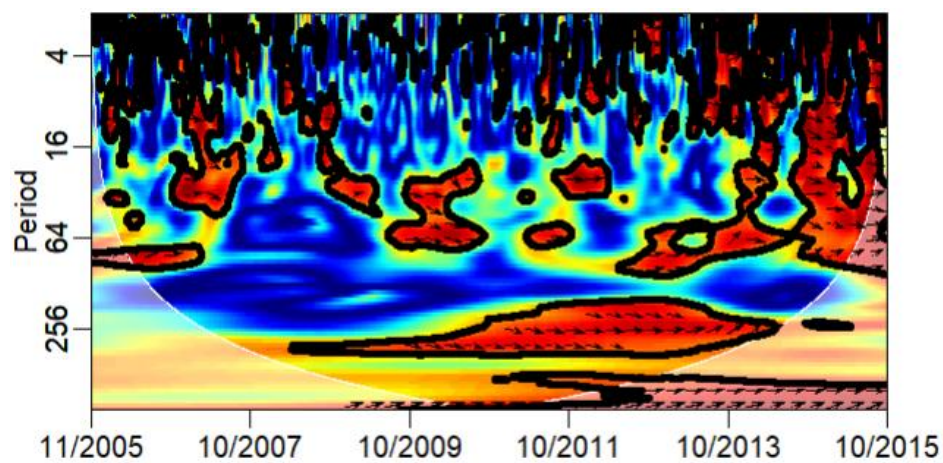
As Figuras 8 e 9 apresentam a coerência parcial entre estes mesmos setores em cada uma das divisões da amostra, porém condicionadas a cada uma das demais séries, “expurgando” o efeito da influência destas outras séries na dependência entre bancos e seguradoras.

A Figura 8 revela que, ao condicionar a coerência entre bancos e seguradoras pelo setor imobiliário, parte desta coerência deixa de ser significativa, implicando que o comovimento bancário-segurador é, nesse caso, mediado por choques imobiliários – coerente com a origem da crise do *subprime* (títulos e obrigações hipotecárias).

Os setores varejo e farmacêutico também reduzem a intensidade dos comovimentos entre os índices segurador e bancário, particularmente nas baixas frequências, caracterizando a dependência de longo prazo. Outro ponto relevante é o predomínio de influência do setor bancário no segurador ( $\searrow$ ), indicando que, no médio e no longo prazo, o setor bancário é potencial propagador de choques ao setor de seguros, e não o contrário.

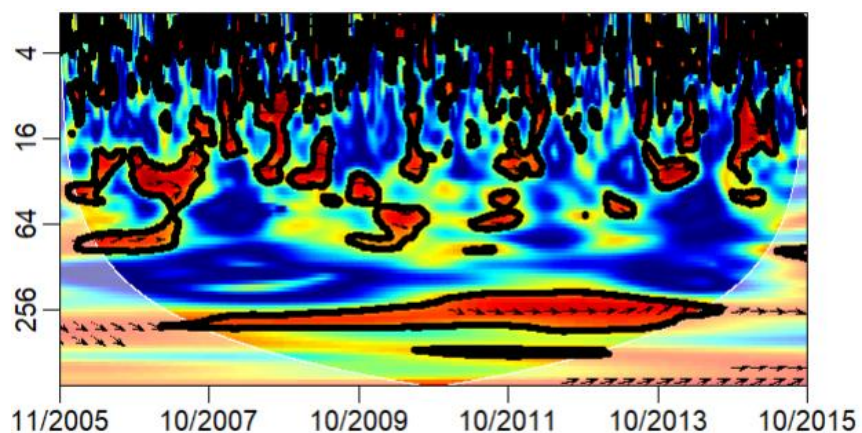
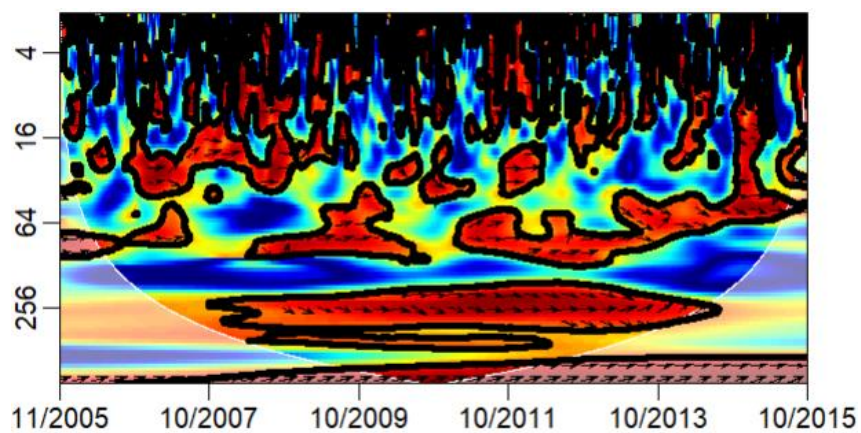
**Figura 8.** Coerência parcial entre os índices bancário e segurador (1º período)

