



## ESTUDO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO DE VIGAS CASTELADAS PADRÃO LITZKA COM CHAPA EXPANSORA

### Numerical and experimental analysis of the behavior of Litzka castellated beams with expander plates

Washington Batista Vieira (P) (1); Gustavo de Souza Veríssimo (2);  
José Luiz Rangel Paes (2) Rodrigo Barreto Caldas (3); Ricardo Hallal Fakury (3)

(1) Dr. Prof., Universidade Federal de Itajubá, Campus Itabira, Itabira, MG, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil

Email para Correspondência: [vieira@unifei.edu.br](mailto:vieira@unifei.edu.br); (P) Apresentador

**Resumo:** Neste trabalho são apresentados resultados experimentais e numéricos de ensaios de flexão em vigas casteladas de aço em padrão Litzka com chapa expansora, produzidas a partir de perfis I laminados brasileiros. As análises numéricas foram realizadas utilizando-se o software ABAQUS, por meio do Método dos Elementos Finitos, considerando-se as imperfeições geométricas iniciais do perfil, as tensões residuais do material e o comportamento não-linear geométrico e material da estrutura. Os resultados numéricos obtidos se mostraram concordantes com os resultados experimentais, tanto em termos de carga última e deslocamentos quanto do modo e regime de colapso observado. Em todos os ensaios realizados neste trabalho observou-se a ocorrência da flambagem do montante de alma (FMA). A FMA se deu em regime inelástico na maioria das vigas, mas, houve ocorrência da FMA em regime elástico nas vigas com elevada relação altura-espessura do montante de alma. Os resultados obtidos permitiram a avaliação da influência de imperfeições geométricas iniciais, do material e da esbeltez do montante de alma no comportamento estrutural das vigas casteladas de aço com chapa expansora.

**Palavras chaves:** *casteladas; vigas; modelagem; flambagem.*

**Abstract:** This paper presents experimental and numerical results of bending tests in Litzka castellated steel beams with expander plates, produced from Brazilian hot-rolled I-sections. The numerical analyzes were performed using ABAQUS software, by Finite Element Method, considering the initial geometric imperfections of the profile, the residual stresses of the material and the non-linear geometric and material behavior of the structure. The numerical results obtained showed good agreement with the experimental results, in terms of ultimate load, displacements and failure modes. In all the tests carried out in this work, we observed the occurrence of web-post buckling (WPB). WPB occurred in inelastic regime in most of the beams, but, there was occurrence of WPB in the elastic regime in the beams with a high height-thickness ratio of the web-post. The results obtained allowed the evaluation of the influence of initial material and geometrical imperfections, as well as the web-post slenderness in the behavior of castellated steel beams with expander plates.

**Keywords:** *castellated; beams; modelling; buckling.*

## 1 INTRODUÇÃO

As vigas casteladas de aço surgiram na década de 1930, para atender a necessidade de elementos estruturais com inércia à flexão superior à dos perfis laminados. Usualmente, são obtidas a partir de perfis I ou H, cuja alma é inicialmente cortada longitudinalmente em um traçado periódico e as metades obtidas são soldadas depois de deslocadas de um comprimento. O produto é uma peça com uma sequência regular de aberturas hexagonais ao longo da alma, com altura da seção transversal – e, conseqüentemente, o momento de inércia – superior à do perfil original. Quando se deseja aumentar ainda mais a altura da seção transversal, podem ser inseridas chapas de aço entre as metades cortadas, conforme ilustrado na Figura 1. Essas vigas são denominadas vigas casteladas com chapa expansora. Com essa solução tem-se uma viga com maior inércia e a rigidez à flexão, no entanto, a presença da chapa expansora eleva a esbeltez do montante de alma, tornando-o mais susceptível à ocorrência de instabilidades, fazendo com que o colapso relacionado à instabilidade do montante de alma seja o mais importante modo de ruína dessas vigas.



Figura 1. Viga castelada com chapa expansora (Holland Profiel Plus, 2018).

Ao longo do século XX, o encarecimento da mão-de-obra reduziu a competitividade de soluções com vigas casteladas. No entanto, a fabricação dessas vigas voltou a ser economicamente viável com os avanços tecnológicos nas áreas de automação, ressurgindo o interesse pelas vigas casteladas em função de suas vantagens estruturais e arquitetônicas.

Com os recentes avanços nas técnicas de siderurgia e laminação de aço, possibilitou-se a produção de perfis constituídos de chapas mais esbeltas e com maior resistência ao escoamento. Nesses casos, os modos de colapso relacionados à instabilidade das chapas tornam-se ainda mais importantes que para os aços e perfis usuais em meados do século passado, quando se desenvolveu a maior parte das pesquisas referentes ao comportamento estrutural de vigas casteladas de aço.

