



OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE CASCAS COM DOMÍNIO MODELADO POR MEIO DE NURBS

Optimization of Shell Structures with Domain modeled by NURBS

Hélio Gomes Filho (1); Élcio Cassimiro Alves (2); Etereldes Gonçalves Júnior (3)

(1) Mestrando em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil

Email para Correspondencia: heliogomesfilho@gmail.com; (P) Apresentador

Resumo: Este trabalho apresenta a otimização da espessura de cascas submetidas a carregamento estático e modeladas via NURBS. A análise estática é realizada por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF). Utilizou-se como elemento de casca uma combinação dos elementos CST (Constant Strain Triangle) e DKT (Discrete Kirchhoff Theory), formando assim um elemento com quinze graus de liberdade (três nós com cinco graus de liberdade cada). A malha de elementos finitos é gerada a partir da imagem por funções NURBS, que modelam o domínio a ser analisado, de um domínio quadrado unitário discretizado por meio de uma malha triangular. Desenvolveu-se rotinas para otimização das espessuras dos elementos de cascas por meio do método PQS (Programação Quadrática Sequencial) utilizando-se o programa computacional Matlab e as ferramentas de otimização nele disponíveis. São apresentados resultados para a otimização das espessuras de duas maneiras: considerado espessura constante ao longo de toda a casca, e considerando espessuras variáveis ao longo de agrupamentos de elementos do modelo em MEF. Também é apresentado um modelo que tem como base a geometria da casca da Igreja da Pampulha (Igreja de São Francisco de Assis).

Palavras chaves: *Cascas; MEF; Otimização; NURBS.*

Abstract: This work presents the optimization of the thickness of Shell structures subjected to static loading. Static analysis is performed using the Finite Element Method (FEM) and NURBS modelling. A combination of CST (Constant Strain Triangle) and DKT (Discrete Kirchhoff Theory) elements was used as the shell element, forming an element with fifteen degrees of freedom (three nodes with five degrees of freedom). The finite element mesh is generated from the image by NURBS functions, which model the domain, of a unitary square domain discretized by a triangular mesh. We developed routines to optimize the thickness of the shell elements using SQP (Sequential Quadratic Programming) method using the software Matlab and its optimization tools. Results are presented for the optimization of thickness in two ways: considering constant thickness throughout the shell, and considering variable thicknesses along groups of elements of the MEF model. A model based on the geometry of the Church of Pampulha (Church of São Francisco de Assis) shell is also presented.

Keywords: *Shel; FEM; Optimization; NURBS.*



1 INTRODUÇÃO

Dentre as mais belas obras da arquitetura se destacam diversas que são baseadas em estruturas de cascas, onde se pode destacar, internacionalmente, a Ópera de Sydney, e nacionalmente, o Museu Oscar Niemeyer, em Curitiba, e a Igreja da Pampulha, em Belo Horizonte.

Segundo a ABNT NBR 6118 (2014), as cascas são elementos de superfície não plana em uma dimensão (espessura) é relativamente pequena se comparada com as demais. Sendo assim, como as duas dimensões significantes são determinadas pela arquitetura do projeto, resta a espessura a se determinar. Dessa forma, surge a ideia de se utilizar métodos de otimização para definir a espessura ótima de acordo com algumas restrições.

Diversos autores tem utilizado métodos de otimização na área estrutural visando a economia de material no resultado final. Pode-se citar o trabalho de Meira (2000) no projeto ótimo de estruturas de placas e cascas submetidas a carregamento dinâmico, Espath (2013) na otimização de forma estrutural de cascas, Rocha (2013) na otimização de cascas laminadas e Alves (2016) na otimização de estruturas submetidas a carregamento dinâmico através de métodos determinísticos e probabilísticos.

Para a análise da estrutura é necessário a utilização de um software em que se possa modelá-la e depois discretizá-la. Para superar essa barreira em relação a estruturas compostas de geometrias mais simples, utilizou-se as funções NURBS na modelagem do domínio, e como artifício para a discretização. O Nurbs Book (Piegl, Tiller (1996)) apresenta os dados para a construção de diversos domínios e também maneiras de se combinar domínio conhecidos para se formar novos. Hughes, Cottrell, Bazilevs (2005) se aproveitam das vantagens das NURBS na modelagem do domínio para definirem um método baseado em elementos finitos chamado de Análise Isogeométrica.

Este trabalho visa a otimização de espessura de cascas com domínios modelados por meio de NURBS e discretizados em elementos triangulares.

2 OTIMIZAÇÃO DE CASCAS

Como dito anteriormente, esse trabalho basicamente se divide em três partes: modelagem do domínio através das NURBS e discretização, aplicação do método dos elementos finitos e otimização das espessuras. Cada uma dessas partes será comentada de forma bem breve e as devidas referências serão deixadas para os interessados em maiores informações.