*Imobiliário*



*Farmacêutico*

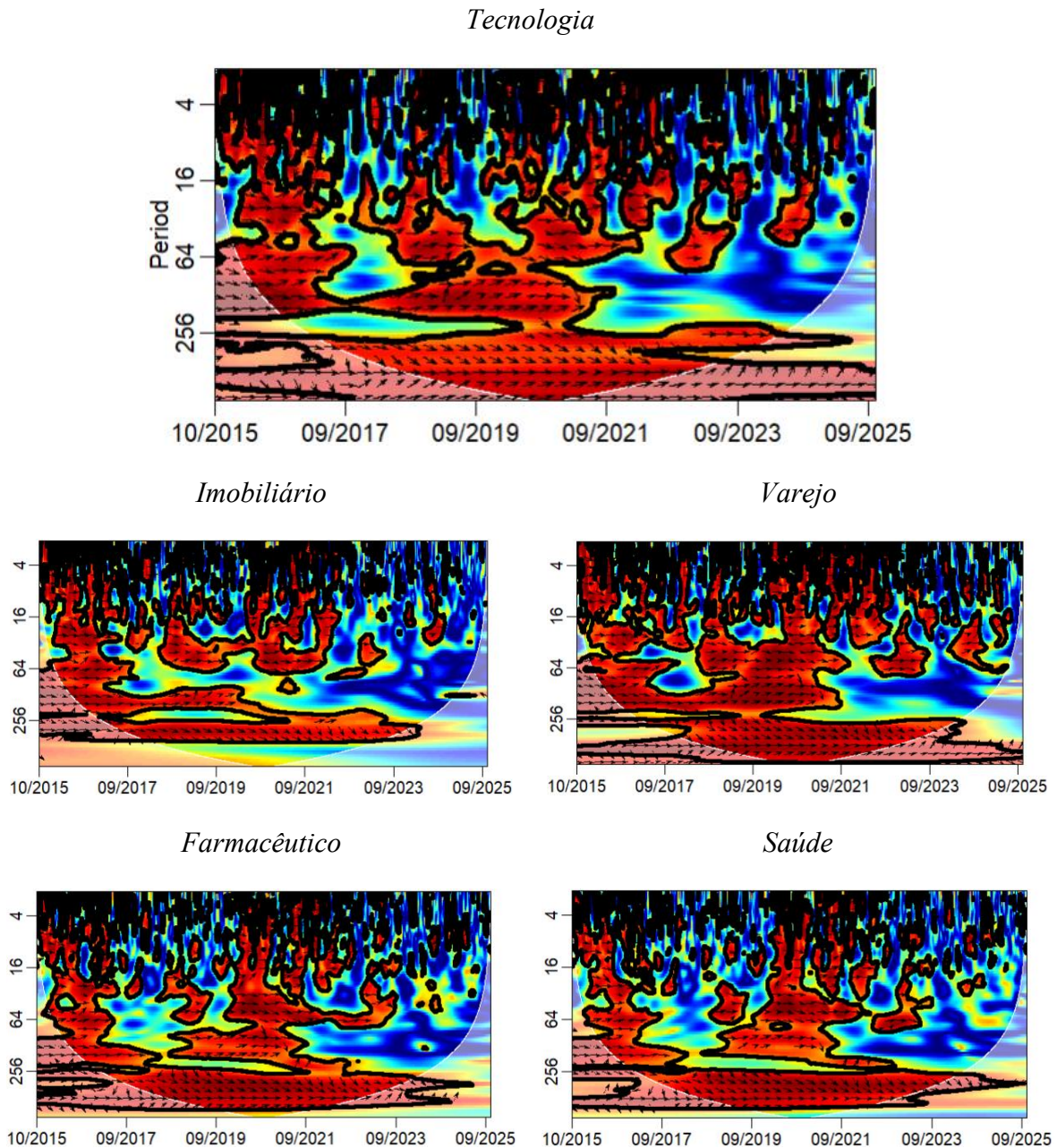
*Varejo*



Fonte: elaboração própria.

Já a Figura 9 confirma essa tendência de reversão apresentada na Figura 8, reforçando que os movimentos bancários antecedem os seguradores em momentos de crise severa (e.g., Covid-19), tanto no médio como no longo prazo.

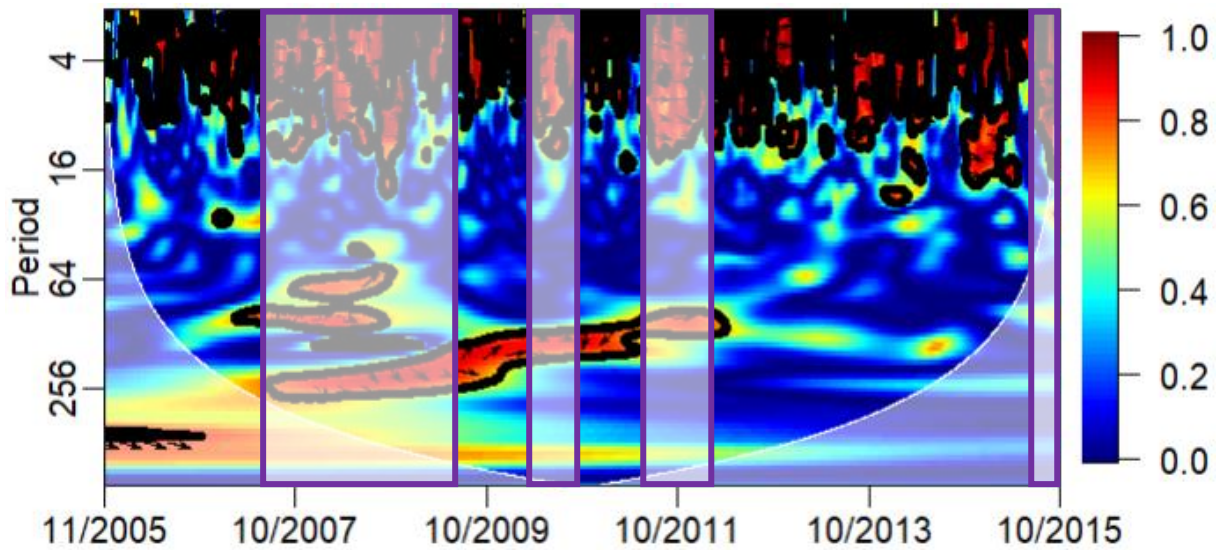
**Figura 9.** Coerência parcial entre os índices bancário e segurador (2º período)



Fonte: elaboração própria.

