

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

SILVA, Crislany Vitória Oliveira¹; **MARANHÃO NETO**, Raimundo Cavalcante².

RESUMO

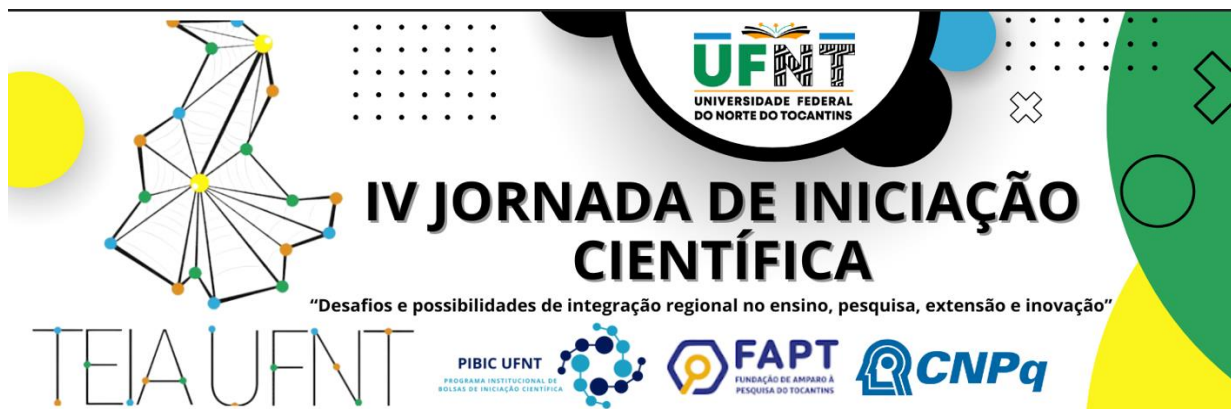
Este trabalho aborda o estudo de equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem, com ênfase nas equações de variáveis separáveis. Inicialmente, o objetivo era analisar qualitativamente EDOs cúbicas implícitas de primeira ordem. Contudo, devido à necessidade de cursar disciplinas fundamentais de cálculo e a desafios pessoais, o escopo sofreu esse redimensionamento. Durante o desenvolvimento do projeto, foram realizadas atividades como estudo bibliográfico, reuniões semanais e o uso de softwares como GeoGebra e vídeos didáticos. Observou-se progresso no desenvolvimento de uma base mais sólida para o entendimento das EDOs de modo geral. Esse avanço evidencia a importância de uma formação sólida em cálculo para o sucesso em estudos mais avançados na área.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias; variáveis separáveis; iniciação científica; cálculo.

I. INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

A matemática é amplamente reconhecida como a linguagem universal da ciência, capaz de traduzir, descrever e prever fenômenos naturais com precisão. As equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem desempenham um papel crucial na modelagem de sistemas dinâmicos, sendo aplicadas em áreas como física, biologia e economia.

Este trabalho aborda o estudo das EDOs de primeira ordem, com ênfase nas equações de variáveis separáveis. Inicialmente, o objetivo era analisar



qualitativamente EDOs cúbicas implícitas de primeira ordem. Contudo, devido à necessidade de cursar disciplinas fundamentais de cálculo e a desafios pessoais relacionados à saúde, o escopo foi ajustado para uma introdução às EDOs de primeira ordem, com foco nas classes mais simples de variáveis separáveis.

A grande área do conhecimento envolvida é Ciências Exatas e da Terra, com ênfase em Matemática Aplicada. As áreas temáticas secundárias incluem Ciências Biológicas e da Saúde, Ciências Agrárias e Ciências Humanas, com foco na aplicação de modelos matemáticos para descrever fenômenos naturais e sociais.

As EDOs de variáveis separáveis são amplamente aplicadas em diversas áreas do conhecimento, como física, biologia e economia. Na física, são utilizadas para modelar fenômenos como o decaimento radioativo, onde a taxa de desintegração de uma substância é proporcional à quantidade presente, por exemplo. Na biologia, são aplicadas no estudo do crescimento populacional, como no modelo logístico, que descreve como uma população cresce de forma limitada devido à capacidade de suporte do ambiente. Na economia, são empregadas em assuntos como análise de juros compostos, onde a taxa de juros é proporcional ao capital acumulado, permitindo calcular o montante final após um determinado período. Essas aplicações ilustram a importância das EDOs na compreensão e previsão de comportamentos em sistemas dinâmicos.

