COBERTURA DE LEBESGUE: UMA INTERFACE ENTRE ESPAÇOS TOPOLÓGICOS MÉTRICOS E COMPACTOS

BARROS,Luiz Fernando Lima; **OLIVEIRA**,Eriangra; Prof.Dr **OLIVEIRA,** José Carlos Júnior(co-orientador)**;** Prof.Dr **LOBO,** Matheus Pereira (Orientador)

RESUMO

O presente trabalho tem como base a análise topológica na matemática pura. Busca demonstrar de maneira rigorosa as implicações geradas pelos teoremas, em particular a "interseção entre conjuntos abertos nos números reais" e a "cobertura de Lebesgue", enfatizando de forma concisa a importância desses teoremas para a matemática pura.A presente pesquisa teve como objetivo estudar espaços topológicos métricos compactos com o intuito de adquirir familiaridade com as estratégias de demonstrações matemáticas, definir de maneira precisa os pré-requisitos relacionados aos espaços métricos compactos, demonstrar os teoremas mencionados anteriormente e elaborar pelo menos um artigo científico resumido (White Paper) que contenha os resultados da pesquisa. A análise do mesmo foi realizada através de livros e artigos científicos, além de reuniões frequentes para discussão sobre o mesmo.

Palavras chave: Espaço Métricos e Compactos. Demonstração. Pesquisa

I. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo investigar os pré-requisitos necessários para a abordagem da Cobertura de Lebesgue em espaços topológicos métricos e compactos, visando à demonstração de teoremas fundamentais nesse contexto. O projeto aprofundou conceitos matemáticos e ampliou a compreensão de matérias relacionadas, como Cálculo I e Introdução à Lógica e Conjuntos, devido à similaridade de pré-requisitos com outras disciplinas acadêmicas. A influência do Professor Dr. José Carlos de Oliveira Junior e do Professor Doutor Matheus Pereira Lobo foi fundamental. O projeto superou desafios provenientes da educação no ensino médio e resultou na demonstração do teorema "A interseção de conjuntos abertos infinitos em um espaço topológico não é necessariamente aberta". Essa demonstração foi apresentada durante a SEMAT, junto com a colega de projeto, Eriangra Oliveira. O trabalho envolveu conceitos cruciais, como conjuntos, espaço topológico e operações entre conjuntos, que são pré-requisitos essenciais para o tema central.

Palavras-chave: Espaço Topológico, Interseção de Conjuntos Abertos, Cobertura de Lebesgue.

II. BASE TEÓRICA

Durante o curso de pesquisa, a literatura de referência fundamental compreendeu as obras de Warner, Steve, intitulada "Topology for Beginners", e Lobo, Matheus P., cujo trabalho "Theorems in Topology" desempenhou um papel crucial na base teórica. Estas referências foram essenciais para estabelecer os pré-requisitos necessários para a abordagem do tema em questão. Além disso, o entendimento prévio foi reforçado através de aulas didáticas ministradas no ambiente acadêmico, que cobriram os conceitos-chave necessários para a pesquisa.

III. OBJETIVOS

A pesquisa teve como objetivo estudar espaços topológicos métricos compactos, adquirir conhecimento em estratégias de demonstrações matemáticas, definir formalmente os pré-requisitos de espaços métricos compactos, demonstrar os teoremas mencionados anteriormente e produzir pelo menos um artigo científico resumido (White Paper) que contenha os resultados da pesquisa. Além disso, buscamos apresentar propriedades relacionadas ao Teorema principal *“Cobertura de Lebesgue".*

IV. METODOLOGIA

Nosso estudo visa aprofundar nossa compreensão das propriedades do Teorema “*Cobertura de Lebesgue”* no contexto de espaços topológicos métricos compactos. Para atingir esse objetivo, conduzimos extensas pesquisas em diversas fontes, incluindo o livro *“Topology for Beginners"*, que serviu como uma base sólida para nossa investigação.

Além disso, nossa busca por conhecimento nos levou a explorar artigos científicos relevantes, como *'Theorems in Topology'*, que forneceram insights valiosos sobre as teorias subjacentes a esse teorema complexo. Complementando nossa pesquisa, também recorremos a recursos multimídia, como vídeos educativos no YouTube, para obter uma compreensão visual do tema.