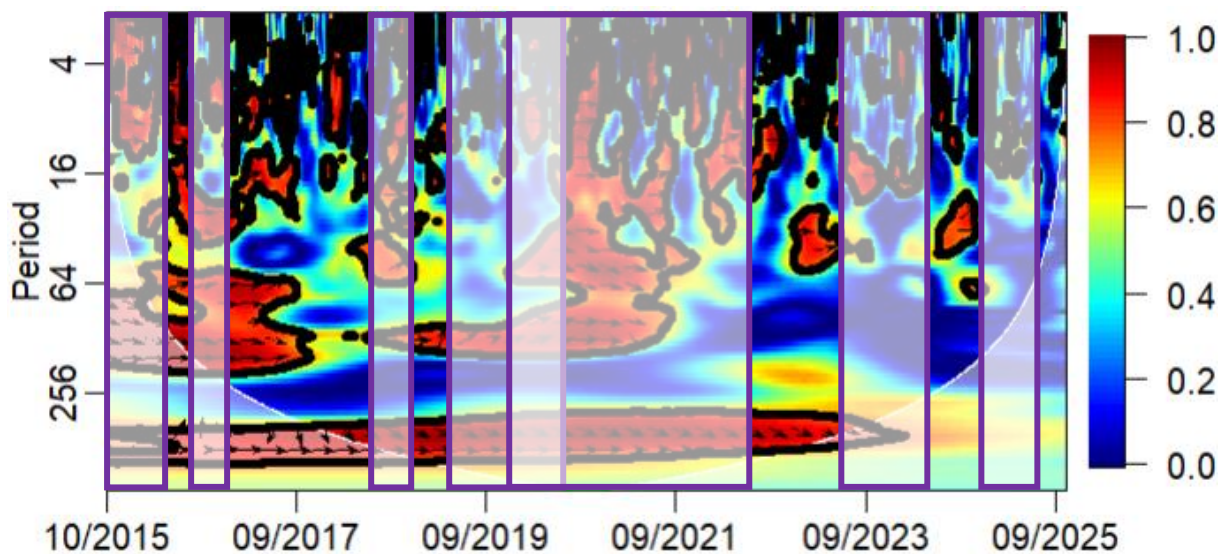
Por fim, as Figuras 10 e 11 mostram a coerência parcial múltipla entre os setores de seguros e bancos, condicionadas a todos os demais setores analisados (Equação (16)). Também são destacados os instantes atribuídos a alguma crise, segundo a Tabela 2.

**Figura 10.** Coerência parcial múltipla entre os índices bancário e segurador (1º período)



Fonte: elaboração própria.

**Figura 11.** Coerência parcial múltipla entre os índices bancário e segurador (2º período)



Fonte: elaboração própria.

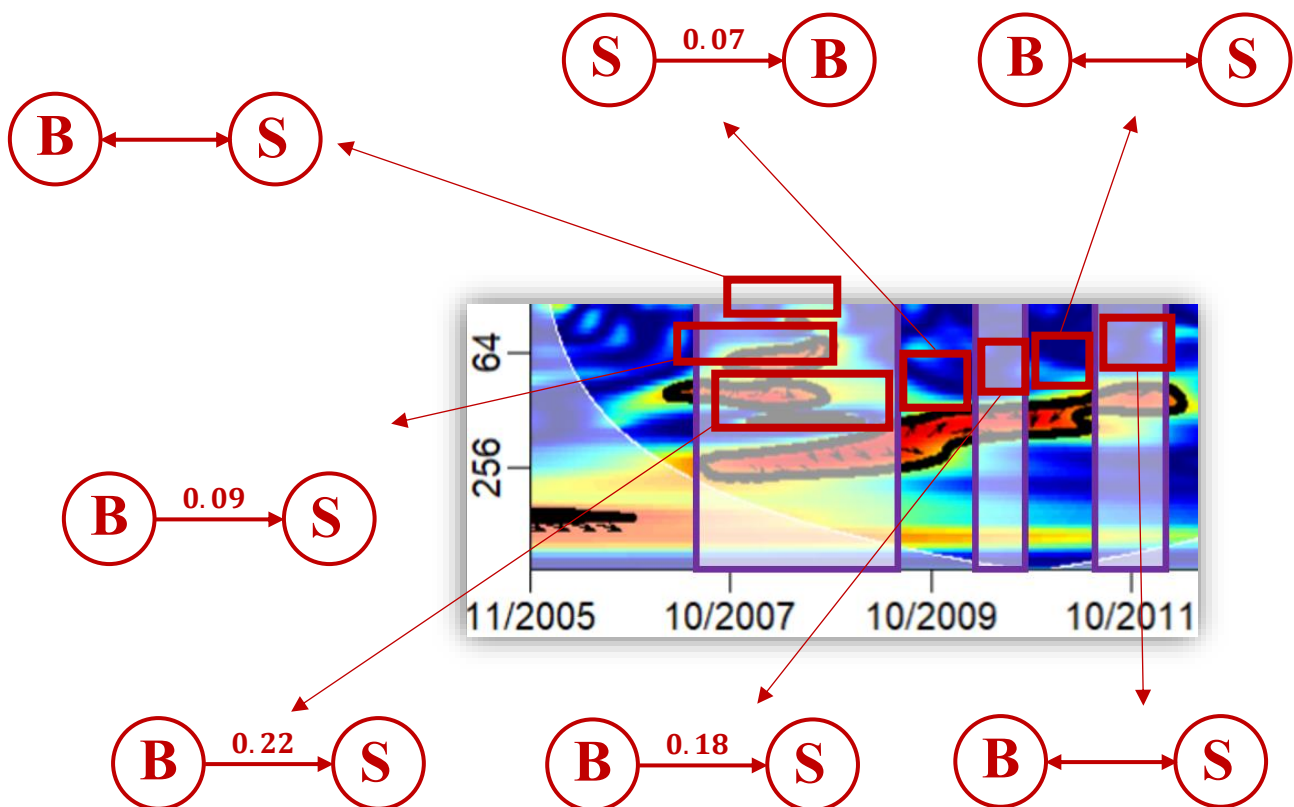
Quando expurgados os efeitos dos demais setores econômicos, a Figura 10 revela que, durante crises, a liderança no médio e longo prazo é do setor bancário ( $\searrow$ ) e positiva, indicando que este setor tende a propagar os efeitos das crises para o setor segurador. Ainda no longo prazo, em momentos de tranquilidade, o setor segurador lidera, com dependência ora positiva ( $\nearrow$ ), ora negativa ( $\swarrow$ ). No curto prazo, os resultados são difusos, ainda que prepondera faseamento (indicando que algum outro setor pode estar influenciando ambos), ou liderança bancária.