Neste trabalho são apresentados resultados experimentais e numéricos de vigas casteladas de aço em padrão Litzka com chapa expansora.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Tipologias usuais em vigas casteladas de aço

Em função do traçado do corte, diversas tipologias de vigas casteladas podem ser obtidas, variando-se a distância entre aberturas adjacentes e o ângulo das aberturas. Ao longo do tempo, três tipologias de vigas casteladas se destacaram: Anglo-Saxão, Peiner e Litzka. O padrão Litzka é caracterizado pela regularidade dimensional ao longo do corte: o passo é o triplo da largura mínima do montante ( $p = 3b_w$ ), a projeção horizontal do lado inclinado da abertura é a metade da largura mínima do montante e o alvéolo é um hexágono regular. Na Figura 2 é esquematizado o padrão Litzka, sem chapa expansora e com chapa expansora. A altura da chapa expansora não tem relação com as demais propriedades dimensionais.

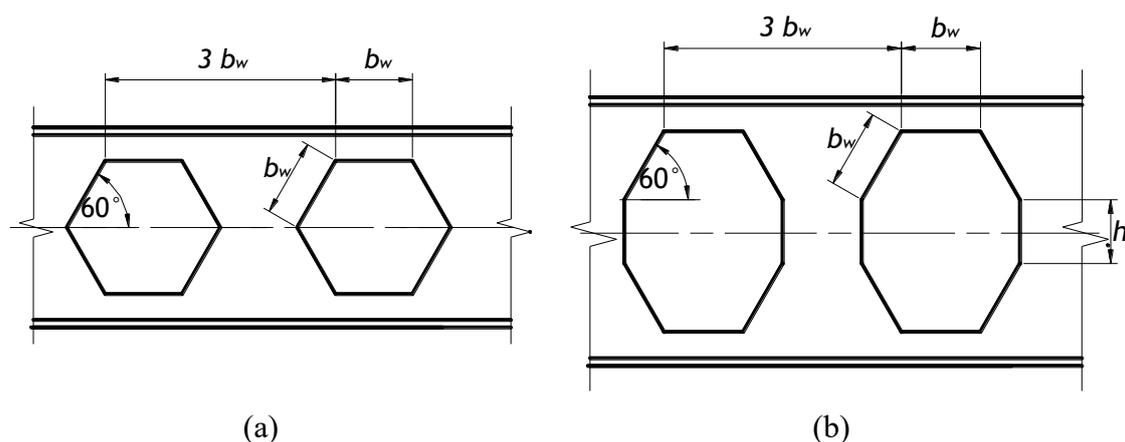


Figura 2: Viga castelada em padrão Litzka (a) sem e (b) com chapa expansora.

## 2.2 Modos de colapso relacionados às vigas casteladas de aço

Os modos de colapso observados em vigas casteladas submetidas a ensaios de flexão são:

- a) a formação de um mecanismo plástico decorrente do momento fletor no centro do vão, observado por Toprac e Cooke (1959) e Halleux (1967 *apud* Demirdjian 1999);
- b) flambagem lateral com torção, à semelhança do fenômeno em vigas de alma cheia (estudos experimentais e numéricos foram realizados recentemente pelos seguintes autores: Mohebkhah 2004; Tkalčević, Džeba e Androić 2007; Radić, Markulak and Varevac 2009 e Bezerra *et al.* 2010);
- c) ruptura na região de menor largura do montante de alma, decorrente do fluxo de cisalhamento naquela região;
- d) formação de mecanismo Vierendeel, caracterizado pela formação de quatro rótulas plásticas nos cantos das aberturas, decorrente da combinação momento fletor e esforço cortante - Kerdal e Nethercot (1984) observaram que este modo de colapso ocorre preferencialmente em vigas com vãos pequenos, com alta relação  $b_w/p$  e baixa altura das seções  $T$  acima e abaixo das aberturas em relação à altura expandida do perfil;
- e) flambagem do montante de alma por cisalhamento (FMA) - por analogia com uma viga Vierendeel, o montante de alma de uma viga castelada possui forças internas como mostrado na Figura 4; a força cortante  $F$  ao longo da junta soldada traciona a borda AB e comprime a borda CD do montante, podendo ocasionar a flambagem do montante na direção dessa borda, que é acompanhada de rotação em torno da linha diagonal  $xx'$ .

