



ESTUDO COMPUTACIONAL DE PAINÉIS CILÍNDRICOS COM RESTRIÇÕES DE CONTATO

Computational study of cylindrical panels with contact constraints

McGlennon da Rocha Régis (1); Fernando Carlos Scheffer Machado (2);
Christianne de Lyra Nogueira (3); Ricardo Azoubel da Mota Silveira (4)

(1) MSc. Prof., Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Congonhas, Congonhas - MG, Brasil.

(2) Dr. Prof., Instituto Federal do Sul de Minas Gerais, Campus Pouso Alegre - MG, Brasil.

(3) Dra. Profa., Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.

(4) Dr. Prof., Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.

Email para Correspondência: mcglennon.regis@ifmg.edu.br; (P) McGlennon Régis

Resumo: A interação de painéis cilíndricos com o meio, no caso solo ou rocha, pode ser considerada de duas formas: quando a estrutura e o meio não perdem contato durante o processo de deformação, caracterizando o problema de contato bilateral; e quando o painel não está completamente fixa e pode perder contato com o meio para determinadas condições de carregamento, definindo o problema de contato unilateral. Este trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional para o estudo e a análise de problemas envolvendo painéis cilíndricos com restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas por bases elásticas. Para tanto, emprega-se o método das diferenças finitas e técnicas de otimização para tratamento de restrições de contato. São apresentados e analisados exemplos que determinam o grau de eficiência das metodologias numéricas propostas.

Palavras chaves: Painéis cilíndricos; Interação solo-painel; Contato unilateral; Contato bilateral; Método das diferenças finitas.

Abstract: The interaction of cylindrical panels with the medium, in the case of soil or rock, can be considered in two different ways: as a bilateral contact problem, when the structure and the medium do not lose contact during the deformation process; and as an unilateral contact problem, when the panel is not completely fixed and may lose contact with the medium for certain loading conditions. This work presents a computational study involving cylindrical panels with bilateral and unilateral constraints imposed by the soil or rock medium. For this, the finite difference method and optimization techniques for the treatment of contact constraints are used. Examples are presented to verify the efficiency of the numerical strategies proposed.

Keywords: Cylindrical panels; Interaction soil-panel; Unilateral contact; Bilateral contact; Finite difference method.

1 INTRODUÇÃO

Os painéis cilíndricos, também conhecidos como cascas cilíndricas abertas, são estruturas amplamente utilizadas na engenharia estrutural e são empregados nas mais diversas áreas e setores. Túneis e depósitos de materiais são alguns exemplos de sua aplicabilidade nas engenharias. Tais estruturas interagem com o meio a sua volta, por vezes solo ou rocha (base), conforme ilustra a Figura 1. Essa interação pode ocorrer de forma que as estruturas sirvam de suporte ao meio (Bulson, 1985), sejam sustentadas por ele (Straughan, 1990; Silva, 1998) ou, conforme Solotrat (2011), trabalhem conjuntamente, isto é, tanto na sustentação como no apoio.

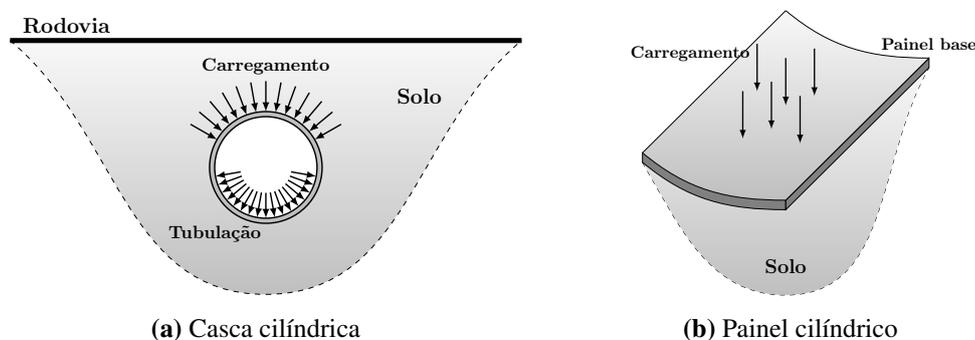


Figura 1: Aplicações de cascas e painéis cilíndricos

A interação entre o painel cilíndrico e a base pode apresentar-se de duas formas: **i.** Contato Bilateral: a estrutura está completamente presa ao meio, não existindo, portanto, pontos de descolamento nas regiões em que ocorre a interação. Nesse caso, o meio e a estrutura trabalham de forma conjunta, independentemente dos deslocamentos radiais da casca serem positivos ou negativos, acarretando, portanto, o conhecimento prévio das regiões de contato (Paliwal e Bhalla, 1993a,b; Gunawan et al., 2005). Tais problemas são chamados *Problema de Contato Bilateral* (PCB). **ii.** Contato Unilateral: a estrutura não está completamente fixa ao meio, podendo, com isso, ocorrer regiões em que o contato é perdido. Especificamente, a base só oferece reação se comprimida (Güler, 2004; Celep et al., 2011). Esses problemas são chamados *Problema de Contato Unilateral* (PCU).

Em diversas situações práticas a base é um meio elástico - aqui chamada, genericamente, de base elástica ou meio elástico. O interesse da resposta da base elástica limita-se à obtenção das forças (reações) na região de contato com a estrutura, no caso, o painel cilíndrico, não importando o campo de deslocamento ou estado de tensões que se desenvolve no seu interior. A maioria dos modelos é idealizada com o emprego de pequenas molas no sentido de oferecerem reação ao deslocamento da estrutura, podendo essa reação ter comportamento linear ou não linear.