A Figura 11 acrescenta que: (i) o setor bancário lidera o segurador ( $\searrow$ ) no longo prazo, independentemente do regime; (ii) durante a Covid-19, no curto e médio prazo manteve-se a tendência de faseamento entre as séries ( $\rightarrow$ ), indicando a dependência positiva entre elas, e; (iii) durante a criptocrise bancária (2023), onde houve a falência de diversos bancos regionais nos EUA, e durante a crise do “tarifaço” (2025), a dependência passou a se concentrar no curto prazo, refletindo instabilidade elevada.

Uma vez identificada a defasagem entre as séries, para cada janela espectral (tempo  $\times$  frequência) aplicou-se o método de Czado (2025), construindo *vine copulas* para inferir sobre a causalidade da defasagem. O coeficiente de assimetria de dependência (Equação 18) quantifica a intensidade do contágio.

A Figura 12 mostra parte da Figura 10, destacando o grafo associado à *vine copula* correspondente, com a respectiva direção causal e intensidade.

**Figura 12.** Representação causal indicativa de contágio (1º período)



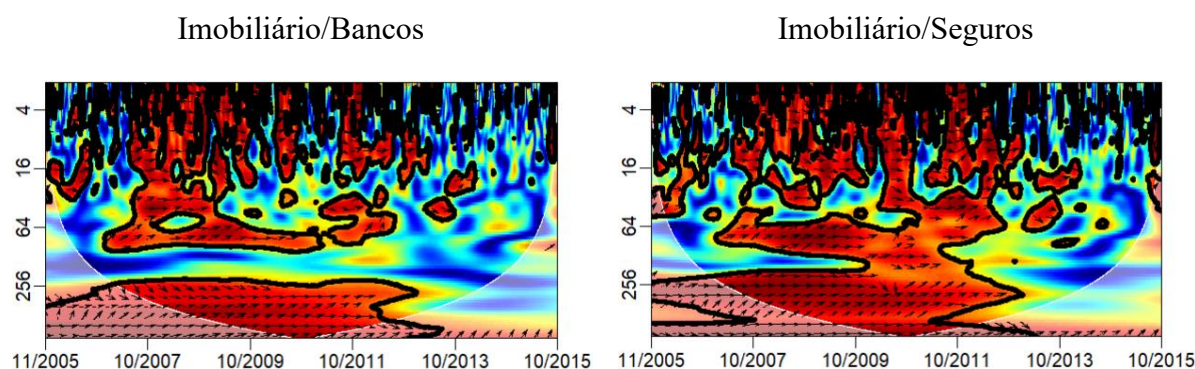
Fonte: elaboração própria.

No 2º período, apenas defasagens associadas a baixas e médias frequências (curto e longo prazos) apresentaram relações causais significativas – especialmente durante crises prolongadas.

Esses resultados sugerem que o setor bancário é, majoritariamente, o propagador de choques ao segurador, com intensidade de contágio crescente em momentos de crise. Quando as séries estão faseadas, porém, não há evidências robusta de causalidade, possivelmente devido à influência de choques exógenos.

Para exemplificar esta afirmação, considere o faseamento da Figura 6, durante a crise do *subprime*. Como esta crise se originou no setor imobiliário, esta pode ser uma variável exógena que interfere nos comovimentos dos índices bancário e segurador. Observando a Figura 13, nota-se a coerência entre os setores bancário e imobiliário (à esquerda), bem como a coerência entre os setores segurador e imobiliário (à direita). Em ambos, nota-se um predomínio de liderança do setor imobiliário em relação a essas séries ( $\nearrow$ ), indicando que este segmento pode ser o fator exógeno que causa a comovimentação entre bancos e seguradoras.