2.1 Parametrização do domínio por meio de NURBS

As funções base NURBS são construídas através da razão ponderada entre funções B-spline, que por sua vez, são funções polinomiais definidas por partes. Para que sejam definidas, são necessários três elementos: vetor de nós, grau e pesos.

Dado o vetor de nós $U = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ tal que $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n$ e o grau p , podemos definir a i -ésima função base B-spline de maneira recursiva, como nas Eq. (1) e (2).

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2)$$

onde o quociente $0/0$ é assumido como sendo zero. Consideraremos nesse trabalho, $u_0 = 0$ e $u_n = 1$. Vale destacar que os $p + 1$ primeiros e últimos nós devem ser repetidos.

Definidas as funções base B-splines e sejam w_j para $j = 1, \dots, n - p - 1$, pesos, as funções base NURBS são definidas pela Eq. (3).

$$R_{i,p}(u) = \frac{w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{j=1}^{n-p-1} w_j N_{j,p}(u)} \quad (3)$$

Para definir uma superfície, são necessários dois conjuntos de funções base B-splines, não necessariamente de mesmo grau, e também um conjunto de pontos de controles responsáveis por definir a geometria da superfície. Seja $N_{i,p}(u)$ a i -ésima função base B-spline de grau p , $M_{j,q}(v)$ a j -ésima função B-spline de grau q , $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ um ponto no espaço e w_{ij} um peso, pode-se definir a funções geométrica $F: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ através da Eq. (4).

$$F(u, v) = \sum R_{ij}(u, v) P_{ij} \quad (4)$$

onde

$$R_{ij,p}(u, v) = \frac{w_{ij} N_{i,p}(u) M_{j,q}(v)}{\sum w_{kl} N_{k,p}(u) M_{l,q}(v)} \quad (5)$$

Para mais informações a respeito das NURBS e da função geométrica ver Piegl, Tiller (1996).

2.2 Análise Estática

A análise estática é realizada através da solução da Eq. (6).

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (6)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema, \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais, e \mathbf{F} é o vetor contendo as forças nodais aplicadas ao sistema.

A matriz de rigidez do elemento de casca é formada por uma combinação do elemento de membrana CST (*Constant Strain Triangle*) com o elemento de placa DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*).

Segundo Carrijo (1995), a matriz de rigidez do elemento CST pode ser calculada através da integral apresentada na Eq. (7).

$$\mathbf{K}_{CST} = \int_A \mathbf{B}^T h \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (7)$$

onde $D = Eh/(1 - \nu^2)$, E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson, h é a espessura da placa e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde x_i é a coordenada x do i-ésimo nó e y_i é a coordenada y do i-ésimo nó. Vale destacar que a Eq. 7 foi definida para material isotrópico e homogêneo.

Segundo Carrijo (1995), a matriz de rigidez do elemento DKT pode ser obtida através da Eq. (9).

$$\mathbf{K}_{DKT} = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\xi d\eta \quad (9)$$

onde A é a área do elemento, a matriz D_b é dada pela Eq. (10).

$$\mathbf{D}_b = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

e $B_b(\xi, \eta)$ é dada pela Eq. (11)

$$\mathbf{B}_b(\xi, \eta) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} H_{x,\xi}^T + y_{12} H_{x,\eta}^T \\ -x_{31} H_{y,\xi}^T - x_{12} H_{y,\eta}^T \\ -x_{31} H_{x,\xi}^T - x_{12} H_{x,\eta}^T + y_{31} H_{y,\xi}^T + y_{12} H_{y,\eta}^T \end{bmatrix} \quad (11)$$

Os vetores $H_{x,\xi}$, $H_{x,\eta}$, $H_{x,\zeta}$ e $H_{x,\xi}$ podem ser encontrados em Carrijo (1995) e os valores de x_{ij} e y_{ij} são apresentados pelas Eq. (12) e (13), respectivamente.

$$x_{ij} = x_j - x_i \quad (12)$$

$$y_{ij} = y_j - y_i \quad (13)$$

Para formar os a matriz de rigidez do elemento de casca, considere as matrizes K_{CST} e K_{DKT} escritas da conforme as Eq. (14) e (15), respectivamente.

$$K_{CST} = \begin{bmatrix} K_{CST}^{1,1} & K_{CST}^{1,2} & K_{CST}^{1,3} \\ K_{CST}^{2,1} & K_{CST}^{2,2} & K_{CST}^{2,3} \\ K_{CST}^{3,1} & K_{CST}^{3,2} & K_{CST}^{3,3} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$K_{DKT} = \begin{bmatrix} K_{DKT}^{1,1} & K_{DKT}^{1,2} & K_{DKT}^{1,3} \\ K_{DKT}^{2,1} & K_{DKT}^{2,2} & K_{DKT}^{2,3} \\ K_{DKT}^{3,1} & K_{DKT}^{3,2} & K_{DKT}^{3,3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde K_x^{ij} representa, de maneira simplifica, a influência do nó j na rigidez do nó i (lembrando que cada nó tem dois graus de liberdade para o elemento CST e três graus de liberdade para o elemento DKT).