Neste projeto, foram realizadas atividades de estudo bibliográfico, reuniões semanais e o uso de recursos digitais, a exemplo o software GeoGebra, para o desenvolvimento da temática em questão, favorecendo uma compreensão mais profunda dos conceitos estudados.

Para o público-alvo, pensou-se em alunos do ensino médio e graduação com interesse em pesquisa e extensão haja vista que o estudo das EDOs oferece uma base sólida para a compreensão de fenômenos dinâmicos e a aplicação de modelos



matemáticos em diversas áreas. Além disso, contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e analítico, habilidades essenciais para a resolução de problemas complexos e a tomada de decisões.

O contexto das atividades desenvolvidas está inserido na tríade ensino-pesquisa-extensão, pois envolveu a aplicação de conhecimentos teóricos adquiridos em sala de aula, a pesquisa de soluções para problemas matemáticos e a extensão desses conhecimentos para a comunidade acadêmica e além. A relevância dessas atividades reside em sua capacidade de integrar teoria e prática, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada.

II. BASE TEÓRICA

A matemática é frequentemente percebida como a linguagem universal das ciências, capaz de traduzir, descrever e prever fenômenos naturais com precisão. Desde cedo, figuras como Albert Einstein se encantaram com o potencial explicativo dessa disciplina — ele próprio se referia à álgebra como “uma ciência divertida”, que instiga a mente a desvendar o invisível (STRATHERN, [s.d.]).

As equações diferenciais ordinárias (EDOs), nesse contexto, representam ferramentas de suma importância na modelagem e compreensão de sistemas dinâmicos. Para embasar teórica e metodologicamente este estudo, foram consultados autores e materiais que contribuíram para a estruturação da pesquisa. Entre os principais, destacam-se:

Paul Strathern: o autor explora a vida e as contribuições de Albert Einstein, destacando sua capacidade de aplicar o pensamento matemático à resolução de problemas complexos e de perceber os princípios universais que regem os fenômenos físicos. Embora o foco principal seja a teoria da relatividade, a obra ressalta a relevância da matemática como linguagem essencial da ciência.



Raimundo Cavalcante Maranhão Neto: em sua tese de doutorado intitulada Estudo Qualitativo de Equações Diferenciais Binárias Cúbicas, defendida no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás, o autor apresenta uma análise profunda das EDOs, oferecendo uma base conceitual sólida para a compreensão de seus aspectos qualitativos e aplicados.

George B. Thomas (et al.): o livro Cálculo, 10.^a edição, volume 1, ofereceu o suporte à formação básica essencial para o estudo das EDOs em conteúdos de cálculo.

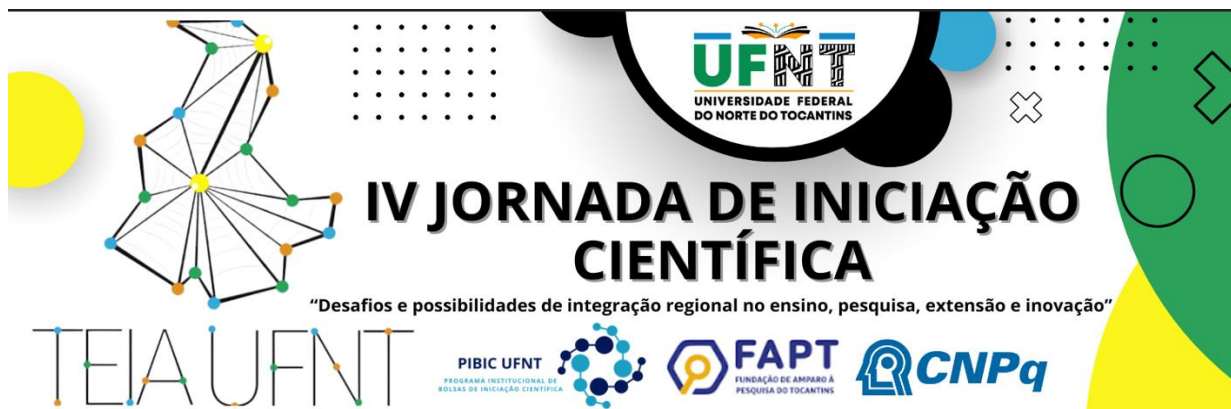
Gelson Iezzi e Carlos Murakami: a coleção Fundamentos de Matemática Elementar constitui uma referência formativa essencial, especialmente os volumes Conjuntos e Funções e Limites, Derivadas e Noções de Integral. A abordagem didática dos autores e os exercícios propostos favoreceram o entendimento de conceitos básicos que sustentam o estudo das equações diferenciais.