**Figura 13.** Coerência entre os segmentos imobiliário, bancário e segurador



Fonte: elaboração própria.

## 5.2. Discussões sobre os resultados

Os resultados empíricos mostram que, no curto e médio prazo, bancos e seguradoras tendem a se mover conjuntamente, com dependência positiva, sem propagação causal direta. Já no longo prazo, o setor bancário antecede o segurador, disseminando choques durante crises.

Estes achados corroboram Fonseca e Carvalho (2025) e estudos anteriores, reforçando que os bancos atuam como vetores de contágio para a indústria de seguros em crises severas, enquanto, em períodos normais, ambos se movem de forma coordenada e estável.

Uma contribuição adicional deste estudo é a segmentação temporal do contágio (i.e., curto, médio e longo prazo), revelando que o risco de propagação aumenta com a duração da crise. Crises curtas tendem a gerar choques localizados e de menor magnitude. Outra inovação é a mensuração da intensidade de contágio por meio de uma medida assimétrica, que evita a superestimação causada por medidas tradicionais simétricas. A Figura 12 ilustra que

antecedência de fase não implica, necessariamente, causalidade, sendo essencial verificar independência condicional por *vine copulas*.

A Tabela 3 resume as principais diferenças metodológicas.

**Tabela 3.** Comparação entre metodologias de contágio financeiro

	<b>Dependência assimétrica</b>	<b>Redes bayesianas dinâmicas</b>	<b>Coerência parcial via ondaletas</b>	<b>Vine copulas</b>	<b>Metodologia deste trabalho</b>
Avalia contágio de forma dinâmica?		✓	✓		✓
Segregado em horizontes temporais?			✓		✓
É possível estabelecer direção causal?		✓		✓	✓
Intensidade expurgada de simetria?	✓				✓

Fonte: elaboração própria.

Por fim, destacam-se duas implicações práticas relevantes: (i) para gestão de riscos de seguradoras, a metodologia permite antever comovimentos e preparar respostas antes da propagação de crises, funcionando como uma “linha de defesa” para seguradoras, e; (ii) outro uso é na formação de portfólios de investimentos: afinal, ao identificar ativos antifaseados durante crises, é possível construir portfólios mais eficientes, minimizando correlações excessivas e perdas simultâneas.

## 6. Considerações finais

O contágio financeiro ocorre quando choques originados em um setor econômico se propagam para outros setores ou países (Atasoy et al., 2024 ; Forbes & Rigobon, 2002). Durante crises financeiras, a intensidade desses choques tende a se amplificar, aumentando o risco de contágio ao longo do tempo (Atasoy & Özkan, 2024).

Medições precisas de contágio fornecem indicadores capazes de sinalizar a propagação de crises, auxiliando governos, reguladores e gestores a identificar vetores de transmissão e instituições absorventes, funcionando como uma primeira linha de defesa contra a disseminação de choques (Allen & Walther, 2021; Rigana et al., 2023).

Tradicionalmente, o risco de contágio entre mercados financeiros é avaliado por correlações lineares entre índices de retornos, identificando “correlações anormais” em relação a períodos de estabilidade (J. Li et al., 2022). Contudo, essa abordagem apresenta limitações: (i) a correlação linear é simétrica, indicando a intensidade, mas não a direção da propagação, dificultando distinguir entre setores propagadores e absorventes (Escanciano & Hualde, 2021), e; (ii) não possibilita mensurar prospectivamente o risco de contágio, reduzindo sua utilidade em políticas preventivas (Edirisinghe et al., 2015).

A literatura recente tem avançado para métodos baseados em redes (Amini, 2023; Fonseca & Carvalho, 2025; Yu & Zhao, 2020), e modelos causais não lineares, com destaque para o uso de *vine copulas* (Czado, 2025) e medidas de dependência assimétricas (Junker et al., 2021), que atribuem direção à estrutura de dependência.

O avanço metodológico deste trabalho consistiu em combinar essas técnicas com a coerência parcial múltipla de ondaletas (Hu & Si, 2021), permitindo analisar simultaneamente os comovimentos nos domínios do tempo e da frequência, no curto, médio e longo prazo. Isso foi realizado por meio da diferença de fases, determinando quando e em quais frequências uma série antecede/sucedee a outra (Barnes et al., 2024). Embora a antecedência temporal seja condição necessária para caracterizar contágio, ela não é suficiente (Yarovaya et al., 2022).

Assim, a coerência parcial constitui o primeiro estágio na detecção de potenciais eventos de contágios financeiros, fornecendo sua localização espectral. Em seguida, para cada situação potencial, aplicou-se a representação causal via *vine copulas*, que permitiu avaliar se a antecedência observada possui relação causal-temporal. Quando a causalidade foi confirmada, a intensidade do contágio foi mensurada pelo coeficiente de assimetria de dependência, o qual capta relações direcionais, excluindo efeitos simétricos.

Essa metodologia foi aplicada à dinâmica do risco de contágio entre os setores bancário e segurador, condicionando-se outros segmentos econômicos relevantes: imobiliário, farmacêutico, varejista, tecnológico e de saúde. A intenção foi eliminar influências indiretas destes segmentos na mensuração do risco de contágio entre bancos e seguradoras.

O risco de contágio foi avaliado com base nos índices setoriais Dow Jones do mercado norte-americano, considerando log-retornos diários de 01/11/2005 a 28/10/2025. Antes da aplicação da metodologia proposta, a transformada de ondaletas foi empregada em cada série para identificar períodos de crise e de estabilidade.

