O TEOREMAS DAS 4 E 5 CORES

SOUSA, Shamyra Melo

RESUMO

O Teorema das 4 Cores e o Teorema das 5 Cores são resultados notáveis da Teoria dos Grafos e da coloração de mapas. O objetivo geral é um estudo sobre o Teorema das 4 Cores e realizar a demonstração do Teorema das 5 Cores tendo como base a Teoria dos Grafo. A metodologia utilizada é a pesquisa bibliográfica, com aporte de monografias, dissertações e artigos. Resultando em uma sequência dos passos da prova do Teorema das 5 Cores evidenciando-os e representando passos com apoio do software GeoGebra. Concluindo como afirmação que é possível colorir qualquer mapa plano de forma que regiões adjacentes recebam cores distintas, utilizando no máximo 5 cores.

Palavras-chave: Teorema das 5 Cores. Grafos. Demonstração.

I. INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

Qual a quantidade mínima de cores você conseguiria colorir o mapa do Brasil divido pelos estados (desconsiderando o DF) de forma que estados que possuem fronteira não tenham a mesma cor? Será possível pintar este mapa com apenas 3 cores? Ou com 4? Se não, com 5 cores? Este questionamento foi um problema recorrente séculos atrás, em que cartógrafos e matemáticos se depararam ao colorir mapas geográficos de forma que regiões adjacentes (sejam países, estados ou municípios) não tivessem as mesmas cores. Apenas em 1852 essa problemática foi conjecturada por Francis Guthrie, hoje conhecida como Teorema das 4 cores, o qual afirma que com apenas 4 cores é possível pintar qualquer mapa plano em que regiões

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica PIBIC. Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. shamyra.sousa@ufnt.edu.br

adjacentes tenham cores distintas. Kenneth Appel e Wolfgang Haken conseguiram demonstrar o teorema, porém foi necessário o auxílio de programas de computador, o qual levou mais de mil horas para ser finalizado, resumindo todas as combinações possíveis de um mapa.

O Teorema das 5 Cores afirma que com no máximo cinco cor é possível colorir qualquer mapa plano sem que regiões adjacentes compartilhem a mesma cor, o qual foi principal objetivo da pesquisa. As atividades realizadas tem como a relevância a sequência utilizada sendo necessário uma primeira análise da Teoria dos Grafos para posteriormente desenvolver a demonstração do Teorema das 5 cores, assim como realizar as representações de grafos através de software trouxe determinada compreensão para relacionar os grafos com mapas e coloração, além do auxílio para visualizar os passos da demonstração.

II. BASE TEÓRICA

Como materiais de pesquisa principais destaca-se a monografia de Sarah Miranda Barbosa, intitulada "Teoria dos Grafos: Como colorir um mapa?" e a dissertação "O Teorema das 5 Cores" de Almeida e Junior. O projeto seguiu etapas definidas para o avanço da pesquisa, constituídas de atividades sequenciais. Estas etapas estavam estabelecidas em compreender definições, teoremas e lemas da Teoria dos grafos, para poder enfim demonstrar o Teorema das 5 Cores, na qual é utilizado o método Princípio de Indução Matemática.

III. OBJETIVOS

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica PIBIC. Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. shamyra.sousa@ufnt.edu.br

O objetivo geral é desenvolver a demonstração do Teorema das 5 Cores, com base na teoria dos grafos. Sendo os específicos exemplificar os conceitos estudados sobre a Teoria dos Grafos, interpretar a relação de grafos e mapas e coloração, analisar os principais conceitos e técnicas matemáticas utilizados na demonstração do Teorema das 5 Cores, além do uso do software GeoGebra para ilustração de grafos auxiliadores da demonstração.

IV. METODOLOGIA

A metodologia utilizada é a pesquisa bibliográfica**,** com a análise do conteúdo, discussões e atividades. Nas reuniões de orientação eram discutidas as tarefas propostas, com apresentações no quadro, e resumos realizados sobre cada tarefa. Dentre elas demonstrar teoremas da teoria dos grafos e exemplificar definições. O software GeoGebra proporcionou a prática de representação dos grafos.