Assim, tem-se a matriz K definida da seguinte forma:

$$K = \begin{bmatrix} K_{CST}^{1,1} & 0 & 0 & K_{CST}^{1,2} & 0 & 0 & K_{CST}^{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DKT}^{1,1} & 0 & 0 & K_{DKT}^{1,2} & 0 & 0 & K_{DKT}^{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{CST}^{2,1} & 0 & 0 & K_{CST}^{2,2} & 0 & 0 & K_{CST}^{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DKT}^{2,1} & 0 & 0 & K_{DKT}^{2,2} & 0 & 0 & K_{DKT}^{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{CST}^{3,1} & 0 & 0 & K_{CST}^{3,2} & 0 & 0 & K_{CST}^{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DKT}^{3,1} & 0 & 0 & K_{DKT}^{3,2} & 0 & 0 & K_{DKT}^{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde os zeros são matriz, vetores ou escalares, de acordo com a compatibilidade dos tamanhos das matrizes que compõe K .

O vetor de forças F tem o número de linhas igual a seis vezes o número de nós, devido aos seis graus de liberdade de cada nó. A carga distribuída sobre um elemento é transformada em força e dividida igualmente entre os três nós que o compõem. Essa transformação é feita através do produto da carga distribuída pela projeção da área do elemento no plano perpendicular a carga.

A matriz de rigidez do elemento é constituída por 18 graus de liberdade, porém, como se pode perceber pela matriz anterior apresentada na Eq. (16), ela possui as linhas e colunas referentes à rotação em torno do eixo z iguais a zero. É feito dessa forma para facilitar o processo de transformação do sistema local para o global e vice versa, porém no momento da aplicação das condições de contorno, considera-se que essas direções estão restritas, para que não haver problema na inversão da matriz de rigidez. O processo de construção da matriz de transformação (rotação), da matriz de rigidez do sistema e a aplicação das condições de contorno não serão aqui apresentados, por não apresentarem nenhuma novidade em relação ao método dos elementos finitos.

2.3 Processo de geração de malha

A malha será gerada através da função geométrica aplicada a uma malha genérica em um domínio quadrangular unitário. Como o elemento de casca utilizado é triangular, para ter-se simetria, a malha genérica desenvolvida foi baseada na divisão de quadrados em 8 triângulos cada, conforme mostra a Figura 1. Após aplicar a função geométrica às coordenadas dos nós da malha genérica, obtém as coordenadas dos nós sobre a superfície a ser analisada.

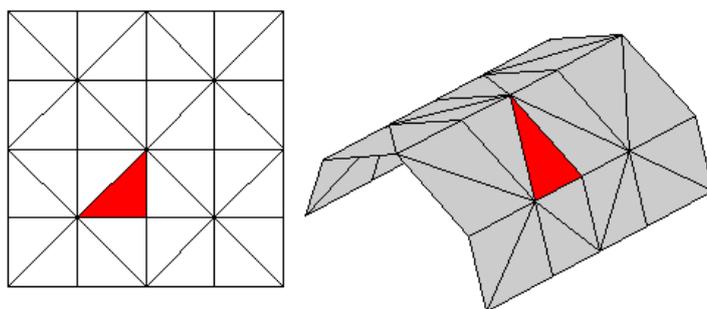


Figura 1. Geração da malha através da função geométrica. À esquerda, domínio genérico unitário e à direita, resultado após aplicação da função geométrica às coordenadas dos nós.

Fonte: (Autor, 2018)

2.4 Otimização de espessura

Buscou-se otimizar as espessuras dos elementos da casca em análise de modo a reduzir o peso total da estrutura. Vale destacar que esses elementos são provenientes da discretização para o método dos elementos finitos. Isso foi feito de duas maneiras: (a) considerando uma espessura constante em toda a casca e (b) agrupando vários elementos em linhas paralelas com espessura constante. O caso onde é permitido que cada elemento tenha uma espessura diferente não foi considerado devido ao tempo computacional gasto.