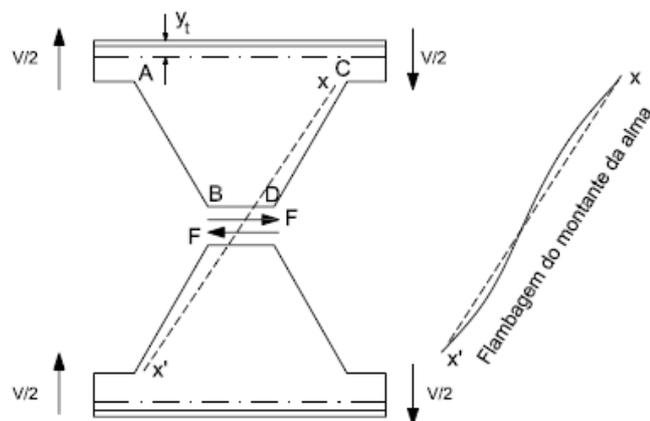


Figura 3. FMA em viga castelada (adaptado de Kerdal e Nethercot 1984).

Em vigas casteladas curtas, onde a capacidade ao esforço cortante é normalmente dimensionante devido à redução de área da alma, e, especialmente em vigas com alma esbelta, o estado-limite de FMA figura como o mais importante. Zaarour e Redwood (1996), Redwood e Demirdjian (1998) e Vieira (2015) observaram esse modo de colapso experimentalmente.

## 3 PROGRAMA EXPERIMENTAL

### 3.1 Características dos modelos experimentais

As vigas ensaiadas foram projetadas seguindo-se os seguintes critérios: utilização de um perfil laminado de uma série fabricada no Brasil, com dimensões e condições de contorno tais que fossem impedidos os modos de colapso de mecanismo por flexão, FLT e ruptura do montante de alma por cisalhamento. Para isso, foram produzidas três pares de vigas em padrão Litzka com uma chapa expansora de 150 mm, fabricadas a partir dos perfis W310x21,0, W310x28,3 e W310x52 produzidos pela Gerdau em aço ASTM A572-Grau 50. Na Tabela 1 são apresentadas as propriedades geométricas reais das vigas, obtidas por medição.

Tabela 1. Características geométricas medidas nos modelos ensaiados (dimensões em milímetros).

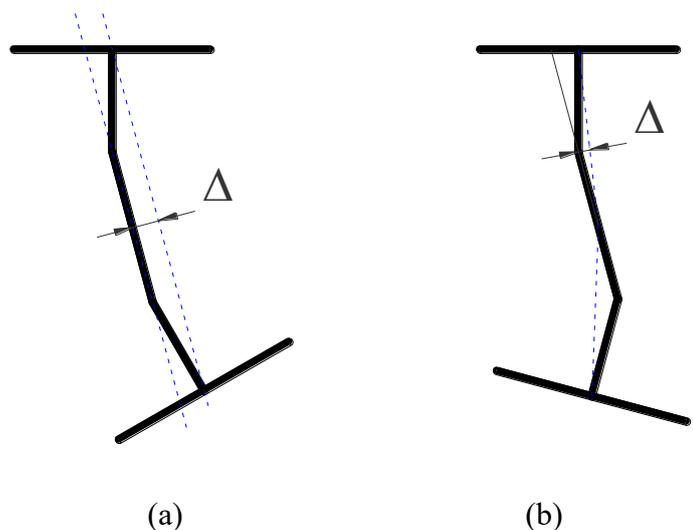
Modelo	$d_g$	$b_f$	$t_f$	$t_w$	$h_o$	$b_w$	$p$	$h_p$	Vão
C1	601,2	101,6	6,0	5,1	452	175,5	525,3	151	2273
C2	600,6	103,0	6,3	5,1	451	176,1	526,1	151	2270
C3	612,8	100,6	9,1	6,6	451	180,2	535,7	152	2320
C4	610,6	101,7	9,2	6,5	457	178,7	534,8	147	2320
C5	623,6	171,5	12,4	8,0	466	183,0	551,4	146	2378
C6	623,4	170,2	13,1	7,9	467	183,0	550,0	150	2375

Para a obtenção dos valores reais de resistência ao escoamento do material, foram extraídas e ensaiadas amostras do aço dos perfis após os ensaios. As amostras foram retiradas de regiões que aparentam não ter sofrido plastificação durante o ensaio. Esses resultados são apresentados na Tabela 2. Não foram extraídas amostras das vigas C2 e C6, visto que eram vigas idênticas às vigas C1 e C5, respectivamente, e vieram do mesmo lote de perfis de seus pares.

Tabela 3. Resistência ao escoamento do aço das vigas ensaiadas.

Viga	Chapa	$f_y$ MPa
C1	Alma	350
	Mesa	357
C3	Alma	360
	Mesa	345
C4	Alma	428
	Mesa	353
C5	Alma	449
	Mesa	416

Na Figura 4 são apresentados os perfis característicos de imperfeição inicial nas vigas e uma foto de um montante de alma com imperfeição elevada, antes do ensaio. Na Tabela 3 são apresentados os valores medidos da imperfeição inicial. Tomando como referência a tolerância de  $d_g/100$ , usualmente adotada para vigas alveolares (ArcelorMittal, 2013), as vigas mais esbeltas (C1 e C2) estariam fora do limite de tolerância.