III. OBJETIVOS

O objetivo geral inicialmente deste projeto era realizar um estudo qualitativo de equações diferenciais ordinárias (EDOs) binárias cúbicas implícitas de primeira ordem, buscando compreender suas propriedades e possíveis aplicações em modelagem matemática. Contudo, diante das limitações acadêmicas decorrentes da ausência prévia de disciplinas fundamentais de cálculo diferencial e integral, bem como de desafios pessoais, o escopo foi redimensionado para um estudo introdutório das EDOs de primeira ordem, com ênfase nas equações de variáveis separáveis.

Os objetivos específicos são:

- Introduzir os conceitos básicos de cálculo diferencial e integral;
- Estudar equações diferenciais ordinárias de primeira ordem;
- Resolver e interpretar equações diferenciais de variáveis separáveis;
- Desenvolver contato inicial com a pesquisa científica em Matemática



IV. METODOLOGIA

O trabalho estruturou-se em estudo bibliográfico de obras sobre cálculo e equações diferenciais, em discussões semanais com o orientador e na resolução de exercícios introdutórios. Utilizaram-se vídeos didáticos, o software GeoGebra e materiais em PDF como recursos digitais de apoio. Aulas expositivas foram conduzidas pelo orientador com o objetivo de apresentar e debater conceitos importantes de pré-cálculo, cálculo e equações diferenciais ordinárias (EDOs). O estudo bibliográfico abrangeu textos sobre pré-cálculo, cálculo e EDOs, com ênfase nas equações de variáveis separáveis; as discussões semanais possibilitaram o esclarecimento de dúvidas, o aprofundamento dos conteúdos e o acompanhamento do progresso; a resolução de exercícios constituiu a prática de problemas matemáticos para que os conceitos fossem aplicados e as competências de resolução fossem desenvolvidas.

V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Durante o desenvolvimento deste estudo, foram obtidos resultados que evidenciam o progresso teórico e prático alcançado ao longo do projeto.

Observou-se um avanço significativo na assimilação dos princípios essenciais para o entendimento das equações diferenciais ordinárias (EDOs).

A resolução de equações diferenciais de variáveis separáveis possibilitou a aplicação concreta dos conceitos estudados, consolidando o aprendizado e fortalecendo a relação entre teoria e prática.

Simultaneamente, as atividades de estudo bibliográfico e as reuniões semanais com o orientador favoreceram o aprimoramento de competências investigativas,



indispensáveis para a continuidade dos estudos na área, ao mesmo tempo em que este projeto me proporcionou contato direto com a prática de pesquisa científica.

Ademais, a aplicação prática das equações de variáveis separáveis reforça a relevância das EDOs na descrição e modelagem de fenômenos reais, como crescimento populacional, propagação de doenças infecciosas e decaimento radioativo. Para ilustrar essa aplicabilidade, propõe-se a seguinte reflexão:

O césio-137 ($Cs-137$) é um isótopo radioativo com uma meia-vida de aproximadamente 30 anos. Isso significa que, após esse período, metade da quantidade inicial de $Cs-137$ terá se desintegrado.

O modelo matemático que descreve esse decaimento radioativo pode ser dado pela equação diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

onde:

- $N(t)$ representa a quantidade de átomos de $Cs-137$ no instante t ;
- k é a constante de decaimento (positiva), que caracteriza a rapidez do decaimento.