Como considera-se que a estrutura é composta de um mesmo material, minimizar o peso é o mesmo que minimizar o volume. Sendo assim, não é necessária como parâmetro de entrada a massa específica. O problema de otimização a ser resolvido é dado pela Eq. (17)

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & V = \sum A_i h_i \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} u_j - u_{\max} \leq 0 \\ h_{\min} \leq h \leq h_{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Como o problema abordado envolve restrições não lineares (isso pode ser observado na definição do elemento de casca), foi necessário um método de otimização compatível, e dentre todos disponíveis escolheu-se a Programação Quadrática Sequencial (PQS). Para mais informações sobre o método, uma boa referência em português é Nunes (2009).

3 RESULTADOS

Como resultados, são apresentados três domínios diferentes: uma placa circular, uma casca simulando um abrigo de pessoas em uma parada de ônibus e uma casca simulando a Igrejinha da Pampulha.

Por simplicidade, considerou-se em todos os exemplos o módulo de elasticidade igual a 200GPa , coeficiente de Poisson igual a $0,3$ e massa específica igual a 7850 kg/m^3 (a massa específica é utilizada para o cálculo do peso próprio como carregamento na estrutura).

3.1 Placa circular

Considerou-se uma placa circular de raio igual a dois metros, apoiada em toda sua extremidade, sujeita a um carregamento distribuído de $q = -1\text{ kN/m}^2$. A placa foi modelada por 512 elementos (equivale a 8×8 quadrados compostos por 8 triângulos cada).

Os dados para a construção da função geométrica que gera esse domínio são dados na Tabela 1, onde r é o raio da placa.

No processo de otimização, considerou-se um espessura mínima de $0,03\text{m}$ e máxima de $0,12\text{m}$. O deslocamento absoluto máximo permitido foi de $0,001\text{m}$ e a espessura inicial foi considerada igual à espessura mínima. Considerou-se o problema com elementos de espessuras iguais distribuídos em faixas concêntricas, devido à simetria.

Tabela 1. Dados para função geométrica – placa circular

Vetor de nós U	[0, 0, 0, 1, 1, 1]
Vetor de nós V	[0, 0, 0, 1, 1, 1]
Grau p	2
Grau q	2
Pontos de controle	$\left(-\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}, 0\right), (r\sqrt{2}, 0, 0), \left(-\frac{r\sqrt{2}}{2}, -\frac{r\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0, r\sqrt{2}, 0), (0, 0, 0),$ $(0, -r\sqrt{2}, 0), \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}, 0\right), (r\sqrt{2}, 0, 0), \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, -\frac{r\sqrt{2}}{2}, 0\right)$
Pesos	$1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$

Desconsiderando-se o peso próprio, obteve-se como resultado uma espessura constante de $0,0381m$ (equivalente a um volume de $0,4783m^3$). Permitindo a variação da espessura em faixas concêntricas, obteve-se a espessura mínima de $0,03m$ e máxima de $0,0608m$ (volume igual a $0,42182m^3$ – redução de $10,475\%$), conforme a Figura 2.

Considerando o pesos próprio, obteve-se como resultado uma espessura constante de $0,0710m$ (equivalente a um volume de $0,8912m^3$). Considerando uma espessura variável, conforme o exemplo anterior, obteve-se como resultado espessuras mínima e máxima iguais as definidas no problema, e um volume de $0,7617m^3$, que representa uma redução de $14,531\%$. A Figura 3 apresenta a distribuição das espessuras.

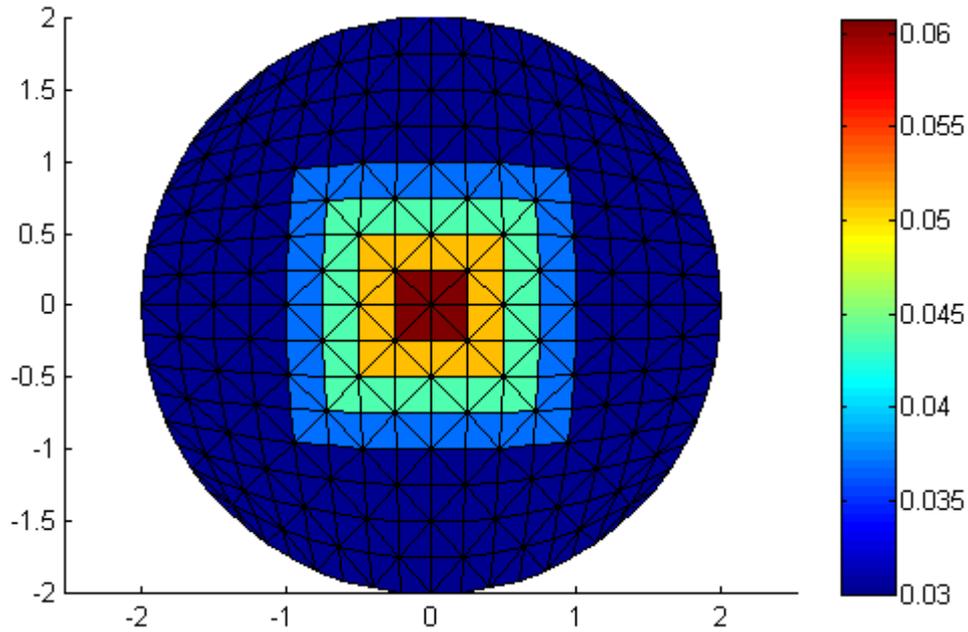


Figura 2. Distribuição das espessuras dos elementos (sem considerar o peso próprio)