Para muitos problemas de contato de interesse prático, entretanto, não é possível encontrar as soluções analíticas das equações que regem o problema (Bulson, 1985). Os métodos experimentais, embora úteis e precisos, se mostram onerosos tanto em custo quanto em tempo de execução (Szilard, 2004). A solução dos problemas de contato painel cilíndrico-base elástica é usualmente alcançada via métodos numérico-computacionais. Os métodos numéricos, apesar de proverem soluções aproximadas, quando bem formulados, desenvolvidos e aplicados na discretização do sistema estrutural painel-base, fornecem resultados próximos dos considerados reais (Szilard, 2004; Burden e Faires, 2008). Entre os métodos numéricos mais usados na solução dos PCBs e PCUs, de interesse deste trabalho, estão (Choi, 2006):



o Método dos Elementos Finitos (MEF); o Método dos Elementos de Contorno (MEC); o Método dos Elementos Discretos (MED); e o Método das Diferenças Finitas (MDF).

Neste trabalho, optamos pelo emprego do Método das Diferenças Finitas para aproximar as derivadas das equações diferenciais de equilíbrio do sistema painel-base elástica. Justifica-se a utilização do MDF através das seguintes considerações: a existência de base computacional inicialmente desenvolvida por Silveira (1990), que aplicou o MDF na avaliação da estabilidade elástica de cascas isotrópicas e enrijecidas; por se tratar de uma estratégia numérica simples, genérica e de fácil aplicação; e por facilitar a introdução e implementação dos modelos de bases elásticas usados nesta pesquisa. Por ser mais geral, adota-se ainda a Teoria de Casca de Sanders, que pode ser aplicada para cascas ou painéis cilíndricos pouco ou muito abatidos (Sanders, 1961; Brush e Almroth, 1975). As bases elásticas são aproximadas pelos modelos de Winkler e Pasternak (Dutta e Roy, 2002; Wang et al., 2005).

O desenvolvimento desta pesquisa teve como ponto de partida os trabalhos de Silveira (1990; 1995), que aliaram as áreas de análise estrutural e mecânica computacional. Em Silveira (1990) foi encontrada a base computacional necessária para as implementações realizadas. Silveira (1995) forneceu os fundamentos teóricos necessários para entendimento e desenvolvimento das estratégias de solução dos problemas de contato propostas aqui. Além disso, pode ser considerado também continuação direta dos trabalhos de Silva (1998), Pereira (2003) e, mais recentemente, Maciel (2012). Como consequência desses trabalhos, foram publicados diversos artigos em conferências e periódicos internacionais. Merecem destaque aqueles publicados em periódicos, quais sejam: Silva et al. (2001), Silveira e Gonçalves (2001), Silveira et al. (2008a, 2008b, 2013). Conforme relatado em Maciel (2012), em Silva et al. (2001) estão os fundamentos da solução numérica, via MEF, para problemas de equilíbrio de placas com restrições bilaterais e unilaterais de contato, mas considerando pequenos deslocamentos e deformações e material elástico linear. Já em Silveira et al. (2008a, 2008b) podem ser encontradas duas formulações capazes de resolver o problema de contato unilateral entre uma estrutura esbelta e uma fundação elástica.

Este artigo apresenta a seguinte estrutura: na Seção 2 desenvolvemos a formulação matemática utilizada na obtenção das equações de equilíbrio de uma casca genérica infinitesimal e sua aplicação à casca cilíndrica. Na sequência, Seção 3, apresentamos as estratégias numéricas utilizadas e escrevemos, na forma de diferenças finitas, a equação de equilíbrio. Por fim, na Seção 4, são mostrados os principais resultados obtidos.

2 Formulação Matemática

2.1 Descrição da superfície

Segundo Gonçalves (1985), “a teoria de cascas está ligada à teoria das superfícies”. Nesse sentido, em teoria da elasticidade, o termo casca é aplicado a corpos que são limitados por superfícies curvas, cuja distância entre elas é pequena quando comparada com outra dimensão. Quando a razão entre a espessura da casca (distância entre as superfícies curvas) e o menor raio de curvatura é pequena, a estrutura é dita esbelta (Novozhilov, 1959).

A Figura 2(a) ilustra uma superfície obtida a partir de dois conjuntos de curvas, α_1 e α_2 , de tal forma que cada ponto dessa superfície é determinado pela intersecção de duas curvas. O ângulo entre as curvas é denotado por ω (Figura 2(b)). Em coordenadas cartesianas, a superfície fica completamente

especificada pelas equações:

$$x = f_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad y = f_2(\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{e} \quad z = f_3(\alpha_1, \alpha_2), \quad (1)$$

sendo as funções f_i contínuas e diferenciáveis até segunda ordem. Apesar de haver infinitas possibilidades de funções f_i para a formação de uma mesma superfície, um conjunto dessas é particularmente importante, qual seja, o composto por curvas perpendiculares, isto é, com $\omega = \pi/2$. Nesse caso, as direções principais de curvatura, obtidas a partir dos vetores tangentes às curvas, em qualquer ponto, são ortogonais.

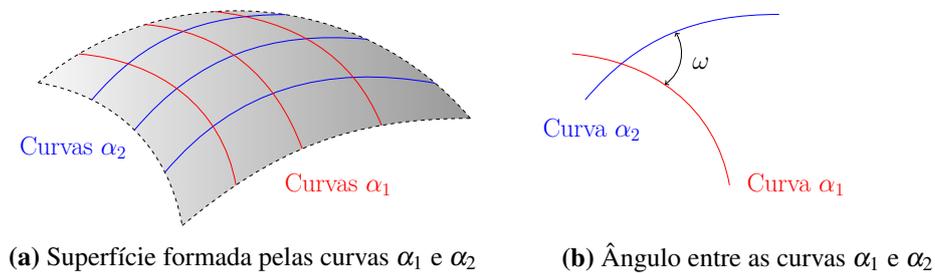


Figura 2: Superfície

Usualmente, referencia-se a superfície através de um sistema de coordenadas x_1, x_2 e x_3 , conforme mostra a Figura 3. A essa superfície são associados os vetores $\mathbf{e}_n, \mathbf{r}_{,1}$ e $\mathbf{r}_{,2}$, sendo, em relação ao ponto P , respectivamente, normal à superfície, tangentes às curvas α_1 e α_2 . Tem-se, ainda, entre os pontos P e P' , o incremento diferencial $d\mathbf{r}$ e o arco infinitesimal ds sobre a superfície.