(c)

Figura 4. Imperfeição inicial: perfis característicos de imperfeição na seção de vigas com chapa expansora: (a) tipo A e (b) tipo B; e (c) montante de alma antes do ensaio (perfil tipo B).

Tabela 3. Imperfeição inicial medida no montante de alma.

Viga	Perfil de imperfeição	$\Delta$ (mm)	$\Delta/dg$
C1	(B)	16,99	1/35
C2	(B)	27,15	1/22
C3	(A)	0,75	1/819
C4	(A)	3,63	1/168
C5	(B)	4,48	1/139
C6	(B)	3,65	1/171

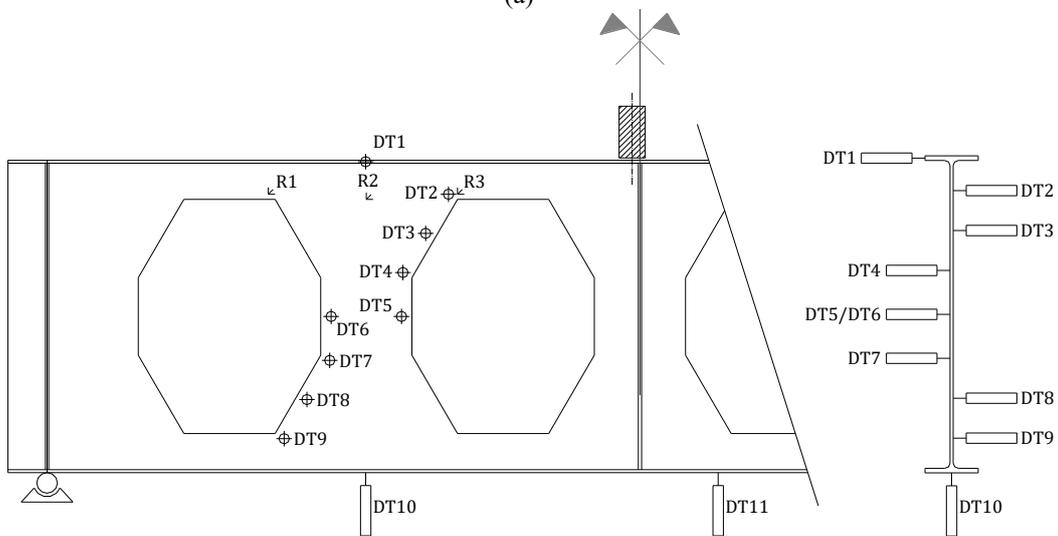
### 3.2 Metodologia dos ensaios

As vigas foram ensaiadas simplesmente apoiadas com vínculos de garfo nos apoios e centro do vão. O carregamento foi aplicado por um atuador com capacidade de 1500 kN, com distribuição sobre uma chapa de 150 mm de largura e 19,4 mm de espessura e com uma excentricidade em relação ao centro do vão, na direção do montante instrumentado, para induzir o colapso daquele lado da viga. O valor da excentricidade foi de 24 mm nas vigas C5 e C6 e 15 mm nas demais. Os ensaios foram realizados com controle de deslocamento, a uma taxa de 0,02 mm/s. Na Figura 5a podem ser observadas as condições de contorno e de carregamento características das vigas ensaiadas.

A instrumentação das vigas consistiu de: (a) 8 LVDTs de deslocamento em um dos montantes para medição dos deslocamentos laterais, seguindo a diagonal comprimida; (b) 1 LVDT para medição dos deslocamentos verticais sob esse montante; (c) 1 LVDT para medir os deslocamentos laterais da mesa superior na seção central desse montante e (d) 1 LVDT para medir os deslocamentos verticais próximo ao centro do vão. A viga foi posicionada de modo que o montante com maior imperfeição inicial fosse instrumentado. O transdutor para medição da flecha foi posicionado a uma distância de 150 mm do centro do vão (exceto para a viga C4, que o transdutor foi posicionado a 154 mm do centro do vão), do lado oposto ao do montante instrumentado (DT11, na Figura 5b) – o posicionamento do vínculo de garfo central não permitiu o posicionamento desse transdutor na seção do centro do vão. Foram instaladas três rosetas de extensômetros no montante instrumentado, como pode ser visto na Figura 5b.



(a)



(b)

Figura 5. Ensaio: (a) montagem padrão e (b) esquema de instrumentação.