Fonte: (Autor, 2018)

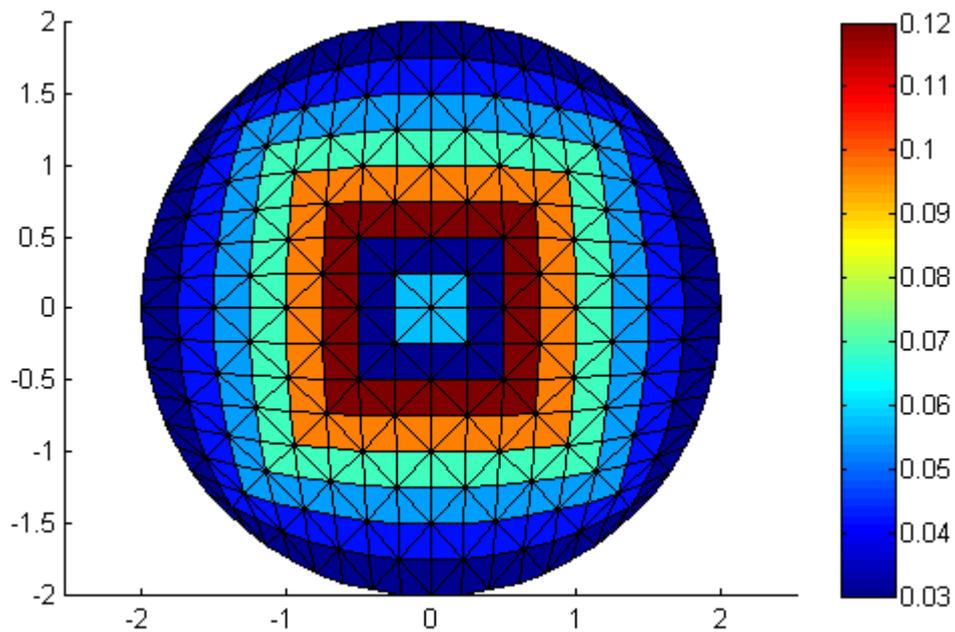


Figura 3. Distribuição das espessuras dos elementos (considerando o peso próprio)

Fonte: (Autor, 2018)

3.2 Casca – Abrigo de pessoas

A estrutura do abrigo é composta por uma placa retangular disposta verticalmente, com 300cm de comprimento e 200cm de altura, combinada a metade da casca de um cilindro, que forma a cobertura. Esse cilindro tem raio igual a 60cm. Considerou-se a base do retângulo engastada no solo e um carregamento distribuído vertical sobre a cobertura cilíndrica no valor de $-1kN/m^2$ (totalizando uma força de 3,6kN).

A casca foi modela por 384 elementos (8×6 quadrados compostos por 8 elementos triangulares cada). A tabela 2 apresenta os dados para a construção da função geométrica, onde L é o comprimento, h é a altura do retângulo e r é o raio do cilindro. Note que a repetição de um dos nós no vetor de nós gera a descontinuidade na derivada da superfície.

Tabela 2. Dados para função geométrica – abrigo de pessoas

Vetor de nós U	$\left[0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1\right]$
Vetor de nós V	$[0, 0, 1, 1]$
Grau p	2
Grau q	1
Pontos de controle	$(0, r, h), (0, r, h + r), (0, -r, h + r), (0, -r, h), (0, -r, h/2), (0, -r, 0), (L, r, h), (L, r, h + r), (L, -r, h + r), (L, -r, h), (L, -r, h/2), (L, -r, 0)$
Pesos	$1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$

No processo de otimização, considerou-se espessura mínima igual a 0,01m e máxima igual a 0,06m, e o valor inicial foi igual à espessura mínima. O deslocamento absoluto máximo permitido foi de 0,02m. Considerou-se o problema com espessura uniforme e com elementos de espessuras iguais distribuídos em faixas horizontais.