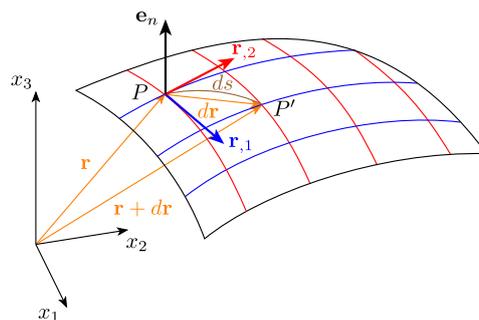


Figura 3: Relações geométricas entre as curvas coordenadas

Utilizando as Eqs. (1), escrevemos:

$$\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) = f_1(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{e}_1 + f_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{e}_2 + f_3(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{e}_n, \quad (2)$$

em que \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 são vetores unitários tangentes às curvas. Associado ao deslocamento infinitesimal ds sobre a superfície, tem-se o incremento do vetor posição \mathbf{r} , ou seja:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,1} d\alpha_1 + \mathbf{r}_{,2} d\alpha_2, \quad (3)$$

onde,

$$\mathbf{r}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

A geometria das superfícies é introduzida a partir de duas formas quadráticas, conhecidas como Primeira Forma Fundamental e Segunda Forma Fundamental. A determinação das quantidades métricas, tais como comprimento de arco ds , ângulo ω entre as curvas e áreas de regiões sobre a superfície, caracterizam sua geometria interna e estão associadas à Primeira Forma Fundamental. Por outro lado, quantidades ditas externas à superfície, como curvatura, raio de curvatura, curvatura média, são introduzidas a partir da Segunda Forma Fundamental. Para superfícies formadas por curvas paramétricas ortogonais entre si, linhas principais, a primeira e a segunda forma assumem, respectivamente, as formas:

$$(ds)^2 = A_1^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 (d\alpha_2)^2 \quad (5)$$

e

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} \left(A_1 \frac{d\alpha_1}{ds} \right)^2 + \frac{1}{R_2} \left(A_2 \frac{d\alpha_2}{ds} \right)^2, \quad (6)$$

sendo R_s , R_1 e R_2 são, respectivamente, os raios de curvatura de ds , $d\alpha_1$ e $d\alpha_2$. Os termos A_1 e A_2 são os coeficientes de Lamé, e são determinados a partir dos vetores tangentes às curvas (Eq. (4)):

$$A_1 = \sqrt{\mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{r}_{,1}} \quad \text{e} \quad A_2 = \sqrt{\mathbf{r}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{,2}}. \quad (7)$$

2.2 Equações lineares de equilíbrio estático

As forças, N_i , T_i e T_{ij} , e momentos, M_i ou M_{ij} , resultantes, por unidade de comprimento, que atuam num elemento infinitesimal genérico da casca isotrópica são representadas na Figura 4(a) e Figura 4(b), respectivamente. A imposição das condições de equilíbrio para o elemento de casca, leva a seis equações diferenciais, de tal forma que três equações expressam o equilíbrio das forças internas e externas:

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 T_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 T_{21})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 \right] + \frac{N_1}{R_1} + q_1 = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 T_{12})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 T_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 \right] + \frac{N_2}{R_2} + q_2 = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 N_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_2)}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + q_n = 0 \quad (10)$$

e as outras três a anulação da soma dos momentos:

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{21})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right] - N_1 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 M_{12})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right] - N_2 = 0 \quad (12)$$

$$T_{12} - T_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0 \quad (13)$$

em que a força externa, agindo sobre uma unidade de área, é denotada pelo vetor:

$$\mathbf{q} = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_n \mathbf{e}_n. \quad (14)$$

As seis forças, T_1 , T_{12} , N_1 , T_2 , T_{21} e N_2 , e os quatro momentos, M_1 , M_{12} , M_2 e M_{21} , caracterizam completamente o estado de tensão da casca (NOVOZHILOV, 1959).