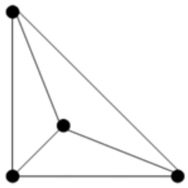
V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As seguintes definições, teoremas e lema estão relacionadas aos estudos realizados sobre a Teoria dos Grafos tomadas como base para o processo demonstração do Teorema das 5 Cores.

Definição 1.0. Grafo é a união do conjunto não vazio V, cujo elementos são vértices, com o conjunto de arestas denominado A, em que seus elementos são subconjuntos de V com cardinalidade dois, de forma simples cada aresta vai estar ligada a dois vértices.

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica PIBIC. Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. shamyra.sousa@ufnt.edu.br

Figura 1 – Representação de um grafo



Fonte: Wikipédia

Definição 1.2. Gafos Planares são grafos que podem ser representados no plano, onde não a cruzamento de arestas, ou seja, as arestas só se encontram nos vértices, o grafo da figura 1 é um grafo planar.

Definição 1.3. A quantidade de aresta que incidem um vértice, é denominado grau $d(v)$ de um vértice v.

Definição 1.4. Definimos como subgrafo de um grafo, o grafo B que tem vértices e arestas que estão contidas no grafo A, dizemos então que B é um subgrafo de A.

Relação de Grafos e coloração de mapa:

A uma interseção entre a Teoria dos grafos e coloração de mapas, na qual colorir um mapa refere-se à coloração do grafo que representa este mapa. Esta relação ocorre de modo que as regiões do mapa passam a ser vértices e as regiões que são adjacentes se tornam arestas ligadas aos vértices.

Definição 1.5. Um grafo é dito $k - colorizável$ se seus vértices podem ser coloridos com k cores de tal forma que vértices adjacentes não possuam a mesma cor.

Lema 1.0 Num grafo planar, há pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5

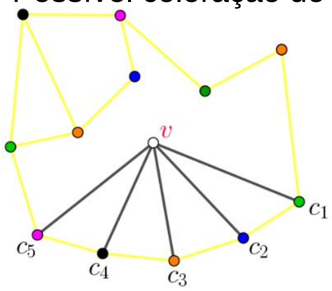
Alguns Passos da Demonstração do Teorema das 5 Cores

Teorema 4.7 (Teorema das Cinco Cores). Todo grafo planar G satisfaz $X(G) \leq 5$. Em outras palavras, o número mínimo de cores para se colorir um grafo (ou mapa) é

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica PIBIC. Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. shamyra.sousa@ufnt.edu.br

sempre menor ou igual a 5**.** O método da demonstração é indução, feita sobre a quantidade de vértices. Para um grafo que tenha 5 ou menos vértices o teorema é obviamente verdadeiro. Temos como hipótese de indução supor que o teorema é válido para n vértices. E iremos provar que o teorema vale também para grafos com $n + 1$ vértices. Seja G um grafo planar com $n + 1$ vértices. Pelo lema 1.0, no grafo há pelo menos um vértice v de grau $d_v \leq 5$. Considere $G'' = G \backslash \{v\}$ um subgrafo de G. Perceba que G'' possui n vértices e também é um grafo planar. Utilizando a hipótese de indução, o grafo G'' é 5-colorizável.

Figura 4 – Possível coloração do grafo G''

