



## MODELAGEM MATEMÁTICA EM SISTEMAS DINÂMICOS: ANÁLISE DOS PARÂMETROS E RESOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O ATRACTOR DE LORENZ

### Mathematical Modeling in Dynamic Systems: Analysis of Parameters and Numerical Resolution for the Lorenz Attractor

Davi Henrique Salvador Pereira dos Santos (1)(P); Nelson Machado Barbosa (2);

(1) Licenciando em Física, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campo dos Goytacazes - RJ, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campo dos Goytacazes - RJ, Brasil.  
Email para Correspondência: davihf@pq.uenf.br ; (P) Apresentador

**Resumo:** Os estudos dos fenômenos climáticos vêm sendo de grande relevância em dias atuais. Em virtude do desenvolvimento industrial, o aquecimento global tem tornado-se a cada ano mais intenso e crescente, proporcionando a ocorrência de catástrofes climáticas, trazendo inúmeras consequências para humanidade. A natureza por sua vez, se comporta na maioria das vezes de forma imprevisível, ou com certo grau de dificuldade na previsibilidade quando se altera alguma condição inicial do sistema que está sendo analisado, visto que fenômenos destes gêneros se enquadram com perfeição no grupo dos sistemas dinâmicos. Em vista dessa importância, este trabalho tem como objetivo principal testar um método numérico que modela de forma apropriada problemas dinâmicos, em especial o Atractor de Lorenz, o qual é modelado por um sistema de equações diferenciais não linear, tridimensional e determinístico, fundamental para o processamento e estimativas de fenômenos naturais. Foi escolhido o Método de Adams-Bashforth de 4ª ordem, pela robustez e eficiência, além disso, o método em questão é classificado como do tipo *multistep*, ou seja, composto de um esquema explícito (preditor) e de outro implícito (corretor). Para verificar a convergência do método, foi necessária uma análise sobre os parâmetros presentes neste tipo de sistema dinâmico. O esquema de Adams-Bashforth de 4ª ordem simulou de forma apropriada as Equações de Lorenz, sendo recomendado a sua utilização para esses tipos de sistemas de dinâmicos.

*Palavras chaves:* sistemas dinâmicos; atractor de lorenz; método de Adams-bashforth.

**Abstract:** Studies of climatic phenomena have been of great relevance in current days. As a result of the industrial development, global warming has become more intense and growing every year, causing the occurrence of natural disasters, bringing countless consequences for humanity. Nature, for its part, behaves in the most unpredictable ways or with a certain degree of difficulty in predictability when some initial condition of the system analyzed is changed, since phenomena of these genres fit perfectly in the group of dynamic systems. Considering this importance, this scientific work has as main



objective to test a numerical method that appropriately models dynamic problems, especially the Attractor of Lorenz, which is modeled by a system of nonlinear differential equations, three-dimensional and deterministic, fundamental for the processing and estimation of natural phenomena. The fourth-order Adams-Bashforth Method was chosen for its robustness and efficiency, and the method in question is classified as multistep, that is, composed of an explicit (predictor) and implicit (broker) scheme. To verify the convergence of the method, it was necessary to analyze the parameters present in this type of dynamic system. The fourth-order Adams-Bashforth scheme appropriately simulated the Lorenz Equations, and its use is recommended for these types of dynamical systems.

**Keywords:** *dynamic systems, Lorenz attractor, numerical schemes*

## 1 INTRODUÇÃO

Diversos problemas encontrados na biologia, física, química e outras ciências podem ser modelados por equações diferenciais. Contudo, a grande maioria das soluções de equações obtidas na prática não podem ser expressas através de funções elementares ou mesmo resolvidas analiticamente. Nestes casos podemos utilizar os métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas. Neste trabalho vamos testar o esquema numérico de Adams-Bashforth de 4ª ordem para simular o Atrator de Lorenz.

O Atrator de Lorenz é um modelo de convecção de fluido induzida termicamente na atmosfera e publicado por E.N Lorenz (um cientista atmosférico) de M.I.T. em 1963. No modelo matemático de convecção de Lorenz, três estados variaram ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). A variável  $x$  é proporcional à amplitude da velocidade do fluido circulante no anel de fluido, representando no sentido horário (quando positivo) e anti-horário (quando negativo). A variável  $y$  é a diferença de temperatura entre os fluidos e a variável  $z$  é a distorção da linearidade da temperatura vertical.