### 3.3 Resultados

Todas as vigas sofreram colapso por FMA, sendo que o par de alma mais esbelta (C1 e C2) sofreu flambagem ainda em regime elástico. Os resultados são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4. Resultados do programa experimental.

Modelo	Força máxima (kN)	Deslocamento na força máxima (mm)	Observações
C1	138	10,1	A FMA iniciou em regime elástico, antes do início da plastificação. No entanto, a plastificação dos cantos dos alvéolos ocorreu ainda antes da carga máxima (carga pós-flambagem).
C2	144	10,3	A FMA ocorreu em regime inelástico, após o início da plastificação nos cantos dos alvéolos, e antes da carga máxima. Os resultados indicam a plastificação do montante após a carga máxima.
C3	229	8,8	O comportamento parece ter sido similar ao da viga C3. Entretanto, a FMA ocorreu do lado não-instrumentado da viga.
C4	260	9,5	A FMA ocorreu em regime inelástico, após o início da plastificação nos cantos dos alvéolos, e antes da carga máxima. Os resultados indicam a plastificação do montante após a carga máxima.
C5	386	11,7	
C6	384	12,3	

Nos gráficos da Figura 6 são apresentadas as curvas momento versus deslocamento vertical para os pares C1/C2, C3/C4 e C5/C6. Nota-se uma similaridade entre os resultados dos pares C1-C2 e C5-C6. Para o par C3-C4, a diferença da ordem de 14% entre os resultados de carga máxima pode ser explicada principalmente pela diferença na resistência do material (ver Tabela 2).