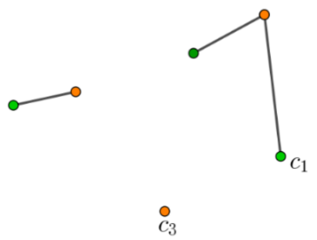


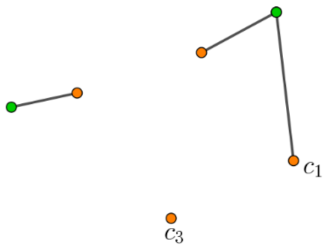
Fonte – Autoria própria

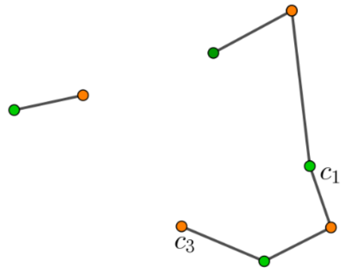
Temos como intenção estende essa coloração ao grafo G, de forma que o vértice v seja colorido adequadamente. No caso em que $dv = 5$, se os 5 vértices adjacentes a v estiverem coloridos com as 5 cores disponíveis não é possível colorir o vértice v. Para coloração do vértice v, delimitamos um subgrafo de G'' que contenha todos os vértices nas cores 1 e 3, $(H_{1,3})$. Se os vértices c_1e c_3 estão em componentes conexas diferentes, ou seja, que não há um caminho entre eles, podemos permutar as cores 1 e 3 da componente que contém o vértice c_1. Assim a cor 1 fica disponível para colorir o vértice v, concluindo a demonstração. Caso contrário, se os vértices c_1e c_3 estiverem na mesma componente conexa, não é possível realizar a permutação.

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica PIBIC. Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. shamyra.sousa@ufnt.edu.br

Figura 5 – $(H_{1,3})$ de G'' Figura 6 – Permutação 1 e 3 Figura 7 – mesma componente



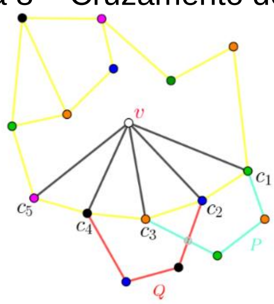




Fonte – Autoria própria

Como c_1 e c_3 estão na mesma componente conexa, é preciso permutar outras duas cores de modo análogo é feito com as cores 2 e 4 e irá sobrar uma cor para colorir o vértice v. Se c_2 e c_4 estiverem na mesma componente conexa, a permutação das cores 2 e 4 não dará o resultado necessário. Logo chegamos ao caso em que c_1e c_3 estão na mesma componente conexa assim como c_2 e c_4 . Dessa forma existe um caminho que une esses vértices. Como os vértices estão organizados no sentido horário, o vértice c_2 está no interior do caminho fechado que une c_1 e c_3, já o vértice c_4 está fora desse caminho. Isso ocasiona que esses caminhos se cruzam em um ponto, ou seja, ocorre o cruzamento de arestas, o que é um absurdo pois estamos tratando de grafos planares. Assim a demonstração do teorema está completa.

Figura 8 – Cruzamento de arestas



Fonte – Autoria própria

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica PIBIC. Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. shamyra.sousa@ufnt.edu.br

VI. CONCLUSÃO/CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa trouxe de certa forma um conhecimento de uma teoria que não é estudada no curso de Licenciatura em Matemática entretendo é utilizado conhecimentos aprendidos no curso. Os Teorema das 4 e 5 Cores aborda uma área curiosa da matemática que chama atenção dos matemáticos e estudioso que se interessam pela área, pensar na quantidade mínima de cores para se colorir é um mapa nem sempre é nítido, entretanto podemos afirmar que com 5 ou menos cores é possível colorir qualquer mapa, fato este interessante. Os estudos trouxeram benefícios para minha formação em aprendizado, apesar de ter dificuldades em determinados momentos, a pesquisa colaborou em desperta o interesse pela matemática pura.

VII. REFERÊNCIA

BARBOSA, Sarah Miranda. **Teoria dos grafos**: Como colorir um mapa e vigiar um museu?. 2021. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, 2021.

SILVA, Jucilene Adailma Lima. **Teorema das 5 cores**: Uma Aplicação da Teoria dos Grafos. 2018. Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal De Campina Grande, Cuité-PB, 2018.

JUNIOR, D.L.F.; ALMEIDA, A.C.L. **O Teorema das 5 Cores**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de São João del-Rei, Paraopeba, 2014

VIII. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Tocantins – FAPT – Brasil

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica PIBIC. Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. shamyra.sousa@ufnt.edu.br