Desconsiderando-se o peso próprio, obteve-se como resultado uma espessura constante de 0,0203m (equivalente a um volume de $0,2422m^3$). Permitindo a variação da espessura em faixas horizontais, obteve-se a espessura

mínima de $0,01m$ e máxima de $0,0225m$ (volume igual a $0,2058m^3$ - redução de $15,029\%$), conforme a Figura 4.

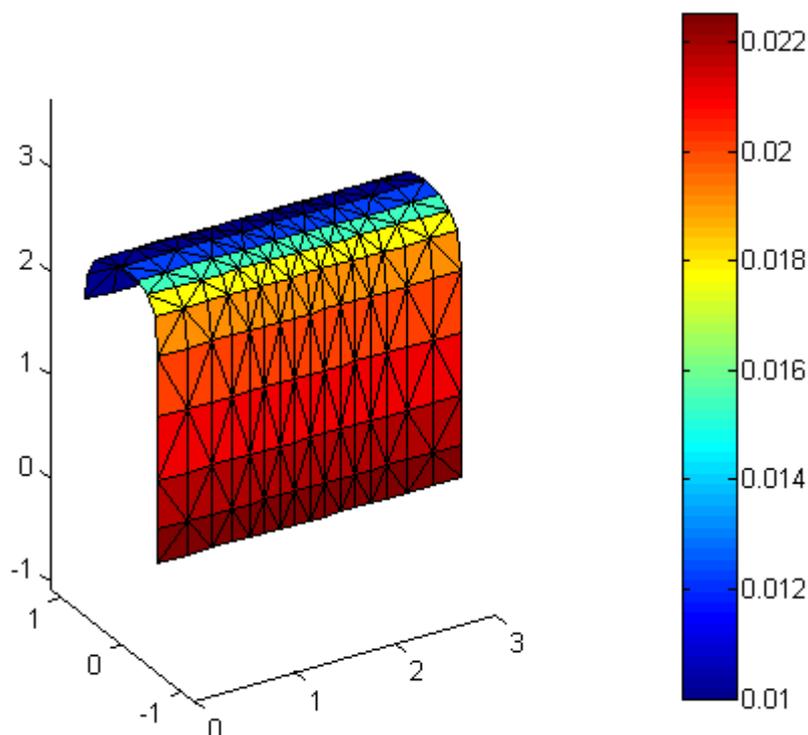


Figura 4. Distribuição das espessuras dos elementos (sem considerar o peso próprio)

Fonte: (Autor, 2018)

Considerando o pesos próprio, obteve-se como resultado uma espessura constante de $0,0345m$ (equivalente a um volume de $0,4114m^3$). Considerando uma espessura variável, conforme o exemplo anterior, obteve-se como resultado espessura mínima igual a $0,01m$ e máxima igual à $0,0321m$, e um volume de $0,2128m^3$, que representa uma redução de $48,274\%$. A Figura 5 apresenta a distribuição das espessuras.

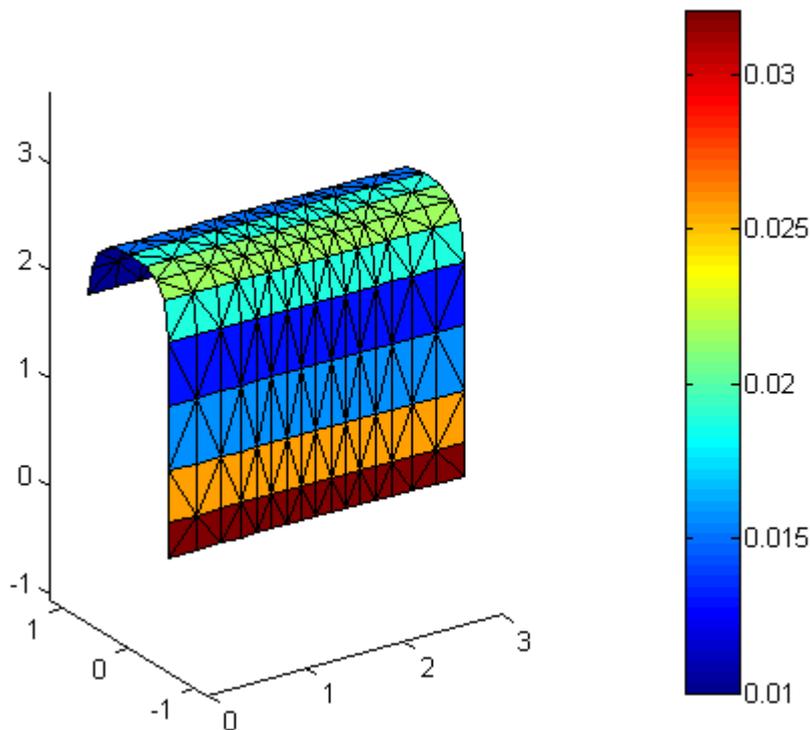


Figura 5. Distribuição das espessuras dos elementos (considerando o peso próprio)

Fonte: (Autor, 2018)

3.3 Casca – Igrejinha da Pampulha

A Igrejinha da Pampulha (Igreja São Francisco de Assis) fica localizada em Belo Horizonte – MG. Foi inaugurada em 1943 e é uma obra de autoria de Oscar Niemeyer. Se destaca por sua casca parabólica feita em concreto, como pode-se observar na Figura 6.