Os resultados evidenciaram que bancos e seguradoras estão conectados, mas de forma heterogênea em intensidade, duração e direção. No longo prazo, há uma dependência positiva estrutural entre os setores, sem que uma série anteceda a outra – condição necessária para caracterizar contágio. Contudo, em períodos de crise, o setor bancário tende a liderar o segurador, indicando propagação de choques, confirmada pela análise causal via *vine copulas*.

Além disso, verificou-se que quanto maior a duração da crise, maior é o risco de contágio e a intensidade de propagação dos choques. Crises de curta duração, ainda que o setor bancário lidere, não geram tempo suficiente para que o setor absorvente (seguros) sinta integralmente os efeitos, sugerindo a existência de defasagens temporais na transmissão dos choques. Já as dependências de curto prazo decorrem de riscos operacionais e de mercado comuns, e são geralmente bidirecionais, refletindo choques exógenos compartilhados, mais do que contágio genuíno.

Assim, o presente trabalho avança metodologicamente na robustez e precisão da avaliação do contágio financeiro, superando abordagens tradicionais em diversos aspectos: (i) avaliação da dinâmica temporal do contágio; (ii) estratificação por múltiplos horizontes temporais; (iii) geração de sinais antecipados (“*early warnings*”) baseados em comovimentos setoriais; (iv) inferência causal a partir da antecendência entre séries e; (v) mensuração da intensidade e direção do contágio.

Estes achados podem atingir a vários interessados: (i) analistas de risco em seguradoras e bancos, ao fornecer subsídios para reforçar a resiliência institucional durante crises, mitigando a propagação entre setores interligados; (ii) órgãos reguladores e formuladores de política econômica, ao permitir a mensuração precisa das conexões intersetoriais, identificando quais segmentos atuam como propagadores ou absorventes de choques – elemento essencial no monitoramento do risco sistêmico.

Além destes, (iii) investidores e gestores de portfólio também podem se beneficiar, ao possibilitar a seleção de ativos com correlação negativa ou defasagem temporal nos choques, construindo estratégias de hedge mais eficazes em períodos de crise. Por fim, (iv) gestores de

risco corporativo e decisores estratégicos, ao mapear a influência de diferentes setores sobre o de atuação, compreendendo a natureza e o horizonte dessa influência.

Entre as limitações deste trabalho, destaca-se o elevado custo computacional da estimação de coerências com dados de alta frequência (intradiários), o que dificulta análises longitudinais em grandes horizontes temporais. Além disso, a necessidade de gerar múltiplas *vine copulas* para inferir causalidade temporal pode tornar o processo oneroso quando há muitas relações potenciais de contágio. Por fim, sugere-se aplicar a metodologia em outros contextos, como a identificação de pares de ativos com propriedades de *hedge*, e desenvolver mecanismos preditivos para o risco de contágio, permitindo antecipar choques em instantes futuros e apoiar políticas macroprudenciais.

## 7. Referências

- Abdennadher, E., & Hellara, S. (2018). Causality and contagion in emerging stock markets. *Borsa Istanbul Review*, 18(4), 300–311. <https://doi.org/10.1016/j.bir.2018.07.001>
- Aidoo, A. Y., Botchway, G. A., & Wilson, M. A. S. A. (2022). Application to Medical Image Processing. In F. Bulnes (Ed.), *Recent Advances in Wavelet Transforms and Their Applications* (1st ed., p. 172). IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/intechopen.102819>
- Allen, F., & Walther, A. (2021). Financial architecture and financial stability. *Annual Review of Financial Economics*, 13, 129–151. <https://doi.org/10.1146/annurev-financial-110217-022851>
- Amini, H. (2023). Contagion risks and security investment in directed networks. *Mathematics and Financial Economics*, 17, 247–283. <https://doi.org/10.1007/s11579-023-00336-w>
- Atasoy, B. S., & Özkan, I. (2024). Correlation meets causality: a holistic measure of financial contagion. *Finance Research Letters*, 65, 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2024.105503>
- Atasoy, B. S., Özkan, I., & Erden, L. (2024). The determinants of systemic risk contagion. *Economic Modelling*, 130, 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2023.106596>
- Barnes, S. J. K., Bjerkan, J., Clemson, P. T., Newman, J., & Stefanovska, A. (2024). Phase coherence - a time-localized approach to studying interactions. *Chaos*, 34(7), 1–21. <https://doi.org/10.1063/5.0202865>
- Baur, D. (2012). Financial contagion and the real economy. *Journal of Banking and Finance*, 36(10), 2680–2692. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2011.05.019>