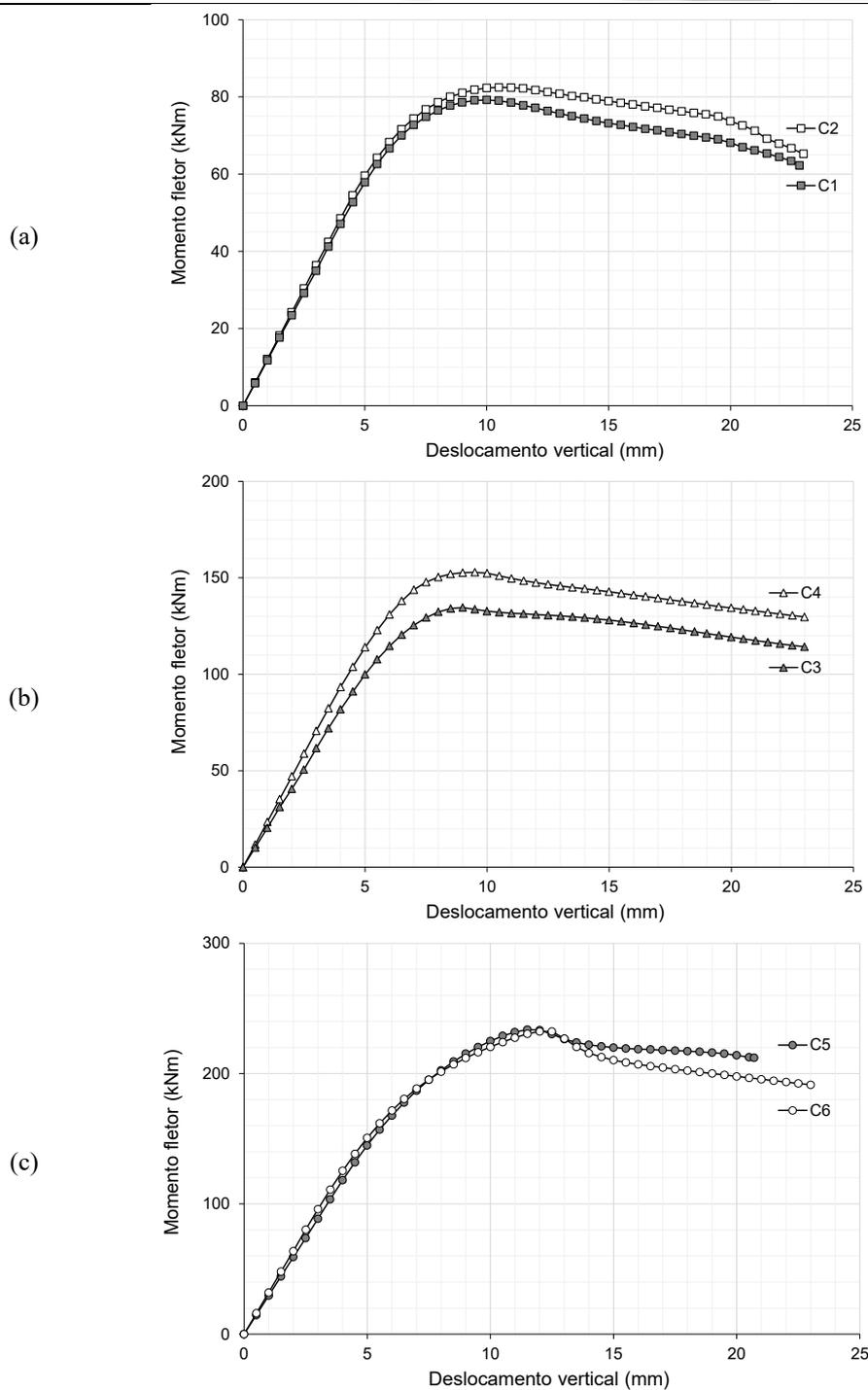


Figura 6. Curvas momento fletor *versus* deslocamento vertical nos pares de ensaios (a) C1/C2; (b) C3/C4 e (c) C5/C6.

## 4 ESTUDO NUMÉRICO

### 4.1 Modelo Numérico

As análises numéricas foram realizadas pelo Método dos Elementos Finitos, no ABAQUS, considerando-se as não-linearidades geométrica e material e as imperfeições geométricas iniciais associadas a uma análise elástica de flambagem. Adotou-se um modelo geométrico tridimensional, formado por elementos de casca fina do tipo deformável e o carregamento foi aplicado como uma força puntual na mesa superior, na seção do centro do vão, utilizando o algoritmo Riks modificado (método do comprimento de arco). Utilizou-se um modelo constitutivo elastoplástico perfeito para o aço, considerando o módulo de elasticidade igual a 200 GPa. Foram utilizados elementos finitos de casca fina, dos tipos S3 e S4R do ABAQUS com elementos de largura igual a 10 mm.

A análise não linear inicia com a deformada obtida da análise de flambagem, escolhendo-se o autovetor de menor energia de deformação que tenha deformada característica da flambagem do montante de alma e que seja relacionado a um autovalor positivo. A essa deformada inicial atribui-se o valor máximo igual ao valor da imperfeição inicial medida na viga castelada. Esse método de inserção das imperfeições iniciais representa uma aproximação, uma vez que a configuração original do montante, devido às imperfeições iniciais, geralmente não corresponde à forma da deformada da flambagem dos montantes. Essa estratégia foi considerada adequada uma vez que os resultados obtidos foram coerentes com os resultados experimentais.

As tensões residuais foram consideradas utilizando a distribuição proposta por Vieira et al. (2015), em que se considera um valor constante de tensão de compressão na alma e um valor constante de tensão de tração nas mesas, dados respectivamente pelas expressões:

$$f_{r,alma} = \frac{100}{9} \frac{t_w(d-t_f)}{t_f b_f} + \frac{230}{3} \quad (1)$$

$$f_{r,mesa} = \frac{225}{4} \frac{t_w(d-t_f)}{t_f b_f} - \frac{25}{3} \quad (2)$$

Onde

h = altura da alma do perfil original

tw = espessura da alma

tf = espessura da mesa

bf = largura da mesa

Esse modelo admite que as tensões residuais aliviadas no processo de corte do perfil são recuperadas durante a soldagem da viga castelada. No entanto, para aquelas vigas que possuíam imperfeição inicial do montante de alma superior a 1,5% da altura da seção



castelada, decorrentes da fabricação (caso das vigas C1 e C2), os resultados numéricos foram melhores quando não se considerou tensões residuais na alma do perfil, indicando que possivelmente não foram reintroduzidas tensões residuais na alma durante o processo de soldagem. Portanto, nesse caso, admitiu-se a alma livre de tensões residuais.

## 4.2 Análises e resultados numéricos

Na Tab. 6 são apresentados comparativamente os resultados numéricos e experimentais dos ensaios realizados em termos de força máxima aplicada.

Tabela 6. Carga última no modelo numérico em comparação com o modelo experimental.

Ensaio	$P_{max.exp}$ (kN)	$P_{max.num}$ (kN)	$P_{max.exp}/P_{max.num}$
C1	137,68	137,65	1,00
C2	143,55	134,98	1,06
C3	229,16	252,95	0,91
C4	260,37	259,17	1,00
C5	385,74	401,06	0,96
C6	384,44	402,44	0,96
	Média		0,98
	Desvio Padrão		0,049
	Coefficiente de variação		5,0%

O modelo numérico também representou o comportamento das vigas durante o ensaio, sendo possível notar o modo de colapso. Na Figuras 7a e 8a são apresentadas fotos da deformada caracterizando a FMA após a carga máxima nos ensaios experimentais das vigas C2 e C5, respectivamente. Ao lado de cada foto são apresentadas as respostas do modelo numérico para o instante correspondente (Figuras 7b e 10b, respectivamente). A similaridade entre os resultados numérico e experimental quanto ao modo de colapso foi observada em todos os ensaios.