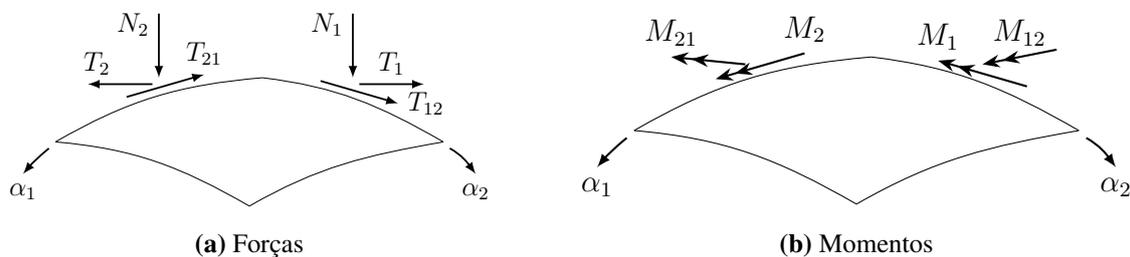


Figura 4: Elemento infinitesimal de uma casca isotrópica

2.3 Aplicações à casca cilíndrica

Sendo os painéis cilíndricos um caso particular das cascas cilíndricas, utiliza-se a mesma formulação matemática das cascas, tal que, especificamente, fazemos cascas com raios extensos e ângulos de abertura inferiores a 30° . A Figura 5 define os elementos geométricos da casca cilíndrica. O sistema de coordenadas é o x, θ e z , com origem no ponto P situado na superfície média da casca, com os eixos x e θ tomados coincidentes com as direções longitudinal e circunferencial, respectivamente, e o eixo z é normal à superfície. Os deslocamentos de um ponto da casca são u, v e w ; L define o comprimento longitudinal, t a espessura e R o raio médio. Utiliza-se o sistema de coordenadas cartesiano, onde os vetores unitários \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} apontam nas direções x, y e z , respectivamente. A casca cilíndrica está sujeita a carregamentos, tanto nos bordos quanto ao longo da superfície.

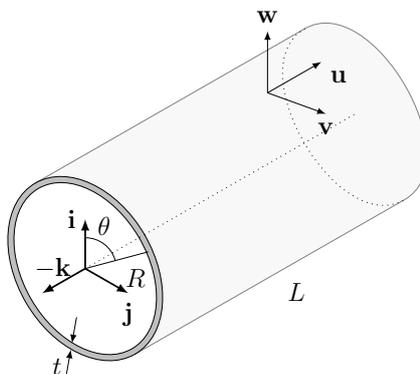


Figura 5: Relações geométricas na casca cilíndrica

A partir da geometria apresentada (Figura 5), o vetor posição, em coordenadas retangulares, de um ponto qualquer da superfície média é:

$$\mathbf{r} = R \cos(\theta) \mathbf{i} + R \sin(\theta) \mathbf{j} + x \mathbf{k} \quad (15)$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq x_3 \leq L$ e $-t/2 \leq R \leq t/2$. Utilizamos, ainda, devido às relações geométricas mostradas, a seguinte parametrização para coordenadas curvilíneas:

$$\alpha_1 = x \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \theta \quad (16)$$

Com isso, os vetores tangentes (Eqs. (4)) ficam:

$$\mathbf{r}_{,x} = \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_{,\theta} = -R \sin(\theta) \mathbf{i} + R \cos(\theta) \mathbf{j}. \quad (17)$$



e os coeficientes de Lamé, Eqs. (7), tomam a forma:

$$A_x = 1 \quad \text{e} \quad A_\theta = R. \quad (18)$$

Utilizando os resultados Eqs. (17) e Eqs. (18), a Primeira Forma Fundamental, para a casca cilíndrica, fica:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + R^2(d\theta)^2. \quad (19)$$

Ainda, os raios de curvatura das curvas α_1 e α_2 para a casca cilíndrica (Eqs. (16)), são:

$$R_x = +\infty \quad \text{e} \quad R_\theta = R. \quad (20)$$

Assim, a Segunda Forma Fundamental para a casca cilíndrica é:

$$\frac{1}{R_s} = R \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2. \quad (21)$$

Tomando as Eqs. (16) e a Figura 5, temos, ainda, as seguintes correspondências:

$$T_1 = N_x, \quad N_1 = N_{x\theta}, \quad T_{12} = N_{x\theta}, \quad (22)$$

$$T_2 = N_\theta, \quad N_2 = N_{xz}, \quad T_{21} = N_{\theta x}, \quad (23)$$

$$M_1 = M_x, \quad M_{12} = M_{x\theta} \quad (24)$$

$$M_2 = M_\theta, \quad M_{21} = M_{\theta x}. \quad (25)$$

Utilizando as equações referentes ao equilíbrio estático de elemento de casca, Eqs. (9)-(14), e levando-se em conta as relações Eqs. (22)-(25), para o caso das cascas cilíndricas, obtemos as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} N_{xz} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial N_{\theta z}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{xz}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta + q = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - N_{\theta z} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - N_{xz} = 0 \quad (30)$$

$$N_{x\theta} - N_{\theta x} - \frac{1}{R} M_{\theta x} = 0 \quad (31)$$

em que consideramos a aplicação da carga \mathbf{q} normal à superfície.

Manipulando essas equações (Eqs. (26)-(31)), as equações diferenciais de equilíbrio do elemento infinitesimal podem ser transformadas nas três equações (Brush e Almroth, 1975; Gonçalves, 1985; Silveira, 1990):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (33)$$

$$-\frac{N_\theta}{R} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + q = 0 \quad (34)$$

Com as hipóteses de pequenos deslocamentos, material elástico e certos tipos de cargas atuantes, as Eqs. (32) e (33) têm pouca influência na resposta do sistema, sendo, portanto, desprezadas. Considerando-se a influência da base elástica, a Eq. (34) pode ser apresentada como função apenas do deslocamento w da superfície média da casca, ou seja:

$$\frac{1}{R^2} w + \frac{D}{C} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) - \frac{q(x, \theta) + r_b}{C} = 0 \quad (35)$$

ou,

$$\frac{C}{R^2} w + D \nabla^4 w = q(x, \theta) + r_b \quad (36)$$

em que C e D são a rigidez de membrana e de flexão da casca, respectivamente, que são definidas como:

$$C = \frac{Et}{1 - \nu^2} \quad \text{e} \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (37)$$

com E sendo o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson, r_b representa a reação da base elástica, dependente, portanto, dos modelos considerados.

2.4 Modelos de bases elásticas

O interesse da resposta da base elástica limita-se à obtenção das forças (reações) na região de contato com a estrutura, não importando o campo de deslocamento ou estado de tensões. Com boa aproximação, modelos utilizam pequenas molas como agentes que oferecerem reação ao deslocamento da estrutura.