Utilizou-se a função geométrica para simular as curvas da casca que compõe a cobertura, porém o modelo não é fiel às dimensões e simplesmente uma mera ilustração. O modelo foi gerado por 704 elementos e se destaca o uso da repetição dos nós para gerar a descontinuidade da derivada da superfície, como pode-se observar nos dados da Tabela 3.

A casca foi engastada nas extremidades de menor dimensão e considerou-se um carregamento distribuído horizontalmente de $35kN/m^2$ (note que como apenas a cobertura foi modelada, é possível colocar carregamento distribuído horizontalmente apenas em uma direção, pois a outra apresenta área desprezível). Como o material da casca é o concreto, considerou-se módulo de elasticidade $23,8MPa$, coeficiente de Poisson 0,2 e massa específica igual a $2500 kg/m^3$.



Figura 6. Igrejinha da Pampulha

Fonte: <http://www.mineirosnaestrada.com.br/igreja-sao-francisco-de-assis/>

Tabela 3. Dados para função geométrica – igrejinha da Pampulha

Vetor de nós U	$\left[0, 0, 0, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{5}{11}, \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}, 1, 1, 1\right]$
Vetor de nós V	$[0, 0, 1, 1]$
Grau p	2
Grau q	1
Pontos de controle	$(0; 0; 0), (1,5; 0; 3), (2,5; 0; 4), (4,5; 0; 4), (5,5; 0; 3), (6,5; 0; 4), (8,5; 0; 4), (9,5; 0; 3), (10,5; 0; 5), (13,5; 0; 8), (16,5; 0; 5), (17,5; 0; 3), (18,5; 0; 4), (20,5; 0; 4), (21,5; 0; 3), (23; 0; 0), (0; 8; 0), (1,5; 8; 3), (2,5; 8; 4), (4,5; 8; 4), (5,5; 8; 3), (6,5; 8; 4), (8,5; 8; 4), (9,5; 8; 3), (10,5; 8; 5), (13,5; 8; 8), (16,5; 8; 5), (17,5; 8; 3), (18,5; 8; 4), (20,5; 8; 4), (21,5; 8; 3), (23; 8; 0)$
Pesos	Pesos unitários (32 valores)

No processo de otimização, considerou-se espessura mínima igual a $0,15m$ e máxima igual a $0,25m$, e o valor inicial foi igual à espessura mínima. O deslocamento absoluto máximo permitido foi de $0,20m$. Considerou-se o problema com espessura uniforme e com elementos de espessuras iguais distribuído em faixas ao longo da menor dimensão.

Desconsiderando-se o peso próprio, obteve-se como resultado uma espessura constante de $0,2133m$ (equivalente a um volume de $55,5255m^3$). Permitindo a variação da espessura em faixas, obteve-se a espessura mínima de

0,15m e máxima de 0,25m (volume igual a $44,4187m^3$ – redução de 20%), conforme a Figura 7.

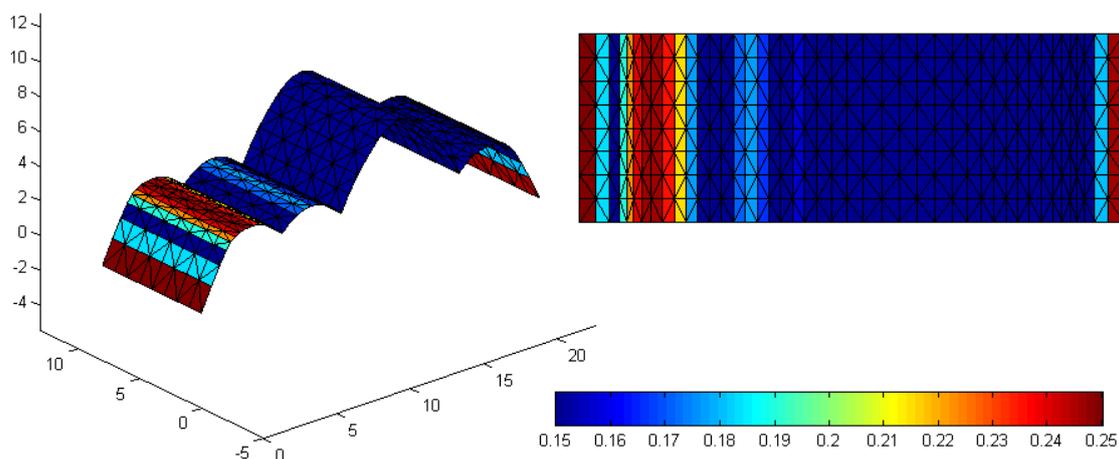


Figura 7. Distribuição das espessuras dos elementos (sem considerar o peso próprio)