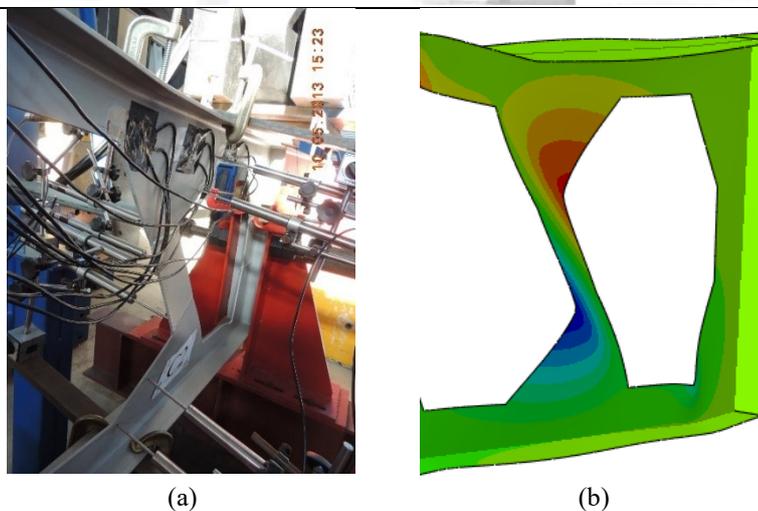


Figura 7. Viga C2, após a carga máxima, com destaque para a ocorrência da FMA, (a) no modelo experimental e (b) no modelo numérico.

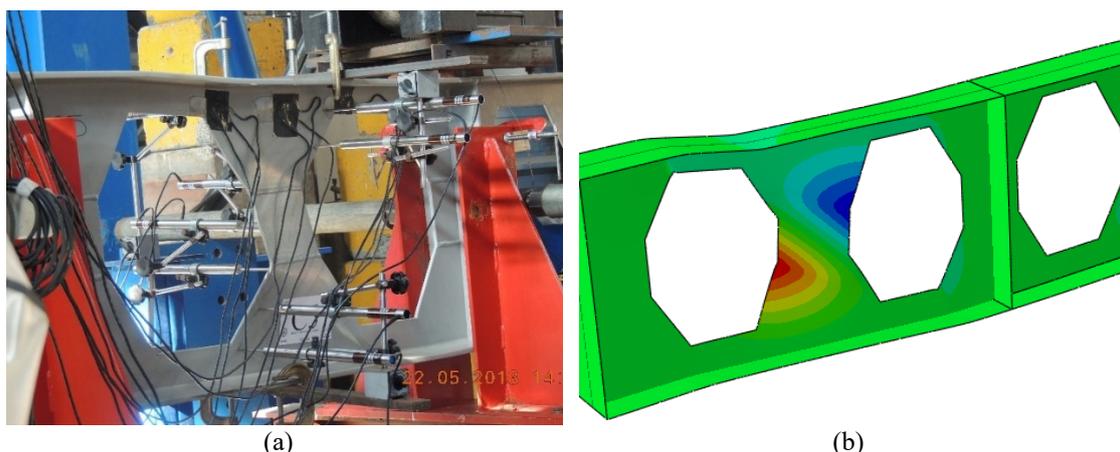


Figura 8. Viga C5, após a carga máxima, com destaque para a ocorrência da FMA, (a) no modelo experimental e (b) no modelo numérico.

## 5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Dos três pares de vigas ensaiados, notou-se similaridade no comportamento dos grupo de vigas C1-C2 (Fig. 6a), e C5-C6 (Fig. 6c). As pequenas diferenças nos resultados desses pares parecem ser devidas às pequenas diferenças na geometria e ao nível de imperfeição inicial.

No par de ensaios C3-C4, o momento fletor resistente da viga C4 foi 14% superior ao da viga C3 (Fig. 6b). Essa diferença é devida principalmente ao material: o  $f_y$  do aço da viga C4 é cerca de 19% superior ao do aço da viga C3 (Tab. 2).

No grupo C1-C2, em que a esbelteza da alma é elevada ( $d_g/t_w \approx 119$ ), devido à baixa espessura da alma e à chapa expansora, observou-se a FMA em regime elástico.



Tendo em vista o elevado valor de imperfeição inicial no montante de alma das vigas C1 e C2, a percepção visual do início da instabilidade do montante durante o ensaio experimental ocorreu quando da retificação da diagonal tracionada do montante. O início da FMA foi observado antes do início da plastificação de qualquer parte da viga (mesmo nas regiões de concentração de tensões, onde foram instaladas as rosetas de extensômetros, as tensões eram muito inferiores à tensão de plastificação), indicando a ocorrência da flambagem em regime elástico. Na análise numérica, observou-se que a carga máxima na análise não-linear foi muito próxima ao valor obtido da análise de flambagem elástica, indicando a flambagem elástica.