Modelos que utilizam apenas um parâmetro para o comportamento do solo/rocha são os mais simples. Nessa categoria destacam-se os modelos de molas discretas dispostas ao longo da região de contato e o modelo contínuo de Winkler (Hetényi, 1946; Kerr, 1964). Modelos como os de Pasternak, Filonenko-Borodich e Vlasov (Kerr, 1964; Harr et al., 1969; Yang, 1972; Zhaohua e Cook, 1983; Horvath, 1993) assumem a interação entre as molas e apresentam dois parâmetros para definir o comportamento da base elástica.

3 Estratégias numéricas

3.1 Aproximações por diferenças finitas

Para o caso bidimensional, como é o caso das equações de equilíbrio de cascas cilíndricas, a malha será constituída por uma com duas dimensões (x e θ , no caso:). A malha é formada por retângulos com dimensões, Δx e $R\Delta\theta$. Nessa malha, destaca-se o ponto pivotal na posição (i, j) , onde a equação de equilíbrio do sistema, Eq. (36) será aplicada.

Na forma de diferenças finitas, a equação de equilíbrio (Eq. 36) assume a forma:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{t^2}{12\Delta x^4} \right] (w_{i-2,j} + w_{i+2,j}) + \left[\frac{t^2}{12R^4\Delta\theta^4} \right] (w_{i,j-2} + w_{i,j+2}) + \\
 & \left[\frac{t^2}{6R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} \right] (w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1}) + \\
 & \left[\frac{t^2}{3R^4\Delta\theta^4} \frac{t^2}{3R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} \right] (-w_{i,j-1} - w_{i,j+1}) + \\
 & \left[\frac{t^2}{3\Delta x^4} \frac{t^2}{3R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} \right] (-w_{i-1,j} - w_{i+1,j}) + \\
 & \left[\frac{t^2}{2\Delta x^4} + \frac{2t^2}{3R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} + \frac{t^2}{2R^4\Delta\theta^4} + \frac{1}{R^2} \right] = \frac{q(x, \theta)}{C}
 \end{aligned} \tag{38}$$

Em relação às bases elásticas, no caso dos modelos de um parâmetro, a contribuição da rigidez da base na matriz de rigidez é feita de forma bastante simples e direta, através da equação:

$$(r_b)_{i,j} = k_b(w_{i,j}) \tag{39}$$

em que (i, j) define a posição do ponto pivotal, k_b é o valor da rigidez da base e w é o deslocamento. Dessa forma, \mathbf{K}_b será uma matriz diagonal, cujas componentes não nulas terão o valor k_B para o modelo de mola e k_B multiplicado pela área de influência do ponto nodal para o modelo de Winkler.

No caso dos modelos com dois parâmetros, a reação da base elástica é representada, genericamente, usando diferenças finitas, pela expressão:

$$(r_b)_{i,j} = k_b(w_{i,j}) - \frac{k_M}{R\Delta x\Delta\theta} [(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) - 4(w_{i,j})] \tag{40}$$

onde (i, j) define a posição do ponto pivotal, k_b é o parâmetro de rigidez elástico da fundação e k_M representa, no caso do modelo de Pasternak, o parâmetro rigidez cisalhante da camada.

3.2 Estratégias de solução

Um painel cilíndrico (estrutura) em contato com o solo (base elástica) pode ser definido como um sólido elástico contínuo de domínio V , com o contorno delimitado por três superfícies distintas, supostas regulares: S_u , S_f e S_c . Como nos problemas estruturais usuais, S_u define a região do sólido onde os deslocamentos são prescritos e S_f é a região do sólido onde as forças externas são prescritas. A superfície denominada S_c define a região de contato entre os corpos.

Para a estrutura, as equações de equilíbrio interno, as relações cinemáticas e as relações constitutivas são dadas, respectivamente, no domínio V , por:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{e} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (41)$$

em que σ_{ij} representa as componentes cartesianas do tensor de Cauchy, ε_{ij} caracteriza as componentes de deformação infinitesimal, u_i as componentes dos deslocamentos e C_{ijkl} define o tensor das propriedades elásticas da casca.

As estratégias numéricas utilizadas neste trabalho para a solução aproximada dos problemas de contato bilateral (PCU) e unilateral (PCU) apresentam como características principais:

- i. O emprego do Método das Diferenças Finitas (MDF), onde se substitui o domínio original dos corpos (estrutura e base elástica) e seus respectivos contornos por uma malha e se aproxima a solução do problema. Como consequência, chega-se, no sistema de equações algébricas que rege os PCB e PCU em estudo;
- ii. No caso do PCB, após essa discretização do sistema, a solução do problema linear pode ser alcançada de forma direta resolvendo-se esse sistema de equações algébricas; e
- iii. No caso do PCU, também após a aplicação do MDF, a solução do problema não linear não pode ser obtida de uma forma direta e, assim, duas metodologias de solução para esse problema são apresentadas.

A transformação do problema contínuo em discreto consiste em aplicar o MDF para aproximar as derivadas das equações diferenciais de equilíbrio do sistema casca-base elástica. Isso é feito substituindo-se as derivadas que aparecem nas equações diferenciais de equilíbrio do sistema casca-base por fórmulas de diferenças das variáveis de campo, no caso os deslocamentos, em pontos selecionados do sistema. Esses pontos estão localizados na malha de diferenças finitas. Faz-se o mesmo para as expressões que descrevem as condições de contorno do problema. Como consequência da aplicação do MDF, chega-se num sistema de equações algébricas, a partir do qual os deslocamentos da casca ou base, nos pontos da malha, podem ser obtidos, ou seja:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_e \quad (42)$$

em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema casca-base, \mathbf{F}_e é o vetor das forças externas atuantes e \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais do sistema, incógnitas do problema. Efetivamente, a matriz de rigidez do sistema \mathbf{K} é montada a partir do arranjo das equações de equilíbrio da casca com a da base elástica.