- Bevilacqua, M., Duygun, M., & Vioto, D. (2023). The impact of COVID-19 related policy interventions on international systemic risk. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 89(October), 101859.  
<https://doi.org/10.1016/j.intfin.2023.101859>
- Caccioli, F., Ferrara, G., & Ramadiah, A. (2024). Modelling fire sale contagion across banks and non-banks. *Journal of Financial Stability*, 71, 1–16.  
<https://doi.org/0.1016/j.jfs.2024.101231>
- Caoile, P. D. (2016). Mexican Hat wavelet mathematical formula applied to Business and Economics. *Journal of Economics Library*, 3(3), 466–469.  
<https://doi.org/10.1453/jel.v3i3.987>
- Chong, C., & Klüppelberg, C. (2018). Contagion in financial systems: A Bayesian network approach. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 9(1), 28–53.  
<https://doi.org/10.1137/17M1116659>
- Chung, V., Espinoza, J., & Mansilla, A. (2024). Analysis of financial contagion and prediction of dynamic correlations during the Covid-19 pandemic: a combined DCC-GARCH and Deep Learning approach. *Journal of Risk and Financial Management*, 17(12), 1–15. <https://doi.org/10.3390/jrfm17120567>
- Chunxia, Y., Xueshuai, Z., Luoluo, J., Sen, H., & He, L. (2016). Study on the contagion among American industries. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 444, 601–612. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.10.058>
- Cornaro, A. (2023). Financial resilience of insurance network during Covid-19 pandemic. *Quality and Quantity*, 57(2), 151–172. <https://doi.org/10.1007/s11135-022-01583-7>
- Cummins, J. D., & Weiss, M. A. (2014). Systemic risk and the U.S. insurance sector. *Journal of Risk and Insurance*, 81(3). <https://doi.org/10.1111/jori.12039>
- Czado, C. (2025). Vine copula based structural equation models. *Computational Statistics and Data Analysis*, 203, 1–23. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2024.108076>
- Denkowska, A., & Wanat, S. (2022). Linkages and systemic risk in the European insurance sector: new evidence based on minimum spanning trees. *Risk Management*, 24, 123–136.  
<https://doi.org/10.1057/s41283-021-00087-2>
- Dreassi, A., Miani, S., Paltrinieri, A., & Scip, A. (2018). Bank-Insurance Risk Spillovers: Evidence from Europe. *Geneva Papers on Risk and Insurance: Issues and Practice*,

- 43(1). <https://doi.org/10.1057/s41288-017-0049-0>
- Edirisinghe, C., Gupta, A., & Roth, W. (2015). Risk assessment based on the analysis of the impact of contagion flow. *Journal of Banking and Finance*, *60*, 209–223. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2015.08.015>
- Eichengreen, B., Mody, A., Nedeljkovic, M., & Sarno, L. (2012). How the subprime crisis went global: evidence from bank credit default swap spreads. *Journal of International Money and Finance*, *31*(5), 1299–1318. <https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2012.02.002>
- Embrechts, P., Lindskog, F., & McNeil, A. (2003). Modeling dependence with copulas and applications to risk management. In S. Rachev (Ed.), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance* (pp. 329–394). Rotterdam: Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-044450896-6.50010-8>
- Escanciano, J. C., & Hualde, J. (2021). Measuring asset market linkages: nonlinear dependence and tail risk. *Journal of Business and Economic Statistics*, *39*(2), 453–465. <https://doi.org/10.1080/07350015.2019.1668797>
- Fonseca, N. C., & Carvalho, J. V. F. (2025). Analysis of financial contagion among economic sectors through Dynamic Bayesian Networks. *Expert Systems with Applications*, *260*, 125448. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.125448>
- Forbes, K. J., & Rigobon, R. (2002). No contagion, only interdependence: Measuring stock market comovements. *Journal of Finance*. <https://doi.org/10.1111/0022-1082.00494>
- Fréchet, M. (1951). Sur les tableaux dont les marges et des bornes sont données. *Revue de l'Institut International de Statistique*, *28*(1/2), 10. <https://doi.org/10.2307/1401846>
- Granger, C. W. J. (1969). Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods. *Econometrica*. <https://doi.org/10.2307/1912791>
- Grønneberg, S., & Hjort, N. L. (2014). The Copula Information Criteria. *Scandinavian Journal of Statistics*, *41*(2), 436–459. <https://doi.org/10.1111/sjos.12042>
- Hofert, M., Kojadinovic, I., Mächler, M., & Yan, J. (2018). *Elements of copula modeling with R*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-89635-9>
- Hu, W., & Si, B. (2021). Improved partial wavelet coherency for understanding scale-specific and localized bivariate relationships in geosciences. *Hydrology and Earth System Sciences*, *25*(1), 321–331. <https://doi.org/10.5194/hess-25-321-2021>

- Iwanicz-Drozdowska, Małgorzata Rogowicz, Karol Kurowski, Ł. S., & Paweł. (2021). Two decades of contagion effect on stock markets: which events are more contagious? *Journal of Financial Stability*, 55, 1–23. <https://doi.org/10.1016/j.jfs.2021.100907>
- Jang, H., Kim, J.-M., & Noh, H. (2022). Vine copula Granger causality in mean. *Economic Modelling*, 109, 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2022.105798>
- Joe, H. (2014). *Dependence modeling with copulas* (1st ed.). Chapman and Hall.
- Junker, R., Griessenberger, F., & Trutschning, W. (2021). Estimating scale-invariant directed dependence of bivariate distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, 153, 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2020.107058>
- Kiiveri, H., Speed, T. P., & Carlin, J. B. (1984). Recursive causal models. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 36(1), 30–52. <https://doi.org/10.1017/S1446788700027312>
- Leong, S. H. (2025). Systemic contagion. *Journal of Business and Economic Statistics*, 43(2), 468–481. <https://doi.org/10.1080/07350015.2024.2394580>
- Li, J., Wei, L., & Zhu, X. (2022). Research Review of Bank Risk Aggregation. In *Financial Statements-Based Bank Risk Aggregation* (pp. 11–42). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-19-0408-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-981-19-0408-0_2)
- Li, L., Qin, K., & Wu, D. (2023). A hybrid approach for the assessment of risk spillover to ESG investment in financial networks. *Sustainability*, 15(7), 1–16. <https://doi.org/10.3390/su15076123>
- Li, Y., Zhang, Z., & Niu, T. (2022). Two-way risk spillover of financial and real sectors in the presence of major public emergencies. *Sustainability*, 14(19), 1–20. <https://doi.org/10.3390/su141912571>
- Liu, Y., Liang, S., & Weisberg, R. (2007). Retification of the bias in the wavelet power spectrum. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 24(12), 2093–2102. <https://doi.org/10.1175/2007JTECHO511.1>
- Longstaff, F. A. (2010). The subprime credit crisis and contagion in financial markets. *Journal of Financial Economics*, 97(3), 436–450. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2010.01.002>
- Mohti, W., Dionísio, A., Ferreira, P., & Vieira, I. (2019). Contagion of the subprime financial