O modelo se baseia em um sistema dinâmico, sendo contínuo no tempo, mas uma modificação do contínuo, pode apresentar uma equação de recorrência quadrática discreta, conhecida como o mapa de Lorenz, tornando a implementação computacional mais sensível aos parâmetros. O modelo do Atrator de Lorenz é descrito pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(x - y) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + \rho x - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (1)$$

Em que “ $\alpha$ ” se chama o número de Prandtl e “ $\rho$ ” se chama o número de Rayleigh. E  $\alpha; \rho; \beta > 0$ .

A principal propriedade desse sistema dinâmico é a dissipação. Os parâmetros adimensionais, “Número Prandtl” é um parâmetro que aproxima a razão da difusividade de momento (viscosidade cinemática) e a difusividade térmica de um fluido. O número de Rayleigh, está associado com os fluxos conduzidos por empuxo (convecção natural), o qual descreve a relação entre flutuabilidade e viscosidade dentro de um fluido. O parâmetro  $\beta$  está relacionado ao número da onda horizontal das moções convectivas.

Em 1963, Lorenz observou que sistemas de equações diferenciais não lineares exibem dependência sensível das condições iniciais, ou seja, mudanças muito pequenas nas condições iniciais podem fazer grandes mudanças no comportamento a longo prazo, caracterizando assim um sistema dinâmico. Vale ressaltar que a Eq. (1) é um sistema

tridimensional não linear, possuindo notáveis propriedades não triviais e, portanto, deve ser tratado com métodos especiais. No presente trabalho, será testado o método de Adams-Bashforth de 4ª ordem para obter a solução do Atrator de Lorenz.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O método de Adams-Bashforth/Adams-Moulton é um esquema numérico do tipo *multistep* (preditor e corretor), muito difundido na área acadêmica. A ideia básica deste esquema é aproximar  $f(t, y(t))$  por um polinômio  $P_n(t)$  de grau  $n$  utilizando os  $n+1$  dados calculados anteriormente para determinar os coeficientes do polinômio  $P_n(t)$ . Adiante será abordado as características dos métodos *Multistep* e uma análise do Método de Adams-Bashforth.

### 2.1 Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias do tipo “Multistep”

Os métodos numéricos do tipo multistep é obtida da seguinte maneira: Integrando a solução sobre o intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  obtemos

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

Aproximando  $f(t, y(t))$  por um polinômio  $P_n(t)$  segue que a solução aproximada será dada por

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_n(t) dt$$

Dessa forma podemos dizer que, os métodos multistep são caracterizados pelo fato de precisarmos conhecer apenas o resultado de cada passo anterior para obter o valor da solução numérica do passo seguinte. Sendo assim, podemos obter à sequência dos valores  $y_1; y_2; y_3; \dots; y_n$ , que aproximam o valor de cada ordenada  $y(x_1); y(x_2); y(x_3); \dots; y(x_n)$  da curva solução. No entanto, uma vez conhecidos esses valores aproximados da solução em alguns pontos além de  $x_0$ , podemos usar algumas dessas informações para calcular o valor do passo seguinte. Métodos que utilizam mais informações do que apenas o valor do último passo para obter o valor do próximo passo, são chamados de métodos multistep (passo múltiplo).

### 2.3.1 Método de Adams-Bashforth/Adams-Moulton

Seja  $P_1$  o polinômio de grau 1 que interpola os pontos  $(t_{i-1}, f_{i-1})$  e  $(t_i, f_i)$ , escrito da forma  $P_1=mt+d$ , temos:

$$\begin{cases} P_1(t_i) = f(t_i, y_i) = mt_i + d \\ P_1(t_{i-1}) = f(t_{i-1}, y_{i-1}) = mt_{i-1} + d \end{cases} \quad (2)$$

Resolvendo o sistema (2), encontramos as seguintes expressões:

$$m = \frac{f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1})}{\Delta t} \quad \text{e} \quad d = \frac{f(t_{i-1}, y_{i-1})t_i - f(t_i, y_i)t_{i-1}}{\Delta t}$$