Caso a casca e a base estejam sujeitas às restrições bilaterais de contato, pequenos deslocamentos e deformações, com o material de ambos os corpos exibindo comportamento elástico, é possível a adoção de hipóteses da teoria linear elástica para solução do problema. Por outro lado, caso o sistema casca-base esteja sujeito às restrições unilaterais de contato, mesmo considerando as hipóteses de pequenos deslocamentos e deformações, e material elástico, a solução do PCU não pode ser obtida diretamente, uma vez que não se conhece, *a priori*, a região de contato S_c entre os corpos. Assim, no caso do PCU, após a discretização do sistema, resolvemos o problema de minimização

$$\text{MIN} \Pi(\mathbf{U}, \mathbf{U}_b) \quad (43)$$

$$\text{Sujeita a: } -\varphi(\mathbf{U}, \mathbf{U}_b) \leq 0 \quad (44)$$

em que se considera agora o vetor \mathbf{U} como os deslocamentos nodais da estrutura e \mathbf{U}_b os deslocamentos nodais da base. Adotamos as seguintes estratégias: *Estratégia de Solução 1 (ES1)*, em que a região de contato S_c é avaliada considerando diretamente as restrições de contato unilateral, ou seja, formulando-se o PCU como um Problema de Complementaridade Linear (PCL). *Estratégia de Solução 2 (ES2)*, a região de contato S_c é inicialmente aproximada através de uma determinada estratégia; na sequência utiliza-se o método de Newton-Raphson para corrigi-la e avaliar a participação da base elástica na obtenção de outras incógnitas do problema. Os detalhes dessa estratégia podem ser encontrados em Silveira (1995) e Silva (1998).

4 Exemplos numéricos

Tentando aproximar o problema calculado por Straughan (1990), usou-se um painel retangular de $7,2 \times 14,4 \text{ m}^2$, com uma carga distribuída de $2,394 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ aplicada sobre ele. Algumas adaptações tiveram que ser feitas para aproximar o problema analisado do encontrado na literatura. Primeiramente, considerou-se para o painel cilíndrico um raio de 1000 m para que ele se assemelhasse à placa plana. Em segundo, adotou-se o uso de apoios simples nas laterais menores, pois o presente programa não permite o uso de bordos livres nos quatro lados. A base usada por Straughan segue o modelo de Pasternak, com $k_B = 1,2993 \text{ MN/m}^3$ e $k_M = 2,54652 \text{ MN/m}$.

A Figura 6 apresenta o deslocamento radial encontrado nos pontos localizados numa linha que passa no meio do painel, paralela aos lados de menor dimensão (simplesmente apoiados). Percebe-se que existe uma boa aproximação das configurações deformadas, com as diferenças observadas oriundas do ganho de rigidez proporcionado pelas diferenças nas condições de contorno (de livres para simplesmente apoiadas).

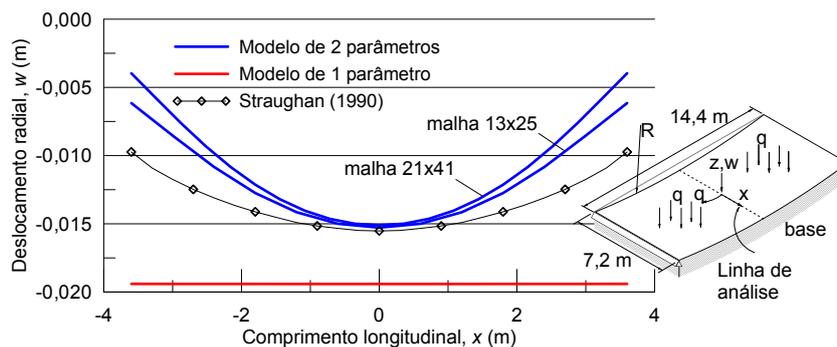
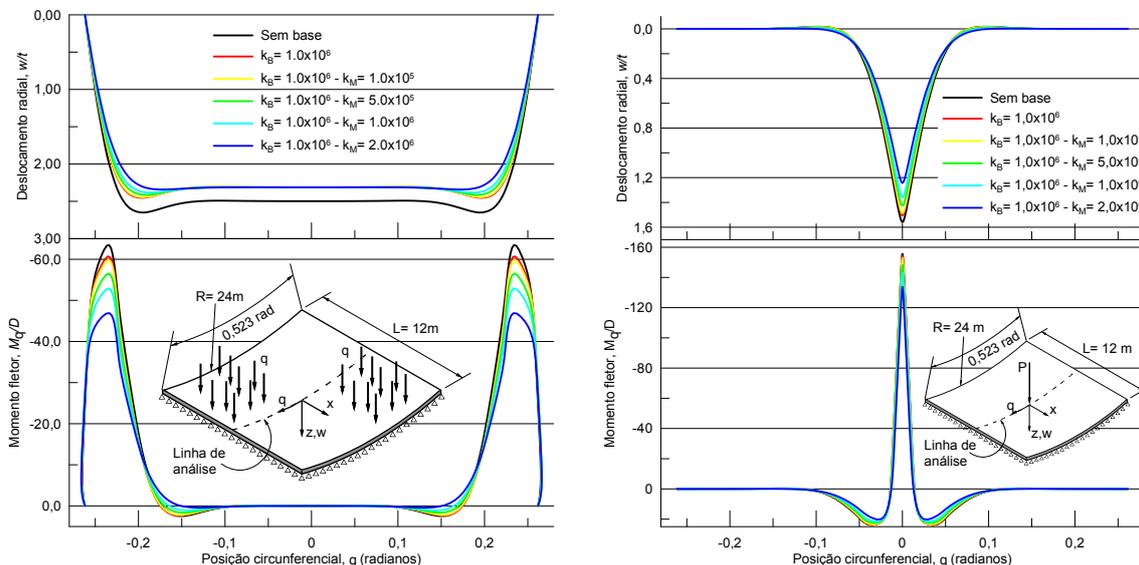