Neste trabalho, compartilharemos os principais insights e descobertas que obtivemos ao examinar o Teorema da Cobertura de Lebesgue, destacando sua importância e aplicação em espaços topológicos métricos compactos."

V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Definições e Propriedades:

- **(Espaço Topológico)** Dado X um conjunto qualquer, uma topologia T em X é uma coleção de subconjuntos de X de tal forma que:

(i) X e $\varnothing$ estão contidos T:;

(ii) interseções finitas de elementos de T estão em T;

(iii) uniões arbitrárias de elementos de T estão em T.

- (**Espaço métrico**) Formalmente, um espaço métrico é um par ordenado (X, d), onde X é um conjunto não vazio e d é uma função de distância que satisfaz as seguintes propriedades:

(i)A distância entre dois pontos é sempre um número não negativo. Ou seja, para todo x, y em X, temos que d(x, y) ≥ 0.

(ii) Identidade dos Indiscerníveis: A distância entre dois pontos é zero se e somente se os pontos são iguais. Ou seja, para todo x, y em X, temos que d(x, y) = 0 se e somente se x = y.

Definição (Número de Lebesgue)

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Dada uma cobertura aberta {Gi:i ∈ I } de X, se r > 0 for tal que, cada subconjunto de X com diâmetro menor que r estiver contido em Gj, para algum j ∈I, a será chamado um número de Lebesgue para a cobertura {Gi: i ∈ I }.

Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, toda cobertura aberta de X terá um número de Lebesgue.

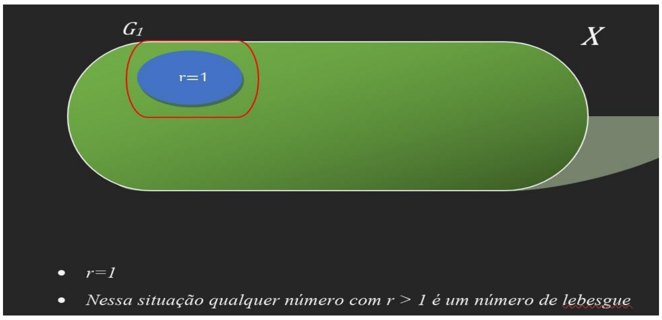
TEOREMA COBERTURA DE LEBESGUE

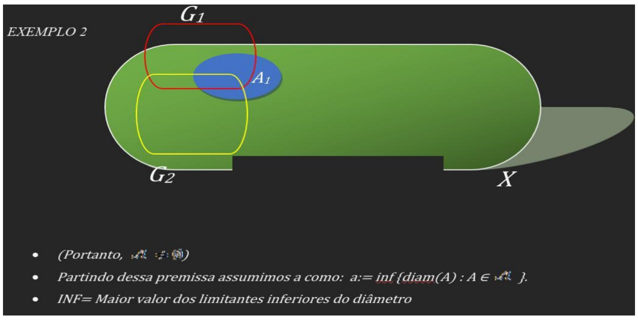
Seja (x,p) for um espaço métrico compacto, toda cobertura de X terá um número de lebesgue.