Utilizando a seguinte notação:  $f_n \equiv f(t_n, y_n)$ , segue

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_1(t) dt &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta t} t + \frac{f_{i-1}t_i - f_i t_{i-1}}{\Delta t} \right] dt = \\ &= \frac{f_i - f_{i-1}}{2\Delta t} (t_{i+1}^2 - t_i^2) + \frac{f_{i-1}t_i - f_i t_{i-1}}{\Delta t} (t_{i+1} - t_i) = \\ &= \frac{f_i t_{i+1}^2 - f_{i-1} t_{i+1}^2 - f_i t_i^2 + f_{i-1} t_i^2}{2\Delta t} + \frac{f_{i-1} t_i t_{i+1} - f_{i-1} t_i^2 - f_i t_{i-1} t_{i+1} + f_i t_i t_{i-1}}{\Delta t} = \\ &= \frac{f_i t_{i+1}^2 - f_{i-1} t_{i+1}^2 - f_i t_i^2 + f_{i-1} t_i^2 + 2f_{i-1} t_i t_{i+1} - 2f_{i-1} t_i^2 - 2f_i t_{i-1} t_{i+1} + 2f_i t_i t_{i-1}}{2\Delta t} = \\ &= \frac{f_i t_{i+1}^2 - f_{i-1} t_{i+1}^2 - f_i t_i^2 - f_{i-1} t_i^2 + 2f_{i-1} t_i t_{i+1} - 2f_i t_{i-1} t_{i+1} + 2f_i t_i t_{i-1}}{2\Delta t} \end{aligned}$$

Se  $t_{i-1} = t_i - \Delta t$ , segue que:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} p(t) dt &= \frac{1}{2\Delta t} \left[ \frac{f_i t_i^2 + 2\Delta t f_i t_i + f_i \Delta t^2 - f_{i-1} t_i^2 - 2\Delta t f_{i-1} t_i - f_{i-1} \Delta t^2 - f_i t_i^2 - f_{i-1} t_i^2}{\Delta t} \right. \\ &\quad \left. + 2f_{i-1} t_i^2 + 2\Delta t f_{i-1} t_i - 2f_i t_i^2 - 2\Delta t^2 f_i + 2f_i t_i^2 - 2\Delta t f_i t_i \right] = \frac{3f_i - f_{i-1}}{2} \Delta t \end{aligned}$$

Portanto o esquema numérico de Adams de 2ª ordem é dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{2} [3f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1})] \quad (2)$$

Procedendo de forma análoga para um polinômio de grau 3, obtém-se o método de Adams de 4ª ordem, como mostra a Eq. 3.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{24} [55f(t_i, y_i) - 59f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, y_{i-3})] \quad (3)$$

Neste trabalho, testaremos a Eq.3 para a Equação de Lorenz e será utilizado a fórmula de Adams-Moulton para o passo corretor.

A Equação (2.2), requer o conhecimento dos valores de  $y_0; y_1; y_2; y_3$  para que possamos obter  $y_4$ . O valor de  $y_0$  é a própria condição inicial dada e os valores de  $y_1; y_2; y_3$ , a exemplo da Equação (2.3) podem ser obtidos por meio do método de Runge-Kutta.

### 2.3.2 Consistência do Método Adams-Bashforth/Adams-Moulton

O método de Adams de 4ª ordem é do tipo preditor e corretor. Esses tipos de esquemas numéricos são conhecidos como métodos Multistep. A forma mais geral de um método (n+1) multistep é dado pela equação:

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^n \alpha_j y_{i-j} + \Delta t \sum_{j=-1}^n \beta_j f_{i-j} \quad \forall i \geq n$$

Para  $\beta_{-1} \neq 0$  obtemos um esquema implícito e para  $\beta_{-1} = 0$  um esquema explícito. O erro de truncamento é dado por:

$$\begin{aligned} E_T &= y_E(t_{i+1}) - y_{i+1} = y_E(t_{i+1}) - \left[ \sum_{j=0}^n \alpha_j y_{i-j} + \Delta t \sum_{j=-1}^n \beta_j f_{i-j} \right] = \\ &= y_E(t_{i+1}) - \left[ \sum_{j=0}^n \alpha_j y_{i-j} + \Delta t \sum_{j=-1}^n \beta_j y'_{i-j} \right] \end{aligned}$$