Figura 6: Deslocamento radial em um painel de curvatura suave sobre uma base elástica

Foi feita, também, uma análise dos deslocamentos para painéis onde são testados vários parâmetros das bases elásticas (com contato bilateral) e carregamentos de tipos diferentes. Primeiramente, aplicou-se uma carga distribuída de 10^6 N/m^2 sobre o painel, com formato quase quadrado e simplesmente apoiado nos quatro lados. O deslocamento radial obtido numa linha longitudinal mediana é apresentado na Figura 7(a). O primeiro parâmetro k_B foi tomado constante em todos os testes, inclusive para o modelo de 1 parâmetro, no valor 10^6 N/m^3 . O segundo parâmetro, k_M , sofreu uma variação de $1,0 \times 10^5 \text{ N/m}$ até $2,0 \times 10^6 \text{ N/m}$, obtendo relações k_B/k_M de 10; 2; 1 e 0,5.

Na sequência, considerou-se uma carga concentrada de valor $1,0 \times 10^6 \text{ N}$ no centro do mesmo painel anteriormente analisado. Os deslocamentos radiais e momentos fletores na direção x obtidos são



(a) Deslocamento radial e momentos fletores em x de um painel sob carga distribuída variando os parâmetros da base

(b) Deslocamento radial e momentos fletores em θ de um painel sob carga concentrada variando os parâmetros da base

Figura 7

apresentados na Figura 7(b). Também foram usados os mesmos parâmetros para os modelos de base do problema anterior. Percebe-se, como esperado, que houve um ganho efetivo de rigidez proporcionado pelo modelo de 2 parâmetros. Os valores de deslocamento máximos e momentos em θ demonstram que a adoção de um parâmetro k_M grande (em relação a k_B) acarreta uma redução efetiva do deslocamento radial e do momento máximos da casca. Dependendo da situação, esse fato pode acarretar um “mascaramento” dos resultados levando a um subdimensionamento da estrutura.

Agora, considerando um painel abatido de aço, praticamente quadrado, com 12 m de lado, aplicamos quatro cargas concentradas (na direção radial), duas comprimindo a casca contra a base elástica e duas tracionando, todas com igual intensidade. Foram feitas quatro análises diferentes para o problema: sem contato, com contato bilateral e usando as duas estratégias para contato unilateral (ES1 e ES2). Adotou-se uma malha de 21×21 nós. A configuração deformada obtida numa determinada região de pontos (linha de análise) é apresenta na Figura 8. Nas zonas de contato, os deslocamentos encontrados ao considerar o contato bilateral (PCB) são praticamente iguais ao unilateral (PCU). Nas zonas de descolamento a similaridade é outra, isto é, os deslocamentos obtidos com o contato unilateral são praticamente iguais aos da casca sem influência da base elástica.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho desenvolveu uma ferramenta computacional para o estudo e análise de problemas envolvendo painéis cilíndricos com restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas por bases elásticas. Também foi objeto de estudo o uso do método das diferenças finitas como ferramenta de discretização do contínuo, transformando as equações diferenciais, tanto da casca como de modelos de bases, em equações algébricas.

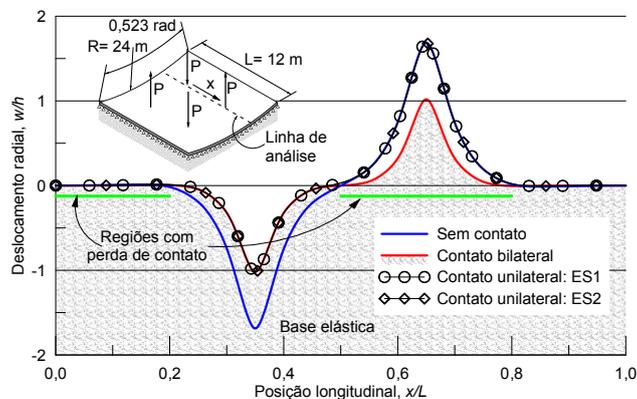


Figura 8: Deslocamento radial na direção x de um sistema painel-base sob cargas concentradas

As análises feitas buscaram demonstrar a eficiência das estratégias de solução para este tipo de problema estrutural, destacando as vantagens e desvantagens de cada uma, além de valorizar o uso do MDF como ferramenta de análise estrutural de placas e painéis, destacando o seu uso na consideração dos modelos de bases elásticas mais comumente usados.

O método das diferenças finitas mostrou eficiência na discretização do problema estrutural proposto, apresentando facilidade de implementação tanto da teoria de casca cilíndrica quanto também dos modelos de base elástica, caracterizando-se como uma alternativa viável a outros métodos numéricos. Foram estudados os principais modelos de bases elásticas, sendo destacados os dois tipos mais comuns: de um ou de dois parâmetros.

Os modelos de bases elásticas apresentados funcionaram adequadamente, tanto na consideração de contato bilateral quanto unilateral, mas fica evidente a necessidade da definição dos parâmetros de rigidez do solo, principalmente o parâmetro que determina a interação entre as molas (k_M), para que os resultados obtidos fiquem mais próximos de resultados reais.

Por fim, estratégia ES1 é mais adequada para solução do Problema de Contato Unilateral que a ES2, devido a sua simplicidade, confiabilidade e precisão.