Nos grupos de vigas C3/C4 e C5/C6, que possuíam relação  $dg/tw$  igual a 102 e 82, respectivamente, o colapso se deu por flambagem do montante de alma em regime inelástico.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados resultados experimentais parciais de um programa experimental e de um modelo numérico para os mesmos ensaios. Foram apresentados os resultados de um grupo de seis vigas casteladas de aço com chapa expansora, fabricadas em padrão Litzka, a partir de três perfis da série W310 (o mais esbelto, o menos esbelto e um intermediário).

Observou-se que há uma relação entre a esbeltez da alma (razão  $dg/tw$ ) e a rigidez da viga castelada: quanto menor a esbeltez da alma, maior a rigidez da viga aos deslocamentos verticais. Uma vez que foram ensaiadas amostras de aço em duas vigas do mesmo grupo de ensaios (C3/C4), observou-se a influência da resistência do material na capacidade resistente da viga.

Quanto ao modo de colapso, ocorreu a flambagem do montante de alma em todos os ensaios, sendo flambagem em regime elástico nas vigas de alma mais esbelta (C1 e C2) e em regime inelástico nas demais vigas. A obtenção de resultados de ensaios experimentais nos dois regimes de flambagem é significativamente importante para a validação de novos modelos de cálculo para as vigas casteladas, abrangendo maior espectro de esbeltez de alma, uma vez que os modelos de cálculo apresentados na literatura foram ajustados a partir de resultados experimentais de FMA em regime inelástico, apesar de terem sido desenvolvidos com base na teoria de flambagem elástica.

A obtenção de resultados de ensaios experimentais em que se observa a FMA em regime elástico é significativamente importante para a validação de novos modelos de cálculo para as vigas casteladas, abrangendo maior espectro de esbeltez de alma, uma vez que os modelos de cálculo apresentados na literatura foram ajustados a partir de resultados experimentais de FMA em regime inelástico, apesar de terem sido desenvolvidos com base na teoria de flambagem elástica.



## **AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem à FAPEMIG pelo suporte financeiro, à UFMG, à UFV e à UNIFEI.

## **REFERÊNCIAS**

- ArcelorMittal, 2013. Angelina™ beams: *A new generation of castellated beams*.
- Bezerra, E. M.; Fakury R.H.; Castro e Silva A.L.R. e Caldas R.B., 2010. Determinação do momento fletor resistente a flambagem lateral com torção de vigas de aço casteladas. *XXXIV Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*: Argentina.
- Demirdjian, S., 1999. *Stability of Castellated Beam Webs*. Master Thesis. McGill University, Montreal, Canadá.
- Holland Profiel Plus, 2018. Acessado em 25/07/2018. Página da web: <http://www.hollandprofielplus.nl/>
- Kerdal, D. and Nethercot D. A., 1984. Failure modes for castellated beams. *Journal of Constructional Steel Research*. 295-315.
- Mohebkah, A., 2004. The moment-gradient factor in lateral-torsional buckling on inelastic castellated beams. *Journal of Constructional Steel Research*. 60:1481-1494.
- Radić, I.; Markulak D. and Varevac D., 2009. Utjecaj vrste bočnih pridrzanja na otpornost sačastih nosača na bočno-torzijsko izvijanje. *Technical Gazette*. 16:9-17.
- Redwood, R. G. and Demirdjian, S., 1998. Castellated beam web buckling in shear. *Journal of Structural Engineering*. 124:1202-1207.
- Tkalčević, V.; Džeba I. and Androić B., 2007. Pouzdanost sačastih nosača na bočno-torzijsko izvijanje. *Građevinar*. 59:311-318.
- Toprac, A. A. and Cooke, B. R., 1959. An Experimental Investigation of Open-Web Beams. *Welding Research Council*.
- Vieira, W. B., 2015. *Estudo numérico-experimental da flambagem do montante de alma em vigas casteladas de aço*. Tese de Doutorado, UFV. Viçosa.
- Vieira, W. B.; Veríssimo, G. S.; Ribeiro, J. C. L. e Paes, J. L. R., 2015. Simulação numérica do comportamento estrutural de vigas casteladas de aço com ênfase na flambagem do montante de alma. *Ciência & Engenharia (Science & Engineering Journal)*. 24(1): 105-113.
- Zaarour, W. J. and Redwood, R.G., 1996. Web Buckling in Thin Webbed Castellated Beams. *Journal of Structural Engineering*. 860-866.