Onde  $y_E$  é a solução exata. Substituindo a solução aproximada pela solução exata e expandindo em Série de Taylor, temos a seguinte expressão para o erro de truncamento:

$$E_T \approx \sum_{r=0}^m y_E^r(t_{i+1}) \frac{\Delta t^r}{r!} - \left[ \sum_{j=0}^n \alpha_j \sum_{r=0}^m y_E^r(t_{i+1}) \frac{(-j\Delta t)^r}{r!} + \Delta t \sum_{j=-1}^n \beta_j \sum_{r=0}^{m-1} y_E^{r+1}(t_{i+1}) \frac{(-j\Delta t)^r}{r!} \right]$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} E_T &\approx \left[ 1 - \sum_{j=0}^n \alpha_j \right] y_E + \left[ 1 + \left( \sum_{j=0}^n j\alpha_j + \sum_{j=-1}^n \beta_j \right) \right] \Delta t y'_E + \\ &+ \sum_{r=2}^m \left[ 1 - \sum_{j=0}^n \alpha_j (-j)^r - r \sum_{j=-1}^n \beta_j (-j)^{r-1} \right] \Delta t y_E^r \end{aligned}$$

Do resultado anterior e da condição abaixo para que um método numérico seja consistente, então as seguintes igualdades abaixo devem ser verificadas:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_T}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1 \wedge \sum_{j=-1}^n \beta_j - \sum_{j=0}^n j \alpha_j = 1$$

### 3 RESULTADOS

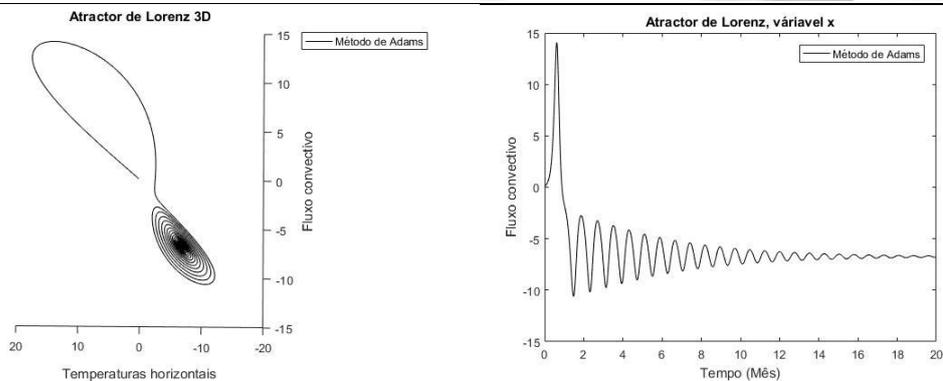
Foi modelado o atrator de Lorenz usando o método de Adams-Bashforth de 4ª ordem. O modelo matemático de Lorenz é usado para convecção, são usados três variáveis ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). A variável  $x$  é proporcional a amplitude da velocidade de circulação do fluido, quando tem valor positivo representa movimento do fluido no sentido horário e o sentido anti-horário e representado pelo valor negativo. A diferença de temperatura no topo ou embaixo é representada pela variável  $y$ . A distorção advinda da linearidade do perfil de temperatura vertical é representada pela variável  $z$ .

O modelo de Lorenz pode ser discretizado da seguinte forma: (Song, W, Liang, J. 2013)

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \alpha(x_k - y_k)\Delta t \\ y_{k+1} = y_k + (-x_k z_k + \rho x_k - y_k)\Delta t \\ z_{k+1} = z_k + (x_k y_k - \beta z_k)\Delta t \end{cases} \quad (3)$$

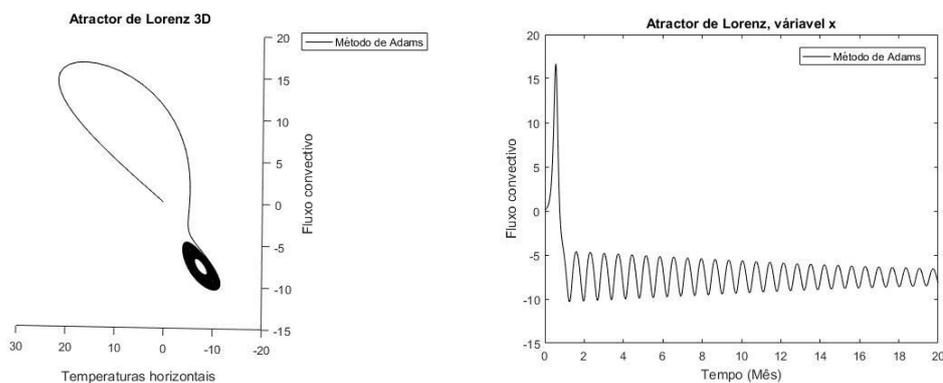
#### 3.1 Simulação 1

Nessas simulações os valores iniciais foram  $T_f = 20$ ,  $dt = 0.01$ ,  $n = 4$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 8/3$  e  $\rho$  foi sendo variado. (Song, W, Liang, J. 2013)