Em continuidade a este trabalho, pretende-se estudar painéis com restrições de contato, levando-se em conta as não linearidades geométrica e física.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq, à Fapemig, à Fundação Gourceix, ao PROPEC e à Prop/UFOP o apoio fornecido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Brush, D. O. & Almroth, B. O., 1975. *Buckling of Bars, Plates, and Shells*. McGraw- Hill Inc. USA.
- Bulson, P. S., 1985. *Buried Structures: Static and Dynamic Strength*. Chapman & Hall Ltd., NY.



- Burden, R. L. e Faires, J. D., 2008. *Análise Numérica*. Cengage Learning, São Paulo, SP.
- Celep, Z., Güler, K. e Demir, F., 2011. Response of a completely free beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to dynamic load. *Structural Engineering and Mechanics-ASCE*, Vol. 37, No. 1, pp. 61-77.
- Choi, S., 2006. *Computations in tunneling: a revisit to numerical modeling programs*. Modeling Tools, PBWorld, New York.
- Dutta, S. C. e Roy, R., 2002. *A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system*. *Computers & Structures*, Vol. 80, pp. 1579-1594, Pergamon.
- Gonçalves, P. B., 1985. *Equações Gerais de Cascas Esbeltas para Análise Não-Linear e Estudo da Instabilidade Elástica*. Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Güler, K., 2004 Circular elastic plate resting on tensionless Pasternak foundation. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, Vol. 130(10), pp. 1251-1254.
- Gunawan, H., Mikami, T., Kanie S. e Sato M., 2005. Finite element analysis of cylindrical shells partially buried in elastic foundations. *Computer & Structures*, Vol. 83, pp. 1730-1741, Elsevier.
- Harr, M. E., Davidson, J. L., HO, D-M, Pombo, L. E., Ramaswamy, S. V. e Rosner, J. C., 1969. Euler beams on two parameter foundation model. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 95, No. SM4, pp. 933-948.
- Hetényi, M., 1946. *Beams on Elastic Foundation*. University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., USA.
- Horvath, J. S., 1993. Beam-column-analogy model for soil-structures interaction analysis. *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 110, No. 2, pp. 358-364.
- Kerr, A. D., 1964. Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 31, pp. 491-498.
- Maciel, F. V., 2012. *Equilíbrio e Estabilidade de Elementos Estruturais com Restrições Bilaterais Impostas por Bases Elásticas*. Dissertação de Mestrado, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG.
- Novozhilov, Valentin Valentinovich, 1959. *The theory of thin shells*. P. Noordhoff.
- Paliwal, D. N. e Bhalla, V. 1993a. Large deflection analysis of cylindrical shells on a Pasternak foundation. *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 53, pp. 261-271, Elsevier.
- Paliwal, D. N. e Bhalla, V. 1993b. Large amplitude free vibrations of cylindrical shells on a Pasternak foundation. *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 54, pp. 387-398, Elsevier.
- Pereira, W. L. A., 2003. *Formulações Numéricas para Análise de Vigas em Contato com Bases Elásticas*. Dissertação de Mestrado, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG.
- Sanders Jr, J. L., 1961. Nonlinear Theories for Thin Shells. *Div. Eng. & Appl. Physics*, pp. 1-35, Harvard University, USA.
- Silva, A. R. D., 1998. *Análise de Placas com Restrições de Contato*. Dissertação de Mestrado, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG.
- Silva, A. R. D., Silveira, R. A. M. e Gonçalves, P. B., 2001. Numerical methods for analysis of plates on tensionless elastic foundations. *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 2083-2100, Elsevier.



- Silveira, R. A. M., 1990. *Análise Não-Linear Geométrica de Cascas Cilíndricas Isotrópicas e Enrijecidas*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio.
- Silveira, R. A. M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio.
- Silveira, R. A. M. e Goncalves, P. B., 2001. *Analysis of slender structural elements under unilateral contact constraints*. Int. J. Struct. Eng. Mech., Vol. 12, pp. 35-50, Elsevier.
- Silveira, R. A. M., Pereira, W. L.A. e Goncalves, P. B., 2008a. *Nonlinear analysis of structural elements under unilateral contact constraints by a Ritz type approach*. Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 45, pp. 2629-2650, Elsevier.
- Silveira, R. A. M., Pereira, W. L.A. e Goncalves, P. B., 2008b. *Constrained and unconstrained optimization formulations for structural elements in unilateral contact with an elastic foundation*. Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2008.
- Silveira, R. A. M., Nogueira, C. L. e Goncalves, P. B., 2013. *A numerical approach for equilibrium and stability of slender arches and rings under contact constraints*. Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 50, pp 147-159, Elsevier.
- Solotrat, 2011. Túneis - uma solução de engenharia inteligente. *Revista de Fundações e Obras Geotécnicas*, Vol. 6, Solotrat Engenharia Geotécnica, São Paulo.
- Straughan, W. T., 1990. *Analysis of Plates on Elastic Foundations*. PhD Thesis, Faculty of Texas Tech University, Texas, USA.
- Szilard, R., 2004. *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical. Numerical and Engineering Methods*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA.
- Wang. Y. H., Tham, L. G. e Cheung Y. K., 2005. *Beams and plates on elastic foundations: a review*. Prog. Struct Engng. Mater., Vol. 7, pp. 174-182, John Wiley & Sons.
- Yang, T. Y., 1972. A finite element analysis of plates on two parameter foundation model. *Computer & Structures*, Vol. 2, pp. 593-614.
- Zhaohua, F. e Cook, R. D., 1983. Beam elements on two parameter elastic foundation. *Journal of Eng. Mechanics*, Vol. 6, pp. 1390-1402.