- crisis on frontier stock markets: a copula analysis. *Economies*, 7(1), 1–15.  
<https://doi.org/10.3390/economies7010015>
- Morettin, P. A. (2014). *Ondas e ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas de séries temporais* (2nd ed.). Edusp.
- Nason, G. P. (2008). *Wavelet methods in statistics with R* (1st ed.). Springer New York.  
<https://doi.org/10.1007/978-0-387-75961-6>
- Ng, E. W., & Chan, J. C. L. (2012). Geophysical applications of partial wavelet coherence and multiple wavelet coherence. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 29(12), 1845–1853. <https://doi.org/10.1175/JTECH-D-12-00056.1>
- Pearl, J. (2009). *Causality: models, reasoning and inference* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Razi, U., Cheong, C., Afshan, S., & Sharif, A. (2025). The ripple effects of energy price volatility on equity and debt markets: a Morlet wavelet analysis. *Eurasian Economic Review*. <https://doi.org/10.1007/s40822-024-00292-w>
- Rényi, A. (1959). On measures of dependence. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 10, 441–451. <https://doi.org/10.1007/BF02024507>
- Rigana, K., Wit, E.-J. C., & Cook, S. (2023). A new way of measuring effects of financial crisis on contagion in currency markets. *International Review of Financial Analysis*, 90, 1–15. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2023.102764>
- Sahiner, M. (2024). Volatility spillovers and contagion during major crises: an early warning approach based on a Deep Learning model. *Computational Economics*, 63, 2435–2499. <https://doi.org/10.1007/s10614-023-10412-4>
- Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8, 229–231.
- Srbinoski, B., Poposki, K., & Bogdanovski, V. (2024). Interconnectedness of European insurers and cat shocks contagion effects. *Journal of Financial Regulation and Compliance*, 32(3), 379–402. <https://doi.org/10.1108/JFRC-10-2023-0163>
- Torrence, C., & Compo, G. P. (1998). A Practical Guide to Wavelet Analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1), 61–78. [https://doi.org/10.1175/1520-0477\(1998\)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0477(1998)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2)

- Trutschnig, W. (2011). On a strong metric on the space of copulas and its induced dependence measure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 384(2), 690–705. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.06.013>
- Tzomakas, C. (2024). Financial contagion dynamics from the US to the PIIGS amidst the global financial crisis. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 97, 1–10. <https://doi.org/10.1016/J.QREF.2024.101895>
- Weiβ, G. N. F. (2012). Analysing contagion and bailout effects with copulae. *Journal of Economics and Finance*, 36, 1–32. <https://doi.org/10.1007/s12197-009-9099-x>
- Wu, B., & Wang, Q. (2025). Cross-asset contagion and risk transmission in global financial networks. *The North American Journal of Economics and Finance*, 80, 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.najef.2025.102511>
- Wu, J., Zhang, C., & Chen, Y. (2024). Analysis of tail risk contagion among industry sectors in the Chinese stock market during the COVID-19 pandemic. *Pacific-Basin Finance Journal*, 83, 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.pacfin.2024.102266>
- Xu, Q., Yan, H., & Zhao, T. (2022). Contagion effect of systemic risk among industry sectors in China's stock market. *The North American Journal of Economics and Finance*, 59, 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.najef.2021.101576>
- Yarovaya, L., Brzeszczyński, J., Goodell, J. W., Lucey, B., & Lau, C. K. M. (2022). Rethinking financial contagion: information transmission mechanism during the Covid-19 pandemic. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 79, 1–23. <https://doi.org/10.1016/j.intfin.2022.101589>
- Yong, J. (2021). *Vaccinating insurers against pandemics – a review of capital requirements for pandemic risk*.
- Yu, J., & Zhao, J. (2020). Prediction of systemic risk contagion based on a dynamic complex network model using machine learning algorithm. *Complexity*, 1–13. <https://doi.org/10.1155/2020/6035372>
- Zhang, P., Lv, Z.-X., Pei, Z., & Zhao, Y. (2023). Systemic risk spillover of financial institutions in China: a copula CDD-GARCH approach. *Journal of Engineering Research*, 11(2). <https://doi.org/10.1016/j.jer.2023.100078>
- Zhang, R. (2023). 2008 financial crisis: cause and regulatory response. *Highlights in Business, Economics and Management*, 13, 252–257. <https://doi.org/10.54097/hbem.v13i.8828>

Zorgati, I., Lakhali, F., & Zaabi, E. (2019). Financial contagion in the subprime crisis context: a copula approach. *The North American Journal of Economics and Finance*, 47, 269–282. <https://doi.org/10.1016/j.najef.2018.11.014>