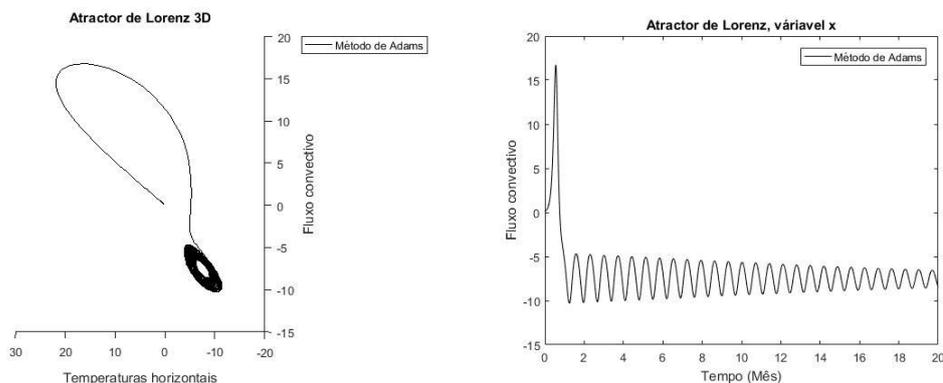
**Figura 1.** Atrator de Lorenz 3D à esquerda e fluxo convectivo X tempo à direita para  $\rho = 18$ .

Fonte: (Autor, 2018)



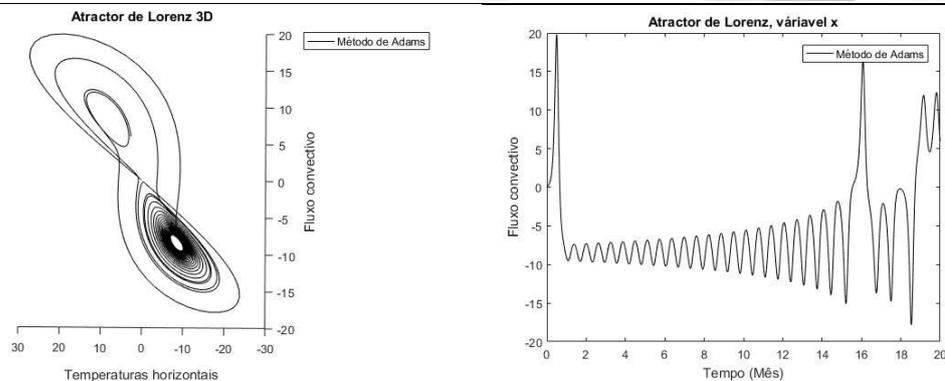
**Figura 2.** Atrator de Lorenz 3D à esquerda e fluxo convectivo X tempo à direita para  $\rho = 22.30$ .

Fonte: (Autor, 2018)



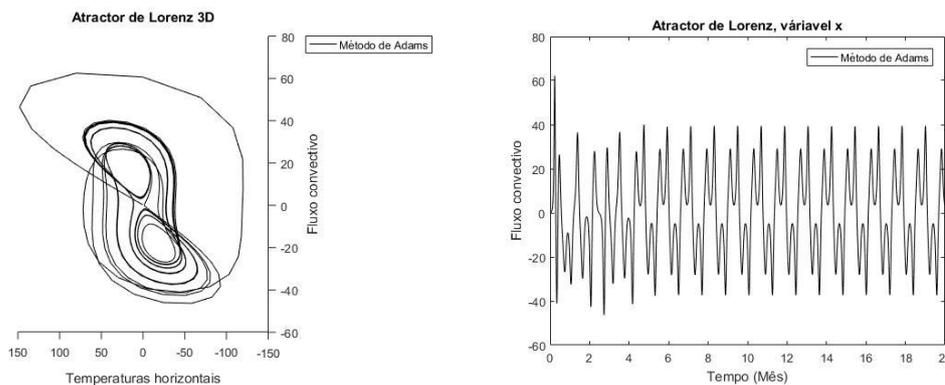
**Figura 3.** Atrator de Lorenz 3D à esquerda e fluxo convectivo X tempo à direita para  $\rho = 22.40$ .