Prova: X=$\{\forall x/x \in R\}$, C=$\{X = U\ Gi/\ i \in I\}$

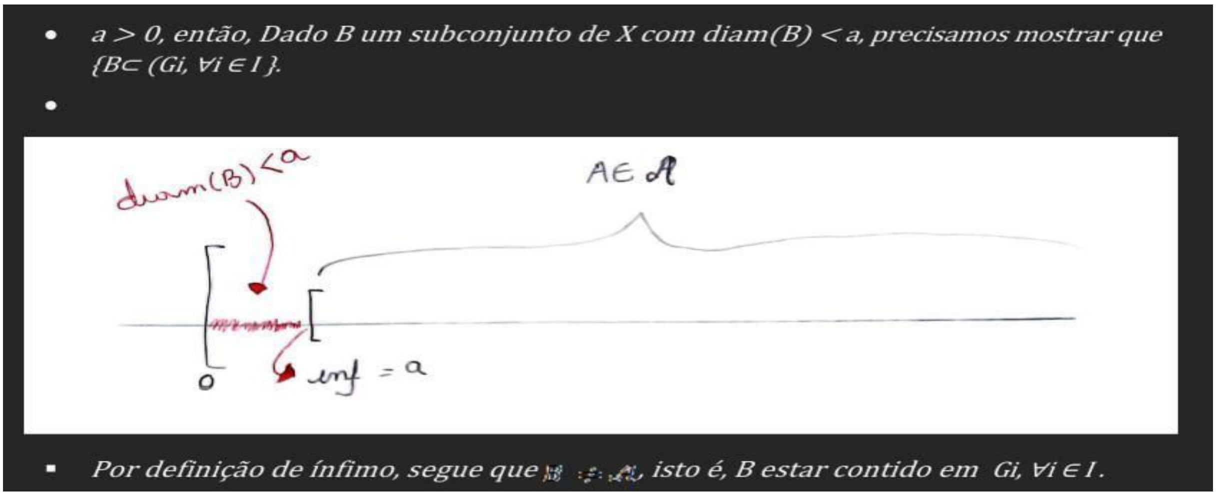
- Caso 1- Seja {Gi: i ∈ I } uma abertura de X. Se todo subconjunto de x estiver contido na cobertura, acabamos.
- Caso 2- Negar o caso (1) é mostrar que nem todos os subconjuntos de x, está contido sem um único {Gi: i ∈ I }.

- Considere A = {$A \subset X$; $A \neg \subset$(Gi: i $\in$ I)}, tal que A está contido em X, e não estar contido em um único Gi.





Assumindo valores de a:



Para *a=0:*

Nesse caso, tomamos uma sequência $A_n \in A$ tal que diam $diam(A_n) < 1/n$. Seja $x_n \in A_n$, com $n \in N$. Assumimos que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ onde $x \in G_i$, $i \in I$. Assim, existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset G_{i_x}$. Tomando $n_x \in N$ de tal forma que $1/n_x < r_x/2$, vemos que $p(x_{n_x}, x) < r_{x/2}$ e, portanto, $A_{n_x} \subset G_i$, o que contradiz o fato de $A_{n_x} \in A$.

VI. CONCLUSÃO/CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho na área da topologia proporcionou-me a oportunidade de explorar diversos domínios desconhecidos, o que despertou meu interesse pela pesquisa. Hoje, sou um acadêmico mais crítico e refinado em relação à escrita matemática e aos conceitos estudados, e estou me tornando um pesquisador iniciante na área. Sou imensamente grato aos meus orientadores, o professor doutor José Carlos Oliveira Junior e o professor doutor Matheus Pereira Lobo, bem como à minha colega de pesquisa, Eriangra Oliveira.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao CNPq por nos proporcionar essa oportunidade de conduzir pesquisas com recursos adequados, permitindo que fluíssemos tranquilamente em nossa jornada de investigação. Muito obrigado.

VII. REFERÊNCIAS

[1] WARNER, Steve. Topology For Beginners: edição 1a. [amazon], [USA] e 2019

[2] LOBO, Matheus. Theorems In Topology: edição 4ª. [Ojpm.org], 21 de feb 2022

[3] Warner, Steve. Pure Mathematics for Beginners. GET 800, 2019

<u>TRABALHO PUBLICADO EM EVENTO</u>

Matheus Pereira Lobo, Eriangra Oliveira dos Santos, Luiz Fernando Lima Barros. Intersection of Open Sets in the Reals. *Open Journal of Mathematics and Physics*, volume 5, 2023, Araguaína, TO.

VIII. AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão àqueles que estiveram ao meu lado durante esta jornada de pesquisa. Minha colega Eriangra Oliveira e meus orientadores, o Professor Doutor Matheus Pereira Lobo e o Professor Doutor José

Carlos de Oliveira Junior, desempenharam um papel essencial em meu desenvolvimento acadêmico. Seus apoios e orientações foram inestimáveis.

Também é importante destacar o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) do Brasil, que possibilitou a realização deste estudo.

A pesquisa é uma jornada colaborativa que enriqueceu meu conhecimento e crescimento pessoal. Estou profundamente grato a todos os envolvidos. Espero que os resultados desta pesquisa possam beneficiar a comunidade acadêmica e científica, assim como aqueles interessados no assunto.

Agradeço a todos que tornaram esta pesquisa possível.