Fonte: (Autor, 2018)

Considerando o pesos próprio, obteve-se como resultado uma espessura constante de $0,2264m$ (equivalente a um volume de $58,9503m^3$). Considerando uma espessura variável, conforme o exemplo anterior, obteve-se como resultado espessuras mínima e máxima iguais aos limites, e um volume de $45,6901m^3$, que representa uma redução de 22,49%, conforme a Figura 8.

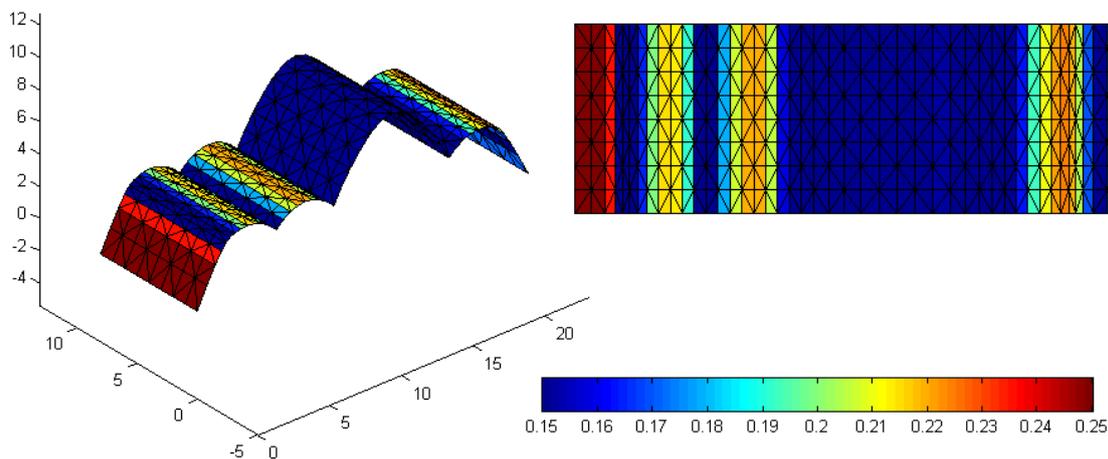


Figura 8. Distribuição das espessuras dos elementos (considerando o peso próprio)

Fonte: (Autor, 2018)

4 CONCLUSÃO

Através dos exemplos apresentados, pode-se perceber uma redução considerável no volume das cascas quando se permitiu as variações da espessura ao longo de conjuntos de elementos, porém na prática isso não é viável, sendo o mais recomendável a utilização da espessura constante. Poderia-se também repensar o processo de otimização para ao invés de considerar a espessura nos elementos, considerar a espessura nos nós, e essa seria interpolada ao longo dos elementos, mas isso deveria ser feito também de forma a agrupar os nós e de forma a evitar grandes variações para nós próximos.

A utilização da função geométrica se mostrou uma boa opção na substituição de um gerador de malhas, porém deve-se tomar o cuidado no momento da escolha da formulação da geometria, para se evitar àquelas com pontos de controles repetidos, o que geraria elementos com área zero. Existem programas de computador voltados à modelagem através de NURBS que podem facilitar o processo de modelagem, como o Rhino3D, por exemplo.

REFERÊNCIAS

- Alves, E. C., 2016. Optimization of structures subjected to dynamic load: deterministic and probabilistic methods. *REM – International Engineering Journal*, ScieELO Brasil, vol. 69, n. 3, pp. 281-286.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2014. ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto-procedimento.
- Carrijo, E., 1995. Aplicação do elemento finito DKT à análise de cascas. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo.
- Espath, L. F. d. R., 2013. Otimização de forma estrutural e aerodinâmica usando análise IsoGeométrica e Elementos Finitos. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Hughes, T. J., Cottrell, J. A., Bazilevs, Y., 2005. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, vol. 194, n. 39, pp. 4135-4195.
- Meira, S. A. F., 2000. Optimization of shell structures under dynamics loads. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Nunes, F. T. et al., 2009. Programação quadrática sequencial e condições de qualificação. Campinas, SP.
- Piegl, L., Tiller, W., 1996, The NURBS book. Springer Science & Business Media.