Fonte: (Autor, 2018)



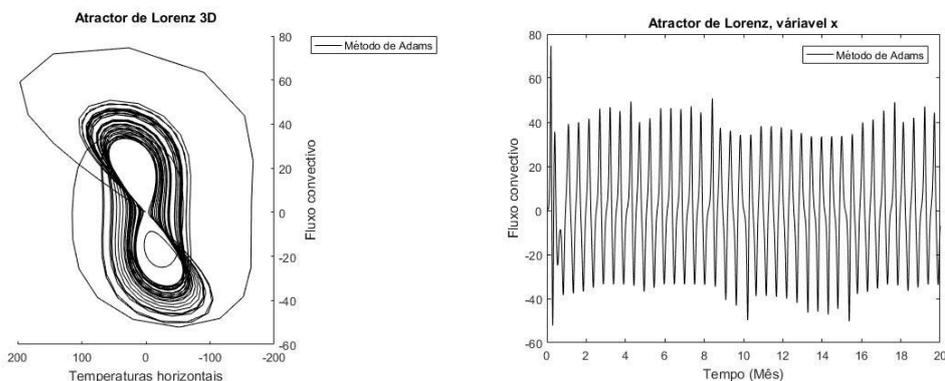
**Figura 4.** Atrator de Lorenz 3D à esquerda e fluxo convectivo X tempo à direita para  $\rho = 28$ .

Fonte: (Autor, 2018)



**Figura 5.** Atrator de Lorenz 3D à esquerda e fluxo convectivo X tempo à direita para  $\rho = 150.00$ .

Fonte: (Autor, 2018)



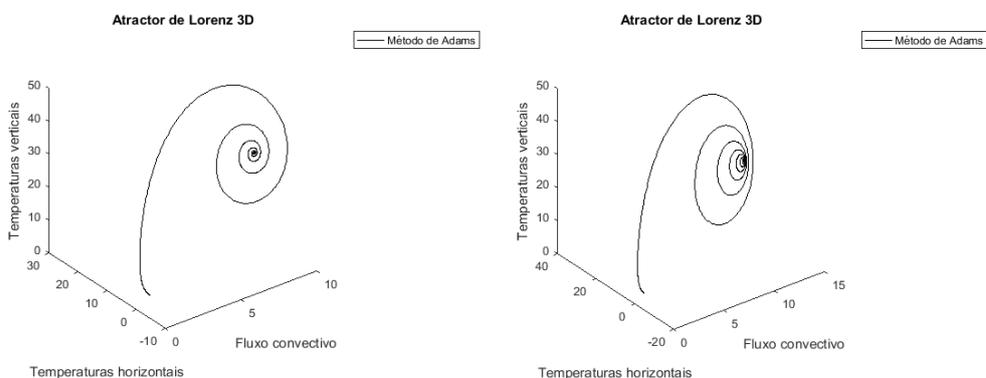
**Figura 6.** Atrator de Lorenz 3D à esquerda e fluxo convectivo X tempo à direita para  $\rho = 200.00$ .

Fonte: (Autor, 2018)

## 3.2 Simulação 2

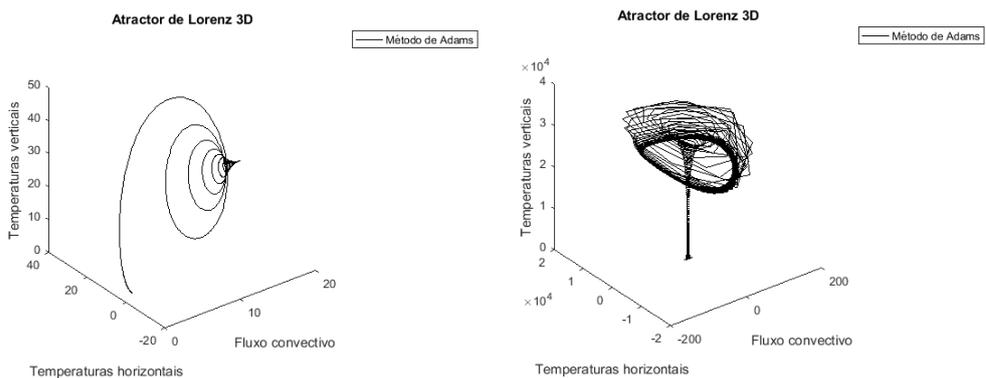
Nessas simulações os valores iniciais foram,  $T_f = 40$ ,  $dt = 0.005$ ,  $n = 4$ ,  $a = 1$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ , sendo simulado a equação de Lorenz aplicada eq.(4), onde o termo  $q$  foi sendo variado, verificando a convergência e consistência do método de Adams de 4º ordem.

$$\begin{cases} x_{k+1} = (x_k + \alpha(x_k - y_k)\Delta t)q \\ y_{k+1} = (y_k + (-x_k z_k + \rho x_k - y_k)\Delta t)q \\ z_{k+1} = (z_k + (x_k y_k - \beta z_k)\Delta t)q \end{cases} \quad (4)$$



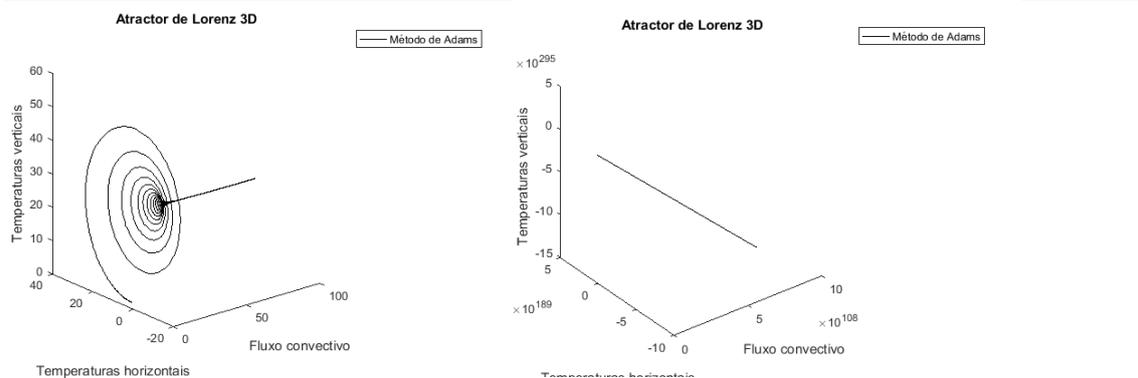
**Figura 7.** Atrator de Lorenz 3D à esquerda com  $q = 1.001$  e Atrator de Lorenz 3D à esquerda com  $q = 1.0030$ .

Fonte: (Autor, 2018)



**Figura 8.** Atrator de Lorenz 3D à esquerda com  $q = 1.0040$  e Atrator de Lorenz 3D à esquerda com  $q = 1.0050$ .

Fonte: (Autor, 2018)



**Figura 9.** Atrator de Lorenz 3D à esquerda com  $q = 1.0051$  e Atrator de Lorenz 3D à esquerda com  $q = 1.0053$ .

Fonte: (Autor, 2018)

## 4 CONCLUSÃO

O Sistema de equações de Lorenz e suas variantes foram bem difundidas nas últimas décadas, sendo de extrema importância para a área de sistemas dinâmicos. Em vista da importância das equações de Lorenz, este artigo é voltado para uma análise de um método do tipo multistep de 4º ordem quando simulam efeitos caóticos e imprevisíveis, como o Atrator de Lorenz. O método de Adams se comporta muito bem quando se compara com o trabalho de Song e Liang 2013. Na simulação 1 o método converge adequadamente até  $\rho = 28$  divergindo acima desse valor como era esperado. Na simulação 2, o método também se comportou adequadamente convergindo até  $q = 1.0052$ , estando de acordo com o trabalho de Song e Liang 2013.

Em vista dos resultados apresentados, recomenda-se o método de Adams-Bashforth de 4ª ordem na simulação de sistemas dinâmicos em especial o Atrator de Lorenz.

## REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1997.

SONG, W LIANG, J. Difference equation of Lorenz System. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol 83, 2013



---

ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. São Paulo: Thomson, 2003