Solução:

$$\frac{dN}{dt} = -kN \iff \frac{dN}{N} = -k dt \iff \int_0^t \frac{dN}{N} = \int_0^t -k dt.$$

Como

$$\int_0^t \frac{dN}{N} = \ln(N(t)) - \ln(N(0)) = \ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right)$$

e

$$\int_0^t -k dt = -k t,$$

segue que

$$\frac{dN}{dt} = -kN \iff \ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right) = -k t$$

e daí,

$$N(t) = N(0)e^{-kt}.$$

Escrevendo $N(0) = N_0$, tem-se

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

Com meia-vida de 30 anos, fica $N(30) = \frac{N_0}{2}$ e assim,

$$\begin{aligned} N(30) = N_0 e^{-k \cdot 30} &\iff \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-30k} \iff \frac{1}{2} = e^{-30k} \iff \\ &\iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-30k}) \iff k = \frac{\ln(2)}{30} \end{aligned}$$

Modelo final:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{30}t}$$

Ou equivalentemente:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/30}$$

Podemos dizer que esta expressão mostra **quanto da quantidade inicial** de um material radioativo (como o Césio-137) **resta depois de t anos**, considerando que sua meia-vida é de 30 anos. Em outras palavras: a cada 30 anos, a quantidade se reduz para **metade** do que era no início desse período.



Também podemos afirmar que essa expressão nos permite estimar a quantidade restante **em qualquer instante de tempo** t — mesmo que t não seja exatamente 30, 60 ou 90 anos — porque usamos a potência $t/30$.

VI. CONCLUSÃO/CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este projeto proporcionou uma compreensão mais profunda dos conceitos fundamentais que precedem o estudo das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Além disso, possibilitou a compreensão inicial de EDOs, com ênfase nas de variáveis separáveis. A experiência adquirida não apenas reforçou o interesse pela pesquisa matemática, mas também fortaleceu o desenvolvimento acadêmico e aumentou a confiança para os desafios futuros. Agradecimentos são dirigidos ao orientador e aos colegas que prestaram apoio.

VII. REFERÊNCIAS

STRATHERN, Paul. Einstein e a Relatividade em 90 Minutos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

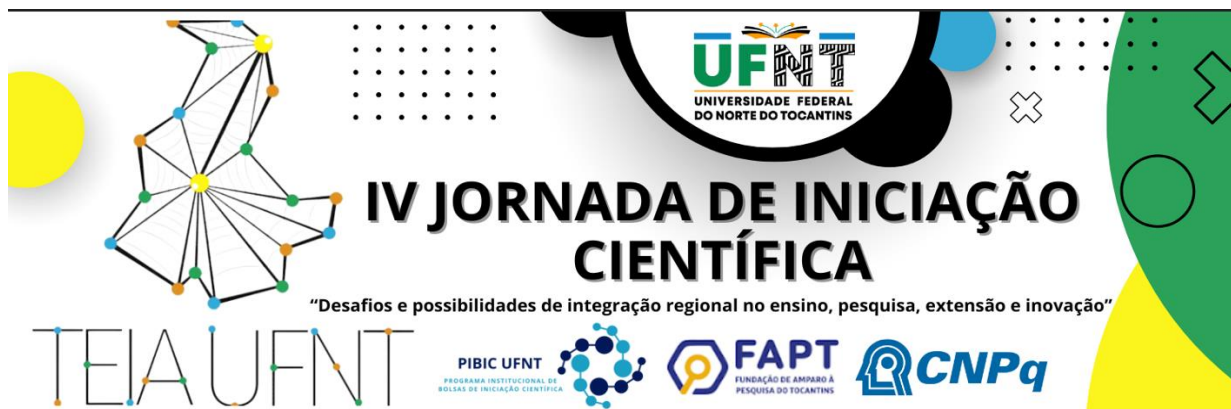
MARANHÃO NETO, Raimundo Cavalcante. Estudo Qualitativo de Equações Diferenciais Binárias Cúbicas. 2022. Tese (Doutorado em Matemática) — Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2022.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 1: Conjuntos e Funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

> THOMAS, George B.; FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. Cálculo. 10. ed. v. 1. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

VIII. AGRADECIMENTOS

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Tocantins (FAPT) pelo apoio ao desenvolvimento desta pesquisa, bem como ao meu orientador,



professores, colegas e à Universidade Federal do Norte do Tocantins – UFNT que ofereceu as condições para a realização